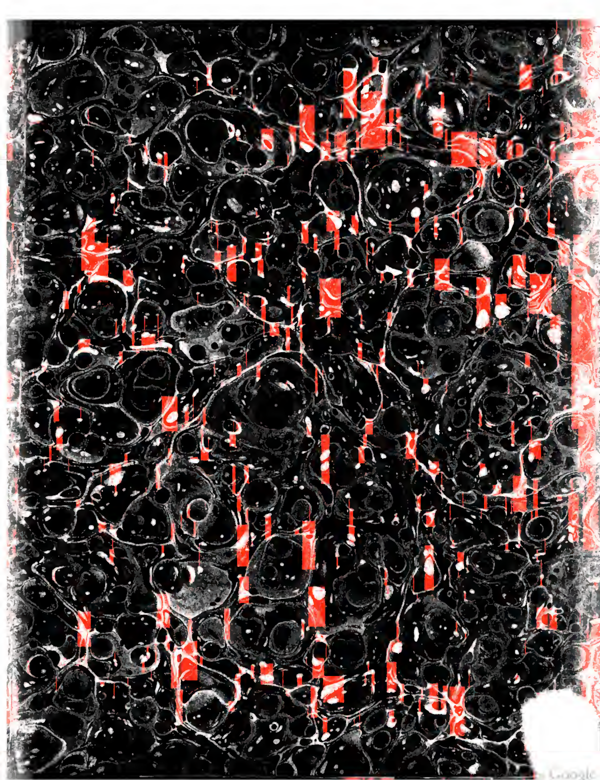
DOCTRINA



201
37 I
8

OPERUM NEWTONI

TOMUS PRIMUS.

* 2

ISAACI NEWTONI

OPERA

QUÆ EXSTANT OMNIA.

COMMENTARIIS ILLUSTRABAT

SAMUEL HORSLEY, LL. D. R. S. S.

REVERENDO ADMODUM IN CHRISTO PATRI

ROBERTO EPISCOPO LONDINENSI A SACRIS.

LONDINI:

EXCUDEBAT JOANNES NICHOLS.

M DCC LXXIX.

A D

R E G E M.

QUOD eorum, Rex Augustissime, perpaucis contigit, quorum animos ſtudium inceſſerat, in magno aliquo opere, Te Patronum compellandi, ut Principem ii ſuum cum muneribus non indignis videantur adiiſſe; id mihi eveniſſe, imperare mihi nequeo quin palam glorier. Nec vereor ut ea ſit hominis leviculi, et nimium ſibi arrogantis gloriatio. Haud enim noſtra ſunt hæc Opera, quæ Tibi dona fero, ſed Newtoni. Ejus utique viri, cujus ſingularis ac divina quædam excellentia ingenii pulcherrimum illud præconium apud exteros etiam eſt conſecuta, " hunc hominem unum fuiſſe, poſt natos homines, " qui minùs gentis ſuæ quâ oriundus fuit, et ætatis quâ vixit, " quàm generis humani ornamento natus eſſe videretur." Qui primùm reconditam illam Mathematicorum ſcientiam ad illud perduxit faſtigium, quod vel principes illi viri Conon et Archimedes, ſi reviviſcere poſſent, mirarentur. Ita quæ illis difficillima erant, hic facillima reddidit; quæ verò illi nullâ arte ſuperari poſſe ſperaverant, hic, quantum vel uſus Mechanicês poſtulet, vel ad rerum naturalium inquiſitionem ſatis ſit,

 ſuperavit.

ſuperavit. Tum verò Phyſicam ingreſſus, Geometriâ illâ ſuâ facem præferente, quantas ibi tenebras diſcuſſit, quæ opinionum commenta delevit! Soli ſuam in centro Mundi ſedem vindicavit. Non ut ante eum Copernicus, et Veterum nonnulli à Philolao profecti, conjecturâ tantùm et probabili ratione fretus, ſed certiſſimis rationum concluſionibus, quas ex iis ipſis deduxit, quæ Aſtronomi in cælis fieri quotidie cernunt. Importuno Vorticum onere cælos liberavit; quippe Orbes Solidos jam olim diſturbaverant machinæ Tychonis. Fibras etiam ſuſtulit, quas, magneticâ virtute præditas, in corpore ſolari aliiſque cæleſtibus Keplerus poſuerat. Planetas vi proprii ponderis in orbe quemque ſuo retineri oſtendit. Eâdem vi Cometas circa Solem in orbem agi. Vagum et multiplicem Lunæ curſum calculis etiam ſubjicere docuit; ponderis ejus tam in Solem quàm in Terram ratione habitâ. Feliciſſimam Kepleri conjecturam de cauſâ Æſtus Marini, invictiſſimis rationibus, calculis etiam ſuffragantibus, firmavit. Figuræ corporis Terræ quænam ratio ſit, oſtendit; ut, ob propriam ejus circa axem ſuum vertiginem, ſub polis planior fiat, mediis partibus turgeſcat. Ut inde oriri neceſſe ſit, quod in Horologiis oſcillatoriis uſuvenit, inclinato magis axe lentiùs, erecto incitatiùs incedentibus. Ut etiam à figurâ Terræ inæqualiter globoſâ cauſa arceſſenda ſit, quæ puncta æquinoctialia per ſæcula retrorſum impulit. Spatium vacuum quod Scholæ tantopere reformidârunt, illud quidem rerum Naturam non modò pati, verùm etiam poſtulare oſtendit. Nec ratione tantùm id perſuaſit, ſed rem à ſenſu remotiſſimam ſenſibus quodammodo hominum et oculis ſubjecit; ipſâ quidem experientiâ in corporibus, tum pendulis, tum cadentibus, doctrinam ejus mirè comprobante. Luminis Naturam, quæ et ipſa olim abdità ſſima fuerat, in clarâ luce poſuit. Ita ut occultas omnes,

quæ

quæ vocabantur, qualitates corporibus abjudicârit, & à rerum Naturâ prorſus exulare juſſerit. Nullam enim virtutem, nullam vim, ullius corporis propriam et innatam agnovit, præter unam illam quæ ſenſibus noſtris maximè patet, quam Inertiæ nuncupavit, quamque corporibus omnibus, pro materiæ cujuſque modo, communem ſtatuit. Hâc vi, accedente mutuâ quâdam corpuſculorum omnium nunc appetentiâ nunc fugâ, omnia voluit pro notiſſimis legibus mechanicis *magnum per Inane geri.* Appetentiam illam et fugam non corporibus ipſis naturalem ſtatuit; non cum Epicuro æternam, eandem tamen fortuitam; non à Veterum quorundam Amore et Odio, Juniorum Sympathiâ et Antipathiâ profectam; ſed à cauſâ quâdam incorporeâ, quæ, ut ſenſus noſtros maximè lateat, intellectum tamen et mentis aciem haud fugit. A Deo utique hæc omnia proficiſci palam vociferatus eſt. Hujus arbitrio omnia fuiſſe procreata, hujus Imperio ſubeſſe, hujus conſilio et ſapientiâ regi. Hunc rerum omnium Opificem, Conditorem, Dominum; Unum, Potentiſſimum, Æternum, Immenſum; ſine quo non pulcherrimus hic rerum ordo, non Res ulla, non Locus rerum ullus, non Tempora et Ætates, non Spatium ipſum vacuum, non Tempus individuum Æternitatis eſſet. Hunc ex aſſiduâ Naturæ contemplatione nôſſe plurimarum ſuarum vigiliarum maximum jucundiſſimumque fructum habuit. Nec ſatis tamen habuit ex Naturâ cum nôſſe, niſi uberior ejus ſolaque ſalutaris cognitio accederet, ex Filii ejus Evangelio unicè haurienda. Igitur in libris Sacri Codicis, non legendis modò, verùm etiam illuſtrandis, plurimum temporis et ſtudii poſuit. Neque inclinatâ ſolum id ætate, quod nonnulli perſuadere volunt, et ſenio jam hebetatâ mentis acie, ſed integris adhuc et cum maximè vigentibus corporis animique viribus. Neque alio conſilio Temporum emendationem ſuſcepiſſe videtur, niſi ut

 antiquiſſimis

antiquiſſimis Hiſtoricis Sacris ſua conſtaret fides; tum hominum monumentis, tum cæli converſionibus comprobata. Quippe cùm indiciis rerum vetuſtiſſimarum undique conquiſitis, temporum diſtributionibus ad calculos revocatis, motuum etiam cæleſtium ratione exquiſitè habitâ, eam omninò ſe obtinuiſſe conſideret humani generis novitatem, quæ cum Telluris noſtræ Archæologiâ Sacrâ optimè conſiſteret. Sed in excutiendis tam perantiquis illis Danielis quàm recentioribus Divi Joannis vaticiniis diligentiâ haud minore uſus eſt. Haud eâ mente, quòd temporis futuri exitum, à ſapientiſſimo rerum Conditore altâ nocte merſum, improbo conatu in lucem poſſe protrahi ſperaret: quippe inſipientis id fuiſſet, ultra hominem voluiſſe ſapere. Sed ut vaticinia multis retro ſæculis edita cum hominum memoriâ conferendo, oſtenderet Naturæ de Deo judicium (quod et ipſum quidem certiſſimum et reverâ divinum eſt) alio et apertiore longè Dei ipſius de ſe teſtimonio confirmari; unde docti æquè indoctique intelligerent Dei nutu et providentiâ omnia geri. Simul ut hominibus perſuaderet, ſanctos illos viros, qui ea prædixerant futura, quæ ſæcula pòſt nata fieri viderunt, Dei numine afflatos: nec vana ideo eos ceciniſſe, quæcunque de interitu hujus Mundi cecinere, de Improborum apud Inferos ſupplicio, de ævo beato, quod Boni et Fideles, Chriſti ſanguine redempti, cum Deo ſempiternum agent. Hanc tantam tamque variam ſummi viri doctrinam, eximias hujus animi præcellentis dotes commendabat ſingularis innocentia vitæ, raraque vel priſcis etiam temporibus morum ſanctimonia. Hujus Viri ſcripta (quæ eſt hominum incuria) ſparſa hunc uſque diem et disjecta, quanquam tertius à quinquageſimo nunc vertatur annus à quo è vivis exceſſit, nunc primùm in unum corpus collecta, Tuis, Rex Optume, auſpiciis in lucem prodire incipiunt. Metuendum eſſet, ne iniquis admodum temporibus,

temporibus, nisi Te Patronum haberent. Quis enim inter ſtrepitus armorum civilium Philoſophiæ locus? Fuiſſe tamen, in hâc atrocitate temporum, qui Te Fautore et Auctore optimis Scientiis haud ſegniter operam navârint, ut ipſis non inhoneſtum, Tibi certè apud poſteros etiam glorioſum erit. Nec vana auguror, O Rex. Etenim hanc Tui veriſſimam laudem non Malorum obtrectatio, non ævi longinquitas abolere poterit: Te regnante, Scientiam tum naturalem tum divinam tanta incrementa cepiſſe, quanta ſub Uno eorum nemine, qui Reges ante Te fuerunt, rebus etiam pacatiſſimis. Namque Newtonus longiſſimum ſuæ vitæ gloriæque curriculum quinque Principum temporibus æquavit. Nondum bis decem Anni ſunt cùm Tu regnare orſus es, jamque vidimus remotiſſimos marium tractus Navibus Tuis plus ſemel exploratos; Vidimus conſtitutam, certiſſimis obſervationibus Aſtronomicis, Solis à Tellure noſtrâ diſtantiam; definitam ideo ſpatii omnis cis Saturnum ſtellam amplitudinem. Quod repertum etſi ipſa rerum Natura noſtris temporibus deſtinaverit, quippe quæ ſiderum motus eis legibus aſtrinxerat, ut expectatiſſimi illi ſtellæ Veneris per diſcum ſolarem tranſcurſus in aliam hominum ætatem haud inciderent; quòd pleniſſimus tamen ejus ſpectaculi fructus in Philoſophiam redundârit, Tuæ, Rex Inclyte, Munificentiæ nemo non acceptum refert. Gravitatis Doctrinam novis obſervationibus, Te annuente, in ultimâ Caledoniâ inſtitutis confirmatam vidimus. Perſcrutatam ſubtiliſſimis experimentis Aëris naturam. Vidimus, à Te ſuſtentatas, in Britanniâ Tuâ adoleſcere inſolitas hoc cœlo artes: Urbem novâ extructionum magnificentiâ ſuperbire: Celſa ſurgere Procerum palatia: Intùs etiam ea ſpectandis, non ut olim exterorum, ſed civium operibus condecorari. Quod verò hiſce omnibus majus eſt et divinius, præcipua religionis noſtræ dogmata, praviſſimis ſtudiis, proh dolor! impugnata, animoſè tamen ac naviter defenſa

fensa vidimus. Vidimus fcriptos codices facri textûs Hebraici undique conquifitos, penitùs excuffos; magno certè perennique literarum facrarum emolumento. Quod Opus ut labore conftitit! ut fumptibus! quibus populorum omnium Reges Procerefque ut impensè fe præbuerunt! Ita Tu fcilicet propriæ largitatis exemplo omnium ftudia accenderas. Videmus Prophetam difertiffimum Ifaiam, ejus Viri curis quem Tu Ecclefiæ Tuæ Londinenfi præfecifti, modò non revivifcere, & fermone populari luculentè converfum myfteria Dei clarè et apertè loqui. Hæc Te regnante Ætas Noftra vidit. Plura, credo, majoraque videbit. Ita omnes bonis literis, quarum Te nôrunt amantiffimum, impigri et alacres incumbunt. Faxit Deus O. M. crefcat indies in hoc populo fcientiæ amor. Te, Pater, tantum Doctrinarum Artiumque omnium Patronum, diu nobis fofpitet, tueatur, cuftodiat. Tibi verò gratum precor fit Munus, quod reverentiæ et officii causâ Tibi dicat, qui in fubditorum Tuorum fideliffimorum numero nomen fuum profiteri geftit, unus idem ex humillimis

SAMUEL HORSLEY.

L E C T O R I S.

SOLENT ii, qui in aliquâ re magnam ſui expectationem concitaverint, primùm omnibus modis oſtendere, officio ſe non defuiſſe; deinde apud æquos judices ſuffragia eorum bonâ cum ſpe opperiri. Quod etiamſi non artis eſſet, et conſuetudinis, tamen à nobis commodè faciendum eſt, qui Newtoni Opera cum inſigniore quodam apparatu in lucem edere decrevimus. Etenim, ſi illud verum ſit, quo gravior doctrinæ locus aliquis et ſplendidior, tanto magis cognitione atque induſtriâ egere, qui eum tradituri ſint; omnino nos neque exile munus, neque otioſum ſumus adepti.—Tum verò Auctorem ſequimur, ſuper graviſſimis rebus preſſè ſæpiùs et anguſtè locutum, præ ingenii amplitudine aſperum aliquando et perdifficilem; ita ut magnum Interpreti negotium faceſſerit, qui non tam omnia demonſtraviſſe, quàm velut ex oraculo edidiſſe, quæ mente animoque rata ſibi penitus habuerat, arbitrandus eſt. Igitur omnibus conſiliis, et quâcunque demum ratione enitendum eſt, quo plenior fiat et illuſtrior tanti hujus Viri explicatio. Ita cùm in decurſu operis ubique ea attulimus, quæ diſcentium induſtriæ ſuppetias eant, ſparſa tamen atque uſu et genere diverſa, anteire debet totius rei, et ordinis quem ſecuti ſumus tractatio. Quod et Tironibus magno certè adjumento futurum eſt, ſi quis manum porrigat, et iter ingreſſuris etiam viæ ſubſidia palam oſtendat.

Ex quo itaque publici juris fuit hujuſce Operis proſpectus, ita rem univerſam partiri ſtatuimus, ut primum è quinque Tomis abſolverent Newtoni tractatus omnes ad puram, quæ dicitur, Matheſin quodammodo pertinentes. Quorum etiam initio poſuimus Arithmeticam Univerſalem; poſt eam, cætera quæ ad Series et Fluxionum Doctrinam ſpectant Opuſcula. De ſingulis ſingulatim dicendum.

ARITHMETICAM UNIVERSALEM *perfecti Operis formâ caruiſſe nemo omnium eſt, qui non intelligat; cùm vix aliud præ ſe ferat, quàm Præ-*

Prælectionum Capita, quas Newtonus Cantabrigiæ jam olim è Cathedrâ tradebat. Ita monita et præcepta, quæ ibi deprehendas, Aphorismis ferè omnino conclusa sunt, neque ratiociniis firmata, neque demonstrationibus legitimis absoluta—Quin et de Algebræ inventoribus, aliisve qui, ante Newtonum, rem quadantenus promoverant, altum ubique silentium. Quæ omnia et in secundâ istius libri editione pariter desideramus; magno posteris infortunio, quòd, annis jam ingravescentibus, præterita repetere, et ultimam illis manum imponere Newtonus ipse non tulerit.

Igitur nusquam aliás ab Interprete magis elaborandum erat; ubi indaganda omnia: quæ nimis angustè tradita sunt, fusiùs efferenda: et subtilis artificii Regulæ ferè ab integro ad examen revocandæ. Neque simplicem profectò super his impendimus laborem—Quæ levioris erant operæ, subjectis ubique annotationibus pro re natâ effecimus, explendo ea quæ breviùs apud Newtonum scripta sunt, et inventa, quæ aliunde originem traxerant, suis Auctoribus adjudicando. Graviora alia, et majoris momenti in Appendicem contulimus undeviginti capitibus expositam, quam in animo erat ad calcem statuisse, nî mole suâ ultra justam hujusce Tomi magnitudinem accreverat. Olim fortasse et seorsim ab hoc opere prodìtura est. Tantùm hic loci subjecto Indice innuimus, quænam ibi præcipuè tractare visum est.

ELENCHUS CAPITUM

Appendicis in Arithmeticam Universalem.

I.

Traditur Methodus inveniendi numeros primos per cribrum Eratosthenis.

II.

Inventio divisorum simplicium ex mente Newtoni, demonstratione munitur.

III.

Agitur de inventione divisorum compositorum. Recensentur Cl. Virorum Cartesii, De Beaume, Bartholini, Van Hudde, et Wassenaeri

Sanaeri in hâc re progressus. Ostenditur quantùm cæteros omnes Newtonus antecelluit.

IV, V, VI, VII.

In se habent demonstrationes Newtoni regularum, quæ divisoribus compositis inveniendis inserviant. Quas et fatemur è Gravesandi Specimine Commentarii in Arithmeticam Universalem *petitas esse; exili libello, cui tamen omne illud retulisse debuerant, quicquid in hoc opere Maclaurinus, Bernouillius et Clairaultius uspiam profecerint.*

VIII.

Instituitur demonstratio Newtoni Regulæ, quam ex Bombellio et aliis expresserat, de extrahendâ Radice quadraticâ Multinomii è quantitatibus integris et radicalibus compositi—Subjicitur et alterius regulæ, quam in eandem rem ex Stevino attulerat, explicatio—Harum ultimam ostenditur in irritum plerumque cadere, nisi priùs adhibitâ quâdam multinomii tractatione, quæ et sæpiùs operosior, quàm ut quis libenter ad eam confugiat.

IX.

Regula Newtoniana extrahendi altiores Radices ex quantitatibus numeralibus demonstratione confirmatur, quam etiam Gravesandi libellus sufficere potuisset. Subjicitur hujusce artificii origo; quantùm in illo, præ aliis Wassanaerus profecerat; et quàm longè in eodem opere cæteros omnes post se reliquit Newtonus.

X.

Traditur methodus generalis quantitatem incognitam, ubi binæ pluresve sint, exterminandi; quæ nusquam non sufficiet, ubi ad alias omnes frustra confugeris: modò satis artificiosè sit adhibita.

XI.

Exponitur methodus Fermatiana quantitates quotcunque surdas ex æquationibus tolli, ubi Climaclismi ope Asymmetriâ eas liberare non datur.

XII.

Demonſtratur Carteſii Regula, cujus ope cognoſcitur quot ſint Radices negativæ, ubi æquationis radices nullæ ſint impoſſibiles. Cujus rei cùm Principia poſuerat Kæſtnerus è Gottingiæ Profeſſoribus, tamen Marte proprio eam proveximus, et omnino Geometricè abſolvimus.

XIII.

Ad mentem Cl. Viri Campbelli, apud Acta Regiæ Societatis, demonſtratione confirmatur Newtoni Regula, per quam ferè cognoſci poteſt, quot ſunt Radices impoſſibiles: ubi aliunde deprompta pleniùs tamen et perfectiùs ipſi abſolvimus.

XIV.

Newtoni Regula de colligendo ſummam poteſtatum Radicis incognitæ luculentè exponitur. Oſtenditur illam ipſam Albertum Girardum jam antea tradidiſſe, magni nominis virum, et in Analyſeos ſpecioſæ inventis modò non Vietæ æqualem, utcunque incuriâ hominum ferè in deſuetudinem abierit.

XV.

Adducitur Limitum demonſtratio, intra quos radices æquationum cenſendæ ſunt conſiſtere.

XVI.

Additamentum D[ni] D[ris] B. Taylori de Æquationum proprietatibus, Commentarii loco, ſubjicitur iis, quæ Newtonus in hâc re ſtatuerat.

XVII.

A principiis ſuis excutitur Regula de Æquationum Reductione per diviſores ſurdos. Quem locum ubi Caſtillioneus attigerat, nuſquam tamen expoſuit, quod apud Newtonum tam ſubtile atque ele-

gans, quomodo inveniantur quantitates Græcis Litteris designatæ. Idem neque alius quisquam, ut opinor, ante nos perfecit.

XVIII.

Breviter absolvuntur ea, quæ à Vietâ et Alberto Girardo tradita sunt, de proferendis Radicibus Æquationis Cubicæ $x^3-qx\mp r=0$ *per anguli trisectionem, ubi Cardani Regulæ defecerint; ita ut impeditam rem Geometriæ ope pulcherrimè aliquis promoveat.*

XIX.

Quæritur causa, unde Cardani Regulæ unquam deficiant, vel, ut aliter dicam, unde quantitates quæ reverâ et actu sunt, unicè designari possint Algebraico sermone, ut quæ existentiam non habeant.

Et hæc quidem de Appendice nostrâ dicta sunto—Quam si flagitent homines Mathematici, absoluto hoc Opere, et negotiis vacuus, ut et alia fortasse ad Newtonum spectantia, in lucem edere non gravabor.

TRANSEO *ad alteram hujusce Tomi partem; quæ ut suprà dictum est, congesta habet Newtoni de Seriebus et Fluxionum Doctrinâ Opuscula. Quarum rerum, siqua apud nos sit intelligentia, illam in universum omnem ex ipsius Newtoni scriptis conquisitam esse edicimus; aliis relicturi*—erroremque hostibus illum—*velle minimo sudore rem agere, Interpretum genus omne affectari, et aliunde potiùs quàm ab ipso Auctore veram illius doctrinam exquirere. Quod si in aliis rebus inscitiæ est, In istiusmodi disciplinâ graviùs vituperandum est, ubi subtilia omnia, et in acie novaculæ, quod aiunt, vera terminorum posita sit æstimatio.*

Nihil itaque defuturum arbitramur, modò penitus perspecta et plenè cognita sint ea, quæ Newtonus ipse in arte suâ tradiderit. Neque aliò spectant, quæ ipsi adjicimus, quàm ut hæc studia difficultate rei non tantopere homines absterreant. Nimirum tam gravis argumenti tractationem universam in ordinem redegimus; etiam discendi subsidia ubique comparavimus; prætermissa exprimendo; explicando ea quæ angustè ponebantur, et ubique commonendo lecto-

rem, quò intuens, a verâ Newtoni sententiâ minùs aberret — Eo denique consilio omnia concinnavimus, ut in posterum nusquam aliàs confugiant, qui sublimioris Geometriæ Elementa penitus complecti secum statuerint.

Jam verò brevi Monito *primùm ostendimus, quali ordine Tirones ad legendum accedant. Quod ut ritè fiat, initio posuimus Divini illius* PRINCIPIORUM *Operis Sectionem primam, quasi antesignanum aliquod, et ipsum cardinem in quo universa Doctrinæ Fluxionalis demonstratio versatur. Porrò illi Annotationes subjecimus, quæ probandi media ubique suppleant; Propositiones etiam Corollariis aliquot adauximus. Quæ et denuò apud ipsum in Principiis locum deprebenderis—Annotationes semel protulisse satis esto.*

Hæc excipit Analysis per Æquationes numero terminorum infinitas; *ad quam, inter alia, prima illius Regula demonstratione Geometricâ è Fermatio munita est, et ostensum insuper, quomodo Quadratura ad pag. 7. Edit. Jonesii det longitudinem Arcûs Ellipseos.*

Tertium babent Locum Excerpta ex Epistolis Newtoni, *eadem sanè, quæ ad calcem bujusce tractatûs protulit Jonesius, tantùm ordine paululum immutato, quo Tironibus fiat accommodatior. Quod si minùs legitimè factum esse quis existimet, Epistolas etiamnum integras suo loco invenerit. Apud nos Excerpta ita ordinamus, ut primum sit*

Ex Epistolâ Newtoni ad Oldenburgum primâ, *de formulis Algebraicis in Series infinitas resolvendis, ab initio scilicet ad verba* " aliam excogitare adactus sum" *(p. 25, Edit. Jones.)*

Secundum et tertium quæ et Jonesio ibidem posita, alterum scilicet ex Epistolâ Newtoni ad Oldenburgum posteriore, *de seriebus condendis et invertendis—Alterum ex* Epistolâ Newtoni ad Wallisium *de radicibus æquationum fluxionalium extrahendis.*

Quartum denique ex parte aliquâ primi apud Jonesium constare volumus, ex Epistolâ Newtoni ad Oldenburgum primâ, *de Problematis per series infinitas resolvendis.*

Ita, ni fallor, accuratiùs et magis dilucidè se exceptura sunt bæc fragmenta. Quænam opis nostræ sint, ad singula proferendum est.

Ad

Ad primum igitur, Theorematis Binomii demonstrationem adbibuimus—Ad secundum, Newtoniana duo Theoremata tertio, neque minùs utili, Moivræano adduximus, de Infinitæ Æquationis radice extrabendâ, sive, ut aliter dicam, de duabus seriebus ad unam redigendis. Quorum omnium demonstrationem qui elicere velit, ad locum adeat Maclaurinum de Seriebus convergentibus, ubi et perspicuè traditur, quidnam Parallelogrammum Newtonianum ad Series inveniendas conferat, et Regularum etiam, in Excerpto tertio, satis luculenta ad manus sit explicatio.

Excerptorum ultimum plura comitantur, quæ nostræ sunt indaginis. Inter alia, recondita Jacobi Gregorii inventa Geometricè demonstravimus; qui Tangentem et Secantem Logaritbmicam definire novit ex Arcu, et Arcum vicissim ex illis, nullâ Naturalium numerorum ratione babitâ. Omnino enim visum est tam subtilis artificii Series, in bujus argumenti tractatione, non prætermittendas esse, præsertim etiam quòd in Commercio Epistolico inveniendæ sint earum formulæ. Seriem Newtonianam pro arcu circulari in datâ ratione multiplicando sive dividendo, mutatis tantùm signis, idem posse apud byperbolicos sectores ostendimus; et in Circuli cum Hyperbolâ similitudine, per banc Seriem patefactâ, poni ea quæ Colesius in Harmoniâ Mensurarum tam scienter instituit.

Ad locum exposita est methodus arcum Ellipseos *æstimandi, in boc Excerpto tradita, quam* ad Parabolam etiam et Hyperbolam *accommodavimus—ubi et ad manum fuit illam Ellipseos et Hyperbolæ cognationem explicare, quam Algebraici innuunt, Hyperbolam alio nomine Ellipsin appellantes, cui axis sit negativus; unde factum est, ut formulæ generales ad quamlibet è Sectionibus Conicis, nullo ferè negotio ad alias transferantur. Adbæc Arcûs Parabolici æstimationi Cotesianæ in tantum immorati sumus, ut Geometrica illius ratiocinia dilucidè ponerentur.*

Itaque omnia singulatim eruendo, ad Seriem Newtoni, quâ Sphæroidis segmenta secunda exponi possint, jam deventum est. Cujus profectò rationem universam, quos ortus babuit, et quænam artificia, parvo molimine indaganda esse nemo æquior statuerit. Utcunque boc sit, per omnes bujus Excerpti series, sedulò fecimus, ne lateret uspiam earum conformatio, ex ipsius Curvæ, quæ æstimanda erat, affectubus assequenda.

Finem

Finem ex hâc parte fecimus, explicatis apertiſſimè Problematum Conſtructionibus, quæ veris ſaltem proximæ ex Infinitis æquationibus derivari poſſint: cujus rei nuda tantummodò exempla in Epiſtolis ſuprà memoratis extiterint.

Proximè collocatus eſt de Quadraturâ Curvarum *Libellus, præ cæteris quidem ſcientiæ ubertate inſignis, idem tamen rerum compreſſione et amplitudine præ cæteris obſcurus et gravis. Ita contentionem animi, et ſtudium poſcere acerrimum, et ingenii quaſi formâ quâdam lucere, quæ prenſantes tamen miſerè effugeret. Quæ cùm ita ſint, pluſquam mediocri ſtudio locum tam difficilem exercere viſum eſt. Primò itaque Problema illud* Datâ æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, invenire fluxiones, *prorſus aliâ loquendi ratione explicuimus; eo ſermone uſi, qui in Methodi Indiviſibilium ſuſpicionem omnino cadere non poterit, quam et è Geometriâ exulare penitus, et ſub umbras ire jam pridem oportebat.*

Demonſtrationem Propoſitionis Quartæ, ut et omnium quæ in Quintæ præceptis paulo magis ſpinoſa, et ſextæ quoque luculentè abſolvimus. Quarum ultimam jam ante nos Stewartus concinnaverat.

Explicuimus ea alioqui parùm intellecta, quæ monuit Newtonus in Propoſitionis ſeptimæ Caſu primo de coefficientibus θ, $\theta + \lambda\eta$, &c. *ubi aliquis eorum defecerit. E Maclaurino Caſum ſecundum aliter demonſtravimus, et univerſam hujus loci doctrinam Æquationibus Canonicis expoſuimus ad uſum Computandi, ni fallor, quàm maximè accommodatis.*

Propoſitionem octavam duplici probatione confirmavimus; et Nonæ Corollaria demonſtrationibus partim è Stewarto partim noſtris ſingulatim adauximus.

Undecimæ, coronidis loco, ſubjecimus Robinſii demonſtrationem Latinè redditam.

Librum de Quadraturis excipiet Opus Poſthumum de Fluxionibus; *modico tamen, ſi ad cætera ſpectes, Annotationum apparatu, ubi neque neceſſe erat fuſiùs rem agere.*

Denique Tomum hunc claudent Methodus Differentialis *et* Enumeratio Linearum Tertii Ordinis. *Neque dubitavimus binos de proprio ſubjicere Libellos, alterum* de Geometriâ Fluxionum, *ſive*

sive Additamentum tractatûs Newtoniani de rationibus primis et ultimis; *alterum, quem* Logisticam Infinitorum *appellare libeat. Primo utique Elementa Doctrinæ Fluxionum ita absolvimus, ut integris et intaminatis Geometriæ ratiociniis omnia eluceant, eátenus re provectâ, ut exponatur fluxio quantitatis* $\frac{x^{\frac{m}{n}}}{y^{\frac{p}{q}}}$.

Logistica Infinitorum *formulas habet, quas in computandi subsidium excogitavimus, ubi in series numero terminorum infinitas operationes Arithmeticæ instituendæ sint. Inter alia, Theorema Infinitomium Cl. Viri Moivræi aliter à nobis declaratum est, omnino etiam in majorem computandi utilitatem, quàm ex formâ auctoris, vel immutatione ipsius Cheynii.*

Quod reliquum est, omnia exposui, quæ ad insequentem Tomum, qualiacunque demum Mathefeos incrementa, protulero. Quæ si graviter satis, et subtiliter à nobis disputata sunt, mitto quàm ornatè, et ad vulgi aucupium. Etenim is ego sum, qui in Philosophiæ tractatione, succum et sanguinem, non coloratam quandam speciem requiro. Omnino neque eos salutatum prodeo, qui absque labore ullo et industriæ periculo, in Epicuri hortulis, quod aiunt, omne scientiæ genus, et edita sapientum templa *somniant. Alacres, et exercitatos, et hisce studiis ardentes volo, qui cum Newtono philosophari cupiunt. Iidem etiam, ut æquum de me statuant judicium, nullus vereor; quanquam quæ hoc Libro conclusa sunt, neque numero neque pondere æquiparanda sunt iis, quæ posthac edituri sumus. Quod faustum felixque sit, absolutis hisce, Divinum* Principiorum *Opus jampridem ingressi sumus, brevi sub eâdem formâ in lucem proditurum, modò Deus O. M. vitam nobis et vires integras in tantum indulserit.*

ARITH-

IN HOC TOMO CONTINENTUR

IPSIUS NEWTONI

EDITORIS.

ARITHMETICA UNIVERSALIS

SIVE

DE COMPOSITIONE

ET

RESOLUTIONE ARITHMETICA

LIBER.

ARGUMENTA CAPITUM HUJUS LIBRI.

 cognitæ

ARITH-

ARITHMETICA UNIVERSALIS,

SIVE

DE COMPOSITIONE ET RESOLUTIONE

ARITHMETICA LIBER.

PROŒMIUM.

COMPUTATIO vel fit per *numeros*, ut in vulgari Arithmeticâ, vel per *ſpecies*, ut Analyſtis mos eſt. Utraque iiſdem innititur fundamentis, & ad eandem metam collimat: *Arithmetica* quidem definite & particulariter, *Algebraica* autem indefinitè & univerſaliter: ita ut enuntiata fere omnia quæ in hâc computatione habentur, & præſertim concluſiones, *Theoremata* dici poſſint. Verùm Algebra maximè præcellit, quòd cum in Arithmeticâ Quæſtiones tantùm reſolvantur progrediendo a datis ad quæſitas quantitates, hæc a quæſitis tanquam datis ad datas tanquam quæſitas quantitates plerumque regreditur; ut ad concluſionem aliquam, ſeu Æquationem, quocunque demum modo perveniatur, ex quâ quantitatem quæſitam elicere liceat. Eoque pacto conficiuntur difficillima Problemata, quorum reſolutiones ex Arithmeticâ ſolâ fruſtra peterentur. Arithmetica tamen Algebræ in omnibus ejus operationibus ita ſubſervit, ut non niſi unicam perfectam *computandi Scientiam* conſtituere videantur; & utramque propterea conjunctim explicabo.

Quifquis hanc Scientiam aggreditur, imprimis vocum & notarum fignificationes intelligat, & fundamentales addifcat operationes, Additionem nempe, Subductionem, Multiplicationem, Divifionem, Extractionem Radicum, Reductiones fractionum & radicalium quantitatum, & modos ordinandi terminos Æquationum, ac incognitas quantitates (ubi plures funt) exterminandi. Deinde has operationes, reducendo Problemata ad æquationes, exerceat; & ultimò naturam & refolutionem æquationum contempletur.

CAP. I.

DE VOCUM QUARUNDAM ET NOTARUM SIGNIFICATIONE.

PER *Numerum* non tam multitudinem unitatum, quàm abftractam quantitatis cujufvis ad aliam ejufdem generis quantitatem, quæ pro unitate habetur, rationem intelligimus. Eftque triplex; integer, fractus, & furdus: *Integer* quem unitas metitur, *Fractus* quem unitatis pars fubmultiplex metitur, & *Surdus* cui unitas eft incommenfurabilis [a].

Integrorum numerorum notas (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,) & notarum, ubi plures inter fe nectuntur, valores nemo non intelligit. Quemadmodum verò numeri, in primo loco ante unitatem, five ad finiftram fcripti, denotant denas unitates, in fecundo

[a] Hominibus fcilicet, qui fictas fuas rerum imagines ac notas magis quam res ipfas contemplari confueverunt, paulatim mos obrepfit, quantitates eas omnes numeros dicendi, quæ per notas numerales fignificari folent. Hinc locutiones abfonæ, doctiffimorum etiam fcriptorum ufu frequentatæ, *numerus unitate minor*, et *numerus furdus*: cum ea quidem *numeri* fit natura ut unitate major fit, utpote ex unitatum multitudine conflatus; eum *furdi* natura in eo ipfo pofita fit, ut numerus non fit, vel tanquam numerus intelligi nequeat. Melius effet dicere *quantitates fractas furdafve*; vel fi per neutra loquentes, *furda*, *fracta*, diceremus. Quorfum enim fermo rerum naturæ repugnans?

[b] Apud veteres Arithmeticos frequens eft hujufmodi fcriptura 064 ③, 732569 ③, 572083 ④. Interpretatio fatis obvia. Numeri cujuflibet propofiti tot poftremæ, dextram verfus, notæ pro decimarum notis funt habendæ, quot nota circulo inclufa indicat. Hæc autem decimarum notatio propter ambiguitatem merito rejecta eft: nimirum eum ante Vietam quantitatis incognitæ et poteftatum ejus, in operationibus algebraicis, ufitatiffima effet defignatio per notas numerales circulis inclufas; nempe hoc modo, ⓪, ①, ②, ③, &c. pro 1, x, x^2, x^3, &c. Junioribus notæ decimarum ab integrorum notis, commate vel puncto interpofito, difcriminari folent: 732,569 vel 732.569. Comma autem fuperne pofitum notarum decimalium ufque iterationem indicat. 732,569 vel 732,5694'94'. Mihi folemne eft, in numeris uti loquuntur naturalibus comma adhibere, puncto ad

ſecundo centenas, in tertio millenas, *&c.* ſic numeri in primo loco poſt unitatem ſcripti denotant decimas partes unitatis, in ſecundo centeſimas, in tertio milleſimas, *&c.* Hos autem dicimus Fractos *Decimales*, quòd in ratione decimali perpetuò decreſcant. Et ad diſtinguendum integros a decimalibus interjici ſolet comma, vel punctum, vel etiam lineola. Sic numerus 732'|569, denotat ſeptingentas triginta duas unitates, unà cum quinque decimis, ſex centeſimis, & novem milleſimis partibus unitatis. Qui & ſic 732,|569, vel ſic 732·569, vel etiam ſic 732⌊569, nonnunquam ſcribitur. Atque ita numerus 57104'2083, denotat quinquaginta ſeptem mille, centum & quatuor unitates; unà cum duabus decimis, octo milleſimis, & tribus decimis milleſimis partibus unitatis. Et numerus 0'064 denotat ſex centeſimas & quatuor milleſimas partes [b]. Surdorum & aliorum fractorum notæ in ſequentibus habentur. Notatio.

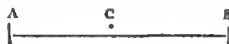
Cum rei alicujus quantitas ignota eſt vel indeterminatè ſpectatur, ita ut per numeros non liceat exprimere, ſolemus per ſpeciem *aliquam ſeu literam deſignare.* Et ſi quando cognitas quantitates tanquam indeterminatas ſpectemus, diſcriminis causâ, deſignamus initialibus Alphabetæ literis *a*, *b*, *c*, *d*, & incognitas finalibus *z*, *y*, *x*, &c. Aliqui pro cognitis ſubſtituunt conſonantes, vel majuſculas literas, & vocales, vel minuſculas, pro incognitis.

Quantitates vel Affirmativæ *ſunt ſeu majores nihilo*; *vel* Negativæ *ſeu nihilo minores* [c]. Sic in rebus humanis poſſeſſiones dici poſſunt

ad ſeparationem indicis Logarithmici a notis reliquis reſervato: eum ſcilicet in finem, ut in operationibus arithmeticis numeri naturales et logarithmi certâ aliquâ diſtinctione, oculis manifeſtâ, ſemper internoſcantur.

[c] Omnem nimirum quantitatem Arithmeticus tanquam ex aliis compoſitam conſiderare ſolet. Duplex autem compoſitionis modus, additionis alter, alter ſubductionis, hic illi contrarius. Auget enim additio, ſubductio minuit. Quantitates igitur, quæ novæ alicui procreandæ per additionem inſerviunt, affirmativæ dicuntur; negativæ quæ ſubductæ acervum minuunt: quas ob vim illam minuendi in compoſitione arithmeticâ, quaſi naturam veræ quantitatis contrariam induerent, Albertus Girardus, ni fallor, omnium primus (quem ſummum interea mathematicum agnoſco) durâ quâdam verborum figurâ, Diophanto et Vietæ prorſus ignotâ, quam vellem Carteſius et noſtrates minus avide arripuiſſent, *nihilo minores* dixit. Hinc novam, neſcio quam, nonnulli ſomniârunt quantitatis ſpeciem, cujus naturam in eo ponunt quod quantitatis notioni quam maxime repugnat. Hiſce Newtonus ſuffragari nolens, de quantitatibus numero multitudinis locutus eſt. Neque enim dicit *quantitatem* vel affirmativam eſſe, ſeu majorem nihilo, vel negativam ſeu nihilo minorem; uti omnino ei loquendum fuiſſet, ſi de partitione aliquâ univerſi generis τοῦ ποσοῦ cogitâſſet, qualem iſti cogitare exiſtimandi ſunt; ſed cum *quantitates* pluraliter dicat,

possunt bona affirmativa, debita verò bona negativa. Inque motu locali progressus dici potest motus affirmativus, & regressus motus negativus, quia prior auget & posterior diminuit iter confectum. Et ad eundem modum in Geometriâ, si linea versus plagam quamvis ducta pro affirmativâ habeatur, negativa erit quæ versus plagam oppositam ducitur. Veluti si A B dextrorsum ducatur, & B C sinistrorsum; ac A B statuatur affirmativa, tunc B C pro negativâ habebitur, eò quòd inter ducendum diminuit A B; redigitque vel ad breviorem A C; vel ad nullam, si forte C inciderit in ipsum A; vel ad minorem nullâ, [d] si B C longior fuerit quam A B de quâ aufertur. *Negativæ* quantitati designandæ signum $-$, *Affirmativæ* signum $+$ præfigi solet. Signum $\pm$ incertum est, & signum $\mp$ etiam incertum, sed priori contrarium.



In aggregato quantitatum nota + significat quantitatem suffixam esse cæteris addendam, & nota − esse subducendam. Et has notas vocabulis *plus* & *minus* exprimere solemus. Sic $2+3$, sive 2 plus 3, valet summam numerorum 2 & 3, hoc est 5. Et $5-3$, sive 5 minus 3, valet differentiam quæ oritur subducendo 3 à 5, hoc est 2. Et $-5+3$ valet differentiam quæ oritur subducendo 5 à 3, hoc est -2. Et $6-1+3$ valet 8. Item $a+b$ valet summam quantitatum a & b: Et $a-b$ valet differentiam, quæ oritur subducendo b ab a. Et $a-b+c$ valet summam istius differentiæ & quantitatis c. Puta si a sit 5; b, 2; & c, 8; tum $a+b$ valebit 7; & $a-b$, 3; & $a-b+c$, 11. Item $2a+3a$ valet $5a$. Et $3b-2a-b+3a$ valet $2b+a$; nam $3b-b$ valet $2b$ & $-2a+3a$ valet a, quorum aggregatum est $2b+a$. Et sic in aliis. Hæ autem notæ + & − dicuntur *Signa*. Et ubi neutrum initiali quantitati præfigitur signum + subintelligi debet.

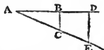
dicat, satis utique significat, quas concretas dialectici vocarent, quales Arithmetici tractare solent, eas animo sibi obversari, et technicas earum Arithmeticorum compositiones. In Arithmeticâ igitur contrariis compositionum modis voces contrariæ, affirmatio et negatio, respondent. In aliis autem omnibus quibus phrasis algebraica accommodari solet, affirmatio et negatio, neutiquam diversa rerum genera indicant, sed relationes rerum in eodem genere contrarias.

[d] Hoc est, vel magis quam ad nullam redigit: novam scilicet apponit, a puncto A sinistrorsum exporrectam, si B C longior fuerit quam A B.

MULTI-

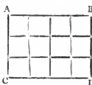
Multiplicatio propriè dicitur, quæ fit per numeros integros; utpote quærendo novam quantitatem toties majorem quantitate multiplicandâ, quoties numerus multiplicans sit major unitate. Sed, aptioris vocabuli defectu, Multiplicatio etiam dici solet, quæ fit per fractos aut surdos numeros; quærendo novam quantitatem in eâ quâcunque ratione ad quantitatem multiplicandam, quam habet multiplicator ad unitatem. Neque tantùm fit per abstractos numeros sed etiam per concretas quantitates, ut per lineas, superficies, motum localem, pondera, &c. quatenus hæ ad aliquam sui generis notam quantitatem tanquam unitatem relatæ, rationes numerorum exprimere possunt, & vices supplere. Quemadmodum si quantitas A multiplicanda sit per lineam duodecim pedum, posito quod linea bipedalis sit unitas, producentur per istam multiplicationem 6 A, sive sexies A, perinde ac si A multiplicaretur per abstractum numerum 6; siquidem 6 A sit in eâ ratione ad A, quam habet linea duodecim pedum ad unitatem bipedalem [e]. Atque ita si duas quasvis lineas AC & AD per se multiplicare oportet, capiatur AB unitas, & agatur BC eique parallela DE, & AE productum erit hujus multiplicationis, eo quod sit ad AD ut AC ad unitatem AB. Quinetiam mos obtinuit, ut genesis seu descriptio superficiei, per lineam super aliâ lineâ ad rectos angulos moventem, dicatur multiplicatio istarum linearum. Nam quàmvis linea utcunque multiplicata non possit evadere superficies, adeoque hæc superficiei e lineis generatio longè alia sit a multiplicatione, in hoc tamen conveniunt, quòd numerus unitatum in alterutrâ lineâ multiplicatus per numerum unitatum in alterâ producat abstractum numerum unitatum in superficie lineis istis comprehensâ, si modò Unitas superficialis definiatur, ut solet, Quadratum cujus latera sunt

Notatio.



[e] Sic pecuniæ pecunias nonnunquam multiplicare dicuntur, ut in quæstione illâ quæ tironibus proponi solet, quanta sit pecuniæ summa quam summa quælibet data, puta 4*l.* 19*s.* 11 $\frac{3}{4}$*d.* semet ipsa multiplicans effecerit? Hujusmodi quæstioni generaliter respondere licet, eam fore summam multiplicatione effectam, quæ ad summam propositam rationem habeat quam proposita ad unitatem nummariam. Unitatem autem nummariam in quânam nummorum specie constitutam velit, dicendum est ei qui quæstionem ponit. Potest enim ea in alio atque alio genere ad arbitrium sumi, & prout variè sumpta fuerit, aliæ atque aliæ pecuniarum summæ e multiplicatione provenient.

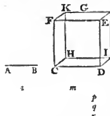
sunt unitates lineares [f]. Quemadmodum si recta AB constet quatuor unitatibus & AC tribus, tum rectangulum AD constabit quater tribus seu duodecim unitatibus quadratis, ut inspicienti Schema patebit. Estque similis analogia solidi & ejus quod continuâ trium quantitatum multiplicatione producitur. Et



hinc vicissim evenit quod vocabula *ducere*, *contentum*, *rectangulum*, *quadratum*, *cubus*, *dimensio*, *latus*, & similia quæ ad Geometriam spectant, Arithmeticis tribuantur operationibus. Nam per *quadratum*, vel *rectangulum*, vel *quantitatem duarum dimensionum* non semper intelligimus superficiem, sed ut plurimum quantitatem alterius cujuscunque generis quæ multiplicatione aliarum duarum quantitatum producitur, & sæpissime lineam quæ producitur multiplicatione aliarum duarum linearum. Atque

venient. Etenim si unam libram Anglicanam (*one pound sterling*) unitatem statueris, summa proposita, 4*l.* 19*s.* 11$\frac{3}{4}$*d.* semet ipsa multiplicans faciet 24*l.* 19*s.* 9$\frac{1}{2}$*d.* cum parte $\frac{1}{96}$ unius semioboli. Atqui si nummum argenteum (Anglice 1 *shilling*) pro unitate sumas, consimilis pecuniæ propositæ multiplicatio summam longè majorem procreabit; nempe 499*l.* 15*s.* 10*d.* cum parte $\frac{1}{48}$ unius semioboli: majorem adhuc, si denarium (Anglice *a penny*) pro unitate haberi velis; provenient enim 5997*l.* 10*s.* cum parte $\frac{1}{4}$ unius semioboli: tum vero maximam, si unitatem nummariam, in infimâ nummorum specie constitutam, uni tantum semiobolo (*a farthing*) æquaveris. Ita enim summæ propositæ in seipsam multiplicatio libras Anglicanas 23990 cum uno semiobolo fecerit: 23990*l.* 0*s.* 0$\frac{1}{4}$*d.*

[f] Parallelogramma scilicet, vel parallelepipeda æquiangularia inter se rationem habent e laterum rationibus compositam. Numeri quoque, e duobus tribusve numeris mutuâ multiplicatione facti, inter se rationem habent e rationibus numerorum, quorum multiplicationibus facti sunt, compositam. Sit igitur recta AB ad rectam CD ut unitas ad numerum quemlibet *m*. Eadem vero recta AB ad aliam rectam DE proportionem habeat quam unitas ad alium aliquem numerum *n*. Numeri autem *n*, *m*, inter se multiplicati numerum *p* faciant. Rectis autem, CD, DE, ad perpendiculum compositis rectangulum DF compleatur. Quadratum ex AB ad rectangulum DF proportionem habet ex proportionibus rectæ AB ad CD, ejusdemque AB ad DE compositam: compositam igitur e rationibus unitatis ad numerum *m*, et unitatis ad numerum *n*. Habet autem unitas ad numerum *p* rationem e rationibus unitatis ad numeros *m* et *n* compositam. Quadratum igitur ex AB ad rectangulum DF proportionem habet quam unitas ad numerum *p*. Unitas autem metitur numerum *p*. Quadratum igitur ex AB rectangulum DF toties metietur. Atque eadem erit argumentatio, quæcunque sint longitudines rectarum CD, DX, modò singulæ ad rectam AB proportionem habeant numeri alicujus ad unitatem. Quadratum utique ex AB rectangula omnia, ejusmodi rectis comprehensa, metietur, toties unumquodque, quoties unitas numerum *p* metiatur, e numeris illis, *m*, *n* factum, qui ad unitatem rationes habeant quam rectæ CD, DE, ad rectam AB. Planum rectanguli DF, in



Atque ita dicimus *Cubum* vel *Parallelepipedum*, vel *quantitatem trium dimensionum* pro eo quod binis multiplicationibus producitur, *latus* pro radice, *ducere* pro multiplicare; & sic in aliis. NOTATIO.

Numerus speciei alicui immediatè præfixus denotat speciem illam toties sumendam esse. Sic 2 *a* denotat duo *a*, 3 *b* tria *b*, 15 *x* quindecim *x*.[g]

Duæ vel plures species immediatè connexæ designant factum, *seu quantitatem quæ fit per multiplicationem omnium in se invicem.* Sic *a b* denotat quantitatem quæ fit multiplicando *a* per *b*. Et *a b x*, denotat quantitatem quæ fit multiplicando *a* per *b*, & factum illud per *x*. Puta si *a* sit 2, & *b* sit 3, & *x* sit 5, tum *a b* erit 6, & *a b x*, 30.

Inter quantitates sese multiplicantes, nota ×, vel vocabulum *in*, ad factum designandum nonnunquam interscribitur. Sic 3 × 5, vel 3 in 5, denotat 15. Sed usus harum notarum præ-

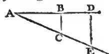
in puncto D ad perpendiculum insistat recta D I, quæ sit ad A B ut numerus quidam *q* ad unitatem. Numeri autem *p*, *q* inter se multiplicati numerum *r* faciant, et parallelepipedon D K compleatur. Cubus ex A B ad parallelepipedon D K proportionem habet ex proportionibus quadrati ex A B ad rectangulum D F, et rectæ A B ad rectam D I compositam: Compositam igitur e rationibus unitatis ad numerum *p*, et unitatis ad numerum *q*. Habet autem unitas ad numerum *r* rationem e rationibus unitatis ad numeros *p* et *q* compositam. Cubus igitur ex A B ad parallelepipedon D K proportionem babet quam unitas ad numerum *r*. Unitas autem metitur numerum *r*. Cubus igitur ex A B parallelepipedon D K toties metietur. Atque similis erit argumentatio, quæcunque demum rectæ D I longitudo sit, modo talis ea sit quæ ad rectam A B proportionem habeat numeri alicujus ad unitatem. Cubus scilicet ex A B parallelepipeda omnia rectangulo D F et rectâ D I comprehensa metietur, toties unumquodque, quoties unitas numerum illum *r* metiatur, e numeris *m*, *n*, *q* factum, qui ad unitatem rationes babeant rectarum C D, D E, D I ad rectam A B.

Hinc si scala quædam longitudinum a rectâ A B originem et initium trahat, quæ proinde illius scalæ unitas linearis dicenda est, e longitudinibus hujus scalæ ad perpendiculum compositis aliam quandam *superficierum* scalam formare licebit, quæ a quadrato rectæ A B initium sumet. Item e rectis scalæ primæ, cum rectangulis scalæ superficiariæ ad perpendiculum compositis, formari potest *solidorum* scala, quæ ab ejusdem A B cubo originem trahet. Hanc scilicet ob causam quadratum ex A B unitatis superficiariæ nomen sortietur, et cubus ex A B unitas solida quodam modo dici merebitur. Atque hâc analogiâ moti Veteres voces Geometriæ proprias *planum*, *solidum*, *quadratum*, *cubum*, malo exemplo in Arithmeticam transtulerunt, et Juniores vicissim verba Arithmetica, *multiplicare*, *dividere*, in Geometriam. Quæ tamen non ita sunt accipienda, ac si figuræ planæ et solidæ multiplicatione aliqua, quæ ne intelligi quidem potest, e lineis procreatæ essent; sed quod spatii superficiarii solidive ex datâ mensurâ aliquâ lineari æstimatio numeralis homini Arithmetico per multiplicationem ineunda sit. E contrario linearum longitudines vel superficierum planitiæ, ex datis mensuris superficiariis solidisve, per divisionem numeris definiendæ sunt.

[g] Antiqui moris erat coefficientem numeralem literæ suffigere (x 3 pro 3 x). Præpositus est, confusionis evitandæ gratiâ, ex quo Cartesius instituit notis numeralibus literæ radicali superne suffixis, (ad hunc modum: x^2. x^3. x^4.) quantitatum potestates designare, quas ante vel notâ numerali circulo inclusa designabant. (Vide not. *b*) vel vocibus curtatis, vel iteratâ quoties opus esset literâ radicali. A quad. A. cub. A. biquad. vel *aa*, *aaa*, *aaaa*, &c. pro a^2, a^3, a^4, &c.

Caput Primum. cipuus eſt, ubi compoſitæ quantitates ſeſe multiplicant. Veluti ſi $y-2b$ multiplicet $y+b$, terminos utriúſque multiplicatoris lineolâ ſuperimpoſitâ connectimus, & ſcribimus $\overline{y-2b}$ in $\overline{y+b}$, vel $\overline{y-2b}\times\overline{y+b}$.

Divisio propriè eſt quæ fit per numeros integros, quærendo novam quantitatem toties minorem quantitate dividendâ quoties unitas ſit minor Diviſore. Sed ob analogiam vox etiam uſurpari ſolet, cum nova quantitas in ratione quâcunque ad quantitatem dividendam quæritur, quam habet unitas ad diviſorem; ſive diviſor ille ſit fractus, aut ſurdus numerus, aut alia cujuſvis generis Quantitatis. Sic ad dividendum lineam AE per lineam AC, exiſtente AB unitate; agenda eſt ED parallela CB, & erit AD Quotiens. Imo & Diviſio, propter ſimilitudinem quandam, dicitur, cum rectangulum ad datam lineam tanquam Baſem applicatur, ut inde noſcatur altitudo.



Quantitas infra quantitatem cum lineolâ interjectâ denotat quotum, *ſeu quantitatem quæ oritur ex diviſione ſuperioris quantitatis per inferiorem.* Sic $\frac{6}{2}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo 6 per 2, hoc eſt 3: & $\frac{5}{8}$ quantitatem quæ oritur dividendo 5 per 8, hoc eſt octavam partem numeri 5: & $\frac{a}{b}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo a per b; puta ſi a ſit 15, & b, 3, tum $\frac{a}{b}$ denotat 5. Et ſic $\frac{ab-bb}{a+x}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo $ab-bb$ per $a+x$. Atque ita in aliis. Hujuſmodi autem quantitates *fractiones* dicuntur, parſque ſuperior *Numerator*, ac inferior *Denominator*.

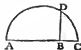
Aliquando Diviſor quantitati diviſæ, interjecto arcu, præfigitur. Sic ad deſignandum quantitatem quæ oritur ex diviſione $\frac{axx}{a+b}$ per $a-b$, ſcribi poteſt $\overline{a-b)}\frac{axx}{a+b}$.

Etſi multiplicatio per immediatam quantitatum conjunctionem denotari ſolet, tamen numerus integer ante numerum fractum denotat ſummam utriuſque. Sic $3\frac{1}{2}$ denotat tria cum ſemiſſe.

 Si

Si quantitas seipsam multiplicet, numerus factorum, compendii gratiâ, suffigi solet. Sic pro *aaa* scribimus a^3, pro *aaaa* scribimus a^4, pro *aaaaa* scribimus a^5, & pro *aabb* scribimus a^2bb vel a^2b^2. Puta si *a* sit 5, & *b* sit 2, tum a^3 erit $5 \times 5 \times 5$, sive 125; & a^4 erit $5 \times 5 \times 5 \times 5$, sive 625; atque a^2b^2 erit $5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2$, sive 500. Ubi nota, quòd numerus inter duas species immediatè scriptus, ad priorem semper pertinet. Sic 3 in quantitate a^3bb non denotat *bb* ter capiendum esse, sed *a* in se bis ducendum. Nota etiam, quòd hæ quantitates tot *dimensionum* vel *potestatum* vel *dignitatum* esse dicuntur, quot factoribus seu quantitatibus se multiplicantibus constant; & numerus suffixus vocatur *Index* potestatum vel dimensionum. Sic *aa* est duarum dimensionum vel potestatum, & a^3 trium, ut indicat suffixus numerus 3. Dicitur etiam *aa* quadratum, a^3 cubus, a^4 quadrato-quadratum, a^5 quadrato-cubus, a^6 cubo-cubus, a^7 quadrato-quadrato-cubus, & sic porro. Et quantitas *a*, ex cujus in se multiplicatione hæ potestates generantur, dicitur earum *Radix*, nempe radix quadratica quadrati *aa*, cubica cubi a^3, &c. Notatio.

Cùm autem radix per seipsam multiplicata producat quadratum, & quadratum illud iterum per radicem multiplicatum producat cubum, *&c.* erit (ex definitione Multiplicationis) ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum, & quadratum ad cubum, *&c.* Adeoque quantitatis cujuscunque *radix quadratica* erit medium proportionale inter unitatem & quantitatem illam, & *radix cubica* primum è duobus mediè proportionalibus, & *radix quadrato-quadratica* primum è tribus, & sic præterea. Duplici igitur affectione radices innotescunt, tum quòd seipsas multiplicando producant superiores potestates, tum quòd sint è mediis proportionalibus inter istas potestates & unitatem. Sic numeri 64 radicem quadraticam esse 8, & cubicam 4, vel ex eo patet, quòd 8×8, & $4 \times 4 \times 4$ valeant 64; vel quòd sit 1 ad 8 ut 8 ad 64, & 1 ad 4 ut 4 ad 16, & 16 ad 64. Et hinc si lineæ alicujus AB radix quadratica extrahenda est, produc eam ad C, ut sit BC unitas; dein super AC describe semicirculum, & ad B erige perpendiculum huic circulo occurrens in D, eritque BD radix, quia media proportionalis est inter AB & unitatem BC.



CAPUT PRIMUM.

Ad designandam radicem *alicujus quantitatis præfigi solet nota*, $\surd$, *si radix sit quadratica*, & $\surd 3$: *si sit cubica*, & $\surd 4$: *si quadrato-quadratica*, &c. Sic $\surd 64$ denotat 8; & $\surd 3: 64$ denotat 4; & $\surd aa$ denotat a; & $\surd ax$ denotat radicem quadraticam ex ax; & $\surd 3: 4axx$ radicem cubicam ex $4axx$. Ut si a sit 3, & x, 12; tum $\surd ax$ erit $\surd 36$, seu 6; & $\surd 3: 4axx$ erit $\surd 3: 1728$, seu 12. Et hæ radices, ubi non licet extrahere, dicuntur *surdæ quantitates*, ut $\surd ax$; vel *surdi numeri*, ut $\surd 12$.

Nonnulli pro designandâ quadraticâ potestate usurpant q, pro cubicâ c, pro quadrato-quadraticâ qq, pro quadrato-cubicâ, qc, &c. Et ad hunc modum pro quadrato, cubo, & quadrato-quadrato ipsius A, scribitur Aq, Ac, Aqq, &c. Et pro radice cubicâ ex $abb - x^3$ scribitur $\surd c: abb - x^3$. Alii alias notas adhibent, sed quæ jam ferè exoleverunt [h].

Nota

[h] Commodissimè autem radices designantur adhibitis indicibus fractis, Alberti Gerardi more, plerisque etiam hodie usitato. Nempe pro radice quadraticâ quantitatis ab scribere solemus $\overline{ab}|^{\frac{1}{2}}$, pro radice cubicâ quantitatis a^2b, $\overline{a^2b}|^{\frac{1}{3}}$: pro radice quadraticâ cubi quantitatis a, $a^{\frac{3}{2}}$: pro radice cubicâ quadrati quantitatis a, $a^{\frac{2}{3}}$: et similiter pro superiorum potestatum radicibus. Cujus quidem notationis ea est vis, ut cujusque sive potestatis sive radicis index locum ejus significet in perpetuâ quâdam, quæ ab unitate initium sumat, proportione convenientium serie. Sic quantitatis a^3 index ternarius significat quantitatem illam proportione convenientium tertiam post unitatem esse, quarum quantitas simplex a post unitatem prima est. Quantitatis a^5 index quinarius significat quantitatem illam quintam post unitatem esse, in eâdem proportione convenientium ulterius exporrectâ serie. Quantitatis autem $a^{\frac{1}{3}}$ index $\frac{1}{3}$ significat quantitatem illam unitati proximam, in perpetuâ quâdam proportione convenientium serie, cujus quantitas simplex a post unitatem tertia est. Quantitatis $a^{\frac{2}{3}}$ index $\frac{2}{3}$ significat quantitatem illam unitati proximam esse, in perpetuâ proportione convenientium serie, cujus tertium post unitatem locum quantitatis a potestas quadratica occupat. Denique quatitatis $a^{\frac{3}{2}}$ index $\frac{3}{2}$ significat quantitatem illam unitati proximam esse, in continuâ proportione convenientium serie, cujus secundum post unitatem locum quantitatis a potestas cubica occupat. In summâ, index radicalis $\frac{m}{n}$ significat radicem à numero n denominatam, ex potestate à numero m denominatâ, extrahendam. — Indices autem illi, sive potestatum sive radicum, Logarithmorum quodammodo fortiti sunt naturam. Etenim si pro Logarithmo rationis unitatis ad quantitatem aliquam sumatur 1, Logarithmus rationis unitatis ad potestatem illius quantitatis quadraticam binarius erit; ad cubicam ternarius; ad biquadraticam quaternarius; ad ulteriorem deoique omnem potestatem numerus potestatis illius indici æqualis. Logarithmus autem rationis unitatis ad radicem ejusdem quantitatis quadraticam erit, $\frac{1}{2}$; ad radicem cubicam $\frac{1}{3}$; ad radicem biquadraticam; $\frac{1}{4}$ ad radicem $\frac{1}{n}$, erit $\frac{1}{n}$; ad radicem $\frac{3}{2}$, erit $\frac{3}{2}$; ad radicem $\frac{2}{3}$, erit; $\frac{2}{3}$ ad radicem $\frac{m}{n}$, erit $\frac{m}{n}$. Hinc haud inepta indicis definitio erit, eum esse quantitatem illam, quæ eam ad unitatem proportionem habeat, quam Logarithmus rationis inter unitatem & quantitatem potestati vel radici indicatæ æqualem ad Logarithmum rationis inter unitatem & quantitatem simplicem, unde potestas vel radix indicata ortum duxit. Hinc indicum eadem quæ Logarithmorum erit Logidica. Hinc etiam quantitates

Nota = *designat quantitates hinc inde* æquales *esse*. Sic $x = b$ designat x æqualem esse b. Notæ.

Nota :: *significat quantitates hinc inde* proportionales *esse*. Sic $a.\ b :: c.\ d$, significat esse a ad b ut c ad d. Et $a.\ b.\ e :: c.\ d.\ f$ esse a, b & e inter se, ut sunt c, d & f inter se respectivè; vel esse a ad c, b ad d & e ad f in eâdem ratione [i].

Denique notarum, quæ ex his componuntur, interpretatio per Analogiam facilè innotescit. Sic enim $\frac{3}{4}a^3bb$ denotat tres quartas partes ipsius a^3bb; & $3\frac{a}{c}$, ter $\frac{a}{c}$; & $7\sqrt{ax}$, septies $\sqrt{ax}$. Item $\frac{a}{b}x$ denotat id quod fit multiplicando x per $\frac{a}{b}$; & $\frac{5ee}{4a+9e}Z^3$ id quod fit multiplicando Z^3 per $\frac{5ee}{4a+9e}$; hoc

tates $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ quæ, ipsâ quidem unitate ad initium scalæ Logarithmicæ constitutâ, Logarithmis negativis gaudent, indicibus etiam negativis haud incommodè exprimantur; hoc modo: a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, $a^{-\frac{1}{2}}$, $a^{-\frac{1}{3}}$. Indices autem illi negativi positivis ita scilicet respondent, ut in perpetuâ quantitatum analogiâ, æqualia quasi ab unitate locorum intervalla indices æquales, positivi negativique, significent, sed a partibus contrariis. Ut si quantitas $a^{\frac{m}{n}}$ unitate major sit, quantitas $a^{-\frac{m}{n}}$ unitate secundum eandem rationem erit minor. E diverso si quantitas $a^{\frac{m}{n}}$ unitate minor sit, erit $a^{-\frac{m}{n}}$ unitate secundum eandem rationem major. Duarum vero $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{-\frac{m}{n}}$, in utroque casu, unitas ipsa proportione media erit. Generaliter igitur, indicum æqualium affirmatio et negatio analogiæ continuationem significat, gradibus iisdem, in partes contrarias.

Ex hâc denique notatione novum quoddam irrationalium genus in notitiam venit, quæ irrationaliter irrationalia haud immeritò dicantur, indicibus nimirum surdis designata. Hujusmodi sunt $\overline{ab}|^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ $\overline{a^3b+9a^2xx}|^{\sqrt{3}}$, modo quantitates simplices a, b, x, rationales sint.

Exponatur curva Logarithmica B G D, cujus ordinata A B sit unitas, ordinata autem C D quantitati ab æquetur. In D C productâ capiatur C E = 2 A C, junctâque A E, secetur A C in puncto F, ut sit A F ad A C ut C E ad A E. Per F ducatur ordinata; quæ curvæ in G occurrat. Recta F G quantitas erit notis $\overline{ab}|^{\frac{2}{\sqrt{5}}}$ significata, quæ haud aliter, ut opinor, sub phantasiam cadit, nisi tanquam ordinata curvæ logarithmicæ, vel tanquam area hyperbolica, vel per aliquam saltem logarithmorum lineationem.

[i] Proportionum similitudines, cum exteris, sic designare soleo $a : b = c : d$ rationibus conferendis interpositâ scilicet æqualitatis, tanquam ταυτότητος notâ.

est per Quotum exortum divisione $5ee$ per $4a+9e$; & $\frac{2a^3}{9c}\sqrt{ax}$ id quod fit multiplicando $\sqrt{ax}$ per $\frac{2a^3}{9c}$; & $\frac{7\sqrt{ax}}{c}$ quotum exortum divisione $7ax$ per c; & $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ quotum exortum divisione $8a\sqrt{cx}$ per summam quantitatum $2a+\sqrt{cx}$. Et sic $\frac{3axx-x^3}{a+x}$ denotat quotum exortum divisione differentiæ $3axx-x^3$ per summam $a+x$; & $\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ radicem ejus Quoti; & $\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ id quod fit multiplicando radicem illam per summam $2a+3c$. Sic etiam $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ denotat radicem summæ quantitatum $\frac{1}{4}aa$ & bb; & $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem summæ quantitatum $\frac{1}{2}a$ & $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$; & $\frac{2a^3}{aa-zz}\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem illam multiplicatam per $\frac{2a^3}{aa-zz}$. Et sic in aliis.

Cæterùm nota, quòd in hujusmodi complexis quantitatibus, non opus est ad significationem singularum literarum semper attendere; sed sufficit in genere tantum intelligere, *e. g.* quòd $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ significat radicem aggregati $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa\times bb}$; quodcunq; tandem prodeat illud aggregatum, cùm numeri vel lineæ pro literis substituuntur. Atque ita quòd $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}a\times\sqrt{\frac{1}{4}aa\times bb}}}{a-\sqrt{ab}}$ significat quotum exortum divisione quantitatis $\sqrt{\frac{1}{2}a\times\sqrt{\frac{1}{4}aa\times bb}}$ per quantitatem $a-\sqrt{ab}$, perinde ac si quantitates illæ simplices essent & cognitæ, etsi quænam sint impræsentiarum prorsus ignoretur, & ad singularum partium constitutionem aut significationem neutiquàm attendatur. Id quod monendum esse duxi, ne complexione terminorum Tirones quasi conterriti in limine hæreant.

CAP.

CAPUT SECUNDUM.

ADDITIO.

DE ADDITIONE.

NUmerorum, ubi *non ſunt admodum compoſiti*, Additio per ſe manifeſta eſt. Sic quòd 7 & 9, ſeu 7 + 9, faciunt 16, & quòd 11 + 15 faciunt 26 primâ fronte patet. At in *magis compoſitis* opus peragitur *ſcribendo numeros ſerie deſcendente, & ſummas columnarum ſigillatim colligendo*. Quemadmodum ſi numeri 1357 & 172 addendi ſunt, ſcribe alterutrum 172 infra alterum 1357, ita ut hujus unitates 2 alterius unitatibus 7 ſubjiciantur, cæterique numeri numeris correſpondentibus, nempe deni 7 denis 5, & centenus 1 centenis 3. Tum incipiendo ad dextram, dic 2 & 7 faciunt 9; quem ſcribe infrà. Item 7 & 5 faciunt 12, cujus poſteriorem numerum 2 ſcribe infrà, priorem vero 1 aſſerva proximis numeris, 1 & 3, adjiciendum. Dic itaque prætere 1 & 1 faciunt 2, cui 3 adjectus facit 5; & ſcribe 5 infrà; & manebit tantùm 1 prima figura ſuperioris numeri, quæ etiam infrà ſcribenda eſt, & ſic habebitur ſumma 1529.

```
1357
 172
----
1529
```

Sic numeros 87899 + 13403 + 885 + 1920, quo in unam ſummam redigantur, ſcribe in ſerie deſcendente, ita ut unitates unam columnam, deni numeri aliam, centeni tertiam, milleni quartam conſtituant, & ſic præterea. Deinde dic 5 + 3 valent 8; & 8 + 9 valent 17; ſcribeque 7 infrà, & 1 adjice proximis numeris, dicendo 1 + 8 valent 9; 9 + 2 valent 11; ac 11 + 9 valent 20: Subſcriptoque 0, dic iterum ut antè, 2 + 8 valent 10; 10 + 9 valent 19; 19 + 4 valent 23; & 23 + 8 valent 31; adeoque aſſervato 3, ſubſcribe 1 ut antè; & iterum dic 3 + 1 valent 4; 4 + 3 valent 7; & 7 + 7 valent 14. Quare ſubſcribe 4, denuoque dic 1 + 1 valent 2; & 2 + 8 valnet

```
 87899
 13403
  1920
   885
------
104107
```

 lent 10; quem ultimò subscribe, & omnium summam habebis 104107.

Ad eundem modum numeri decimales adduntur ut in annexo paradigmate videre est.

630'953
51'0807
305'27
987'3037

In terminis Algebraicis Additio *fit connectendo quantitates addendas cum signis propriis, & insuper uniendo quæ possunt uniri.* Sic a & b faciunt $a+b$; a & $-b$ faciunt $a-b$; $-a$ & $-b$ faciunt $-a-b$; $7a$ & $9a$ faciunt $7a+9a$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$ faciunt $-a\sqrt{ac}+b\sqrt{ac}$, vel $b\sqrt{ac}-a\sqrt{ac}$, nam perinde est quo ordine scribantur.

Quantitates affirmativæ, quæ ex parte specierum conveniunt, uniuntur addendo numeros præfixos, quibus species multiplicantur. Sic $7a+9a$ faciunt $16a$. Et $11bc+15bc$ faciunt $26bc$. Item $3\frac{a}{c}+5\frac{a}{c}$ faciunt $8\frac{a}{c}$; & $2\sqrt{ac}+7\sqrt{ac}$ faciunt $9\sqrt{ac}$; & $6\sqrt{ab-xx}+7\sqrt{ab-xx}$ faciunt $13\sqrt{ab-xx}$. Et ad eundem modum $6\sqrt{3}+7\sqrt{3}$ faciunt $13\sqrt{3}$. Quinetiam $a\sqrt{ac}+b\sqrt{ac}$ faciunt $\overline{a+b}\sqrt{ac}$, additis nempe a & b tanquam si essent numeri multiplicantes $\sqrt{ac}$. Et sic $\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}+3a\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ faciunt $\overline{5a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$, eo quòd $2a+3c$ & $3a$ faciant $5a+3c$.

Fractiones affirmativæ quarum idem est denominator, uniuntur addendo numeratores. Sic $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ faciunt $\frac{3}{5}$; & $\frac{2ax}{b}+\frac{3ax}{b}$ faciunt $\frac{5ax}{b}$; & $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}+\frac{17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ faciunt $\frac{25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$; & $\frac{aa}{c}+\frac{bx}{c}$ faciunt $\frac{aa+bx}{c}$.

Negativæ quantitates eodem modo adduntur ac affirmativæ. Sic

Sic -2 & -3 faciunt -5; $-\frac{4ax}{b}$ & $-\frac{11ax}{b}$ faciunt $-\frac{15ax}{b}$; $-a\sqrt{ax}$ & $-b\sqrt{ax}$ faciunt $-a-b\sqrt{ax}$. Ubi verò *negativa quantitas affirmativæ adjicienda est* oportet affirmativam negativâ diminuere. Sic 3 & -2 faciunt 1; $\frac{11ax}{b}$ & $-\frac{4ax}{b}$ faciunt $\frac{7ax}{b}$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$ faciunt $\overline{b-a}\sqrt{ac}$. Et nota, quòd ubi negativa quantitas excedit affirmativam, aggregatum erit negativum. Sic 2 & -3 faciunt -1; $-\frac{11ax}{b}$ & $\frac{4ax}{b}$ faciunt $-\frac{7ax}{b}$; ac $2\sqrt{ac}$ & $-7\sqrt{ac}$ faciunt $-5\sqrt{ac}$.

In additione aut plurium aut magis compositarum quantitatum, convenit observare formam operationis suprà in additione numerorum expositam. Quemadmodum si $17ax-14a+3$, & $4a+2-8ax$, & $7a-9ax$ addendæ sunt, dispono eas in serie descendente, ita scilicet ut termini maximè affines stent in iisdem columnis. Nempe numeri 3 & 2 in unâ columnâ, species $-14a$ & $4a$ & $7a$ in aliâ columnâ, atque species $17ax$ & $-8ax$ & $-9ax$ in tertiâ. Dein terminos cujusque columnæ sigillatim addo; dicendo 2 & 3 faciunt 5; quod subscribo: dein $7a$ & $4a$ faciunt $11a$; & insuper $-14a$ facit $-3a$; quod iterum subscribo: denique $-9ax$ & $-8ax$ faciunt $-17ax$, & insuper $17ax$ facit 0. Adeoque prodit summa $-3a+5$.

$$\begin{array}{rrr} 17ax & -14a & +3 \\ -8ax & +4a & +2 \\ -9ax & +7a & \\ \hline * & -3a & +5 \end{array}$$

Eâdem methodo res in sequentibus exemplis absolvitur.

$$\begin{array}{r} 12x+7a \\ 7x+9a \\ \hline 19x+16a \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11bc+7\sqrt{ac} \\ 15bc+2\sqrt{ac} \\ \hline 26bc-5\sqrt{ac} \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\frac{4ax}{b}+6\sqrt{3+\frac{1}{5}} \\ +\frac{11ax}{b}-7\sqrt{3+\frac{2}{5}}. \\ \hline \frac{7ax}{b}-\ \sqrt{3+\frac{3}{5}} \end{array}$$

$-6xx$

$$\begin{array}{r} -6xx+\frac{3}{7}x \\ 5x^3 \quad +\frac{5}{7}x \\ \hline 5x^3-6xx+\frac{8}{7}x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} aay+2a^3-\dfrac{a^4}{2y} \\ -2ayy-4aay+\ \ a^3 \\ y^3+2ayy-\frac{1}{2}aay \qquad \\ \hline y^3 \quad * -3\frac{1}{2}aay+3a^3-\dfrac{a^4}{2y} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x^4+2ax^3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ -3x^4-2ax^3+\ \ 8\frac{1}{4}a^3\sqrt{aa+xx} \\ -2x^4+5bx^3-20\ \ a^3\sqrt{aa-xx} \\ -4bx^3-\ \ 7\frac{1}{4}a^3\sqrt{aa+xx} \\ \hline * \ +\ bx^3+\qquad a^3\sqrt{aa+xx} \\ -\ \ 20a^3\sqrt{aa-xx}. \end{array}$$

CAPUT TERTIUM.

DE SUBDUCTIONE.

NUMERORUM *non nimis compositorum* inventio etiam Differentiæ per se patet. Quemadmodum quòd 9 de 17 relinquat 8. At in *magis compositis* Subductio fieri solet *subscribendo numerum ablativum, & sigillatim auferendo figuras inferiores de superioribus*. Sic ad auferendum 63543 de 782579, subscripto 63543, dic 3 de 9 relinquit 6, quod scribe infrà: Dein 4 de 7 relinquit 3, quod pariter scribe infrà: Tum 5 de 5 relinquit 0, quod itidem subscribe: Postea 3 de 2 auferendum est: sed cùm 3 sit majus, figura 1 à proximâ figurâ 8 mutuò sumi debet, quæ unà cum 2 faciat 12; à quo auferri potest 3, & restat 9; quod insuper subscribe: Adhæc cùm præter 6 etiam 1 de 8 auferendum sit, adde 1 ad 6, & summa 7 de 8 relinquet 1; quod etiam subscribe. Denique cùm in inferiori numero nihil restet auferendum de superiori 7, subscribe etiam 7, & sic tandem habes differentiam 719036.

$$\begin{array}{r} 782579 \\ 63543 \\ \hline 719036 \end{array}$$

Cæterùm

Cæterùm omnino cavendum eſt, ut figuræ numeri ablativi ſubſcribantur in locis homogeneis; nempe unitates infra alterius numeri unitates, deni numeri infra denos, decimæ partes infra decimas, *&c.* Sicut in Additione dictum eſt. Sic ad auferendum decimalem 0'63 ab integro 547, non diſpones numeros hoc modo $\begin{smallmatrix}5 & 47\\ 0, & 63\end{smallmatrix}$; ſed ſic $\begin{smallmatrix}547 & \\ & 0,63\end{smallmatrix}$; ita nempe ut circulus, qui locum unitatum in decimali occupat, ſubjiciatur unitatibus alterius numeri. Tum, circulis in locis vacuis ſuperioris numeri ſubintellectis, dic 3 de 0 auferendum eſſe; ſed cùm nequeat, debet 1 de loco anteriori mutuò ſumi, ut 0 evadat 10; à quo 3 auferri poteſt, & dabit 7, quod infrà ſcribe. Dein illud 1 quod mutuò ſumitur, adjectum 6 facit 7, & hoc de ſuperiore 0 auferendum eſt; ſed cùm nequeat, debet iterum 1 de loco anteriori ſumi, ut 0 evadat 10; & 7 de 10 relinquet 3, quod ſimiliter infrà ſcribendum eſt. Tum illud 1 adjectum 0 facit 1, & hoc 1 de 7 relinquit 6; quod itidem ſubſcribe. Denique figuras etiam 54, ſiquidem de illis nihil amplius auferendum reſtat, ſubſcribe, & habebis reſiduum 546'37. SUBDUCTIO.

547
0'63
546'37

Exercitationis gratiâ plura, tum in integris tum in decimalibus numeris, exempla ſubjecimus.

1673	1673	458074	35'72	46,5003	308,7
1541	1580	9205	14'32	3,078	25,74
132.	93.	448869.	21'4.	43,4223.	282,96.

Siquando major numerus de minori auferendus eſt, oportet minorem de majore auferre, & reſiduo præfigere negativum ſignum. Veluti ſi auferendum ſit 1673 de 1541, è contra aufero 1541 de 1673, & reſiduo 132 præfigo ſignum −.

In terminis Algebraicis Subductio *fit connectendo quantitates, cum ſignis omnibus quantitatis ſubducendæ mutatis, & inſuper uniendo quæ poſſunt uniri,* perinde ut in Additione factum eſt. Sic $+7a$ de $+9a$ relinquit $+9a-7a$, ſive $2a$; $-7a$ de $+9a$ relinquit $+9a+7a$, ſive $16a$; $+7a$ de $-9a$ relinquit $-9a-7a$, ſive $-16a$; & $-7a$de $-9a$ relinquit $-9a+7a$, ſive $-2a$. Sic $3\frac{a}{c}$ de

$5\frac{a}{c}$ relinquit $2\frac{a}{c}$; $7\sqrt{ac}$ de $2\sqrt{ac}$ relinquit $-5\sqrt{ac}$; $\frac{3}{9}$ de $\frac{5}{9}$ relinquit $\frac{3}{9}$; $-\frac{4}{7}$ de $\frac{3}{7}$ relinquit $\frac{7}{7}$; $-\frac{2ax}{b}$ de $\frac{3ax}{b}$ relinquit $\frac{5ax}{b}$; $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ de $\frac{-17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ relinquit $\frac{-25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$; $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bx}{c}$ relinquit $\frac{bx-aa}{c}$; $a-b$ de $2a+b$ relinquit $2a+b-a+b$ ſive $a+2b$; $3az-zz+ac$ de $3az$ relinquit $3az-3az+zz-ac$ ſive $zz-ac$; $\frac{2aa-ab}{c}$ de $\frac{aa+ab}{c}$ relinquit $\frac{aa+ab-2aa+ab}{c}$ ſive $\frac{-aa+2ab}{c}$: Et $\overline{a-x}\sqrt{ax}$ de $\overline{a+x}\sqrt{ax}$ relinquit $\overline{a+x-a+x}\sqrt{ax}$ ſive $2x\sqrt{ax}$. Et ſic in aliis.

Cæterùm ubi quantitates pluribus terminis conſtant, operatio perinde ac in numeris inſtitui poteſt. Id quod in ſequentibus exemplis videre eſt.

$$\begin{array}{r} 12x+7a \\ 7x+9a \\ \hline 5x-2a \end{array} \quad . \quad \begin{array}{r} 15bc+2\sqrt{ac} \\ -11bc+7\sqrt{ac} \\ \hline 26bc-5\sqrt{ac} \end{array} \quad . \quad \begin{array}{l} 5x^3 \quad +\frac{5}{7}x \\ 6xx-\frac{3}{7}x \\ \hline 5x^3-6xx+\frac{8}{7}x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{11ax}{b}-7\sqrt{3+\frac{2}{5}} \\ \frac{4ax}{b}-6\sqrt{3-\frac{1}{5}} \\ \hline \frac{7ax}{b}-\quad\sqrt{3+\frac{3}{5}} \end{array} .$$

CAPUT

CAPUT QUARTUM.

Multiplicatio.

DE MULTIPLICATIONE.

NUMERI qui ex Multiplicatione duorum quorumvis numerorum non majorum quàm 9 oriuntur, memoriter addiscendi sunt. Veluti quod 5 in 7, facit 35; quòdque 8 in 9 facit 72, &c. Deinde majorum numerorum multiplicatio ad horum exemplorum normam instituetur.

Si 795 per 4 multiplicare oportet, subscribe 4, ut vides. Dein dic, 4 in 5 facit 20, cujus posteriorem figuram 0, scribe infrà 4, priorem vero 2 reserva in proximam operationem. Dic itaque præterea 4 in 9 facit 36, cui adde præfatum 2, & fit 38; cujus posteriorem figuram 8 ut antè subscribe, & priorem 3 reserva. Denique dic 4 in 7 facit 28 cui adde prædictum 3 & fit 31. Eoque pariter subscripto, habebitur 3180, numerus qui prodit multiplicando totum 795 per 4.

```
 795
   4
----
3180
```

Porrò si 9043 multiplicandus est per 2305, scribe alterutrum 2305 infra alterum 9043 ut antè, & multiplica superiorem 9043, primò per 5 pro more ostenso; & emerget 45215: dein per 0, & emerget 0000: tertio per 3, & emerget 27129: denique per 2, & emerget 18086. Hosque sic emergentes numeros in serie descendente ita scribe, ut cujusque inferioris ultima figura sit uno loco proprior sinistræ, quàm ultima superioris. Tandem hos omnes adde & orietur 20844115, numerus qui fit multiplicando totum 9043 per 2305.

```
    9043
    2305
--------
   45215
   0000
  27129
 18086
--------
20844115
```

Decimales numeri per integros vel per alios decimales perinde multiplicantur, ut vides in his exemplis.

72,4	50,18	3,9025
29	2,75	0,0132
6516	25090	78050
1448	35126	117075
2099,6	10036	39025
	137,9950	0,05151300

Sed nota, quòd *in prodeunte numero tot semper figuræ ad dextram pro decimalibus abscindi debent, quot sunt figuræ decimales in utroque numero multiplicante.* Et si fortè non sint tot figuræ in prodeunte numero, deficientes loci circulis adimplendi sunt, ut hîc fit in exemplo tertio.

Simplices termini Algebraici multiplicantur ducendo numeros in numeros, & species in species, ac statuendo factum Affirmativum, *si ambo factores sint affirmativi aut ambo negativi, &* Negativum *si secus.*

Sic $2a$ in $3b$, vel $-2a$ in $-3b$, facit $6ab$; vel $6ba$: Nihil enim refert quo ordine ponantur. Sic etiam $2a$ in $-3b$, vel $-2a$ in $3b$, facit $-6ab$. Et sic $2ac$ in $8bcc$ facit $16abccc$, sive $16abc^3$; & $7axx$ in $-12aaxx$ facit $-84a^3x^4$; & $-16cy$ in $31ay^3$ facit $-496acy^4$; & $-4z$ in $-3\sqrt{az}$ facit $12z\sqrt{az}$. Atque ita 3 in -4 facit -12, & -3 in -4[a] facit 12.

Fractiones multiplicantur ducendo numeratores in numeratores ac denominatores in denominatores.

Sic $\frac{2}{5}$ in $\frac{3}{7}$ facit $\frac{6}{35}$; & $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ facit $\frac{ac}{bd}$; & $2\frac{a}{b}$ in $3\frac{c}{d}$ facit $6 \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ seu $6\frac{ac}{bd}$; & $\frac{3acy}{2bb}$ in $\frac{-7cyy}{4b^3}$ facit $\frac{-21accy^3}{8b^5}$; & $\frac{-4z}{c}$ in $\frac{-3\sqrt{az}}{c}$ facit $\frac{12z\sqrt{az}}{cc}$; & $\frac{a}{b}x$ in $\frac{c}{d}xx$ facit

ac

[a] Quantitates potentiales et radicales diversarum denominationum ab eâdem quantitate simplici, adhibitis indicibus fractis, multiplicantur indicum additione: siquidem logarithmi sunt

MULTIPLICATIO.

$\frac{ac}{bd}x^3$. Item 3 in $\frac{2}{5}$ facit $\frac{6}{5}$; ut pateat, si 3 reducatur ad formam fractionis $\frac{3}{1}$, adhibendo unitatem pro Denominatore. Et sic $\frac{15aaz}{cc}$ in $2a$ facit $\frac{30a^3z}{cc}$. Unde obiter nota, quòd $\frac{ab}{c}$ & $\frac{a}{c}b$ idem valent; ut & $\frac{abx}{c}$, $\frac{ab}{c}x$, & $\frac{a}{c}bx$; nec non $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$ & $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$, & sic in aliis.

Quantitates radicales ejusdem denominationis (hoc est, si sint ambæ radices quadraticæ, aut ambæ cubicæ, aut ambæ quadrato-quadraticæ, &c.) multiplicantur ducendo terminos in se invicem sub eodem signo radicali. Sic $\sqrt{3}$ in $\sqrt{5}$ facit $\sqrt{15}$; & $\sqrt{ab}$ in $\sqrt{cd}$ facit $\sqrt{abcd}$. Et $\sqrt[3]{5ayy}$ in $\sqrt[3]{7ayz}$ facit $\sqrt[3]{35aay^3z}$. Et $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ in $\sqrt{\frac{abb}{c}}$ facit $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$, hoc est * $\frac{aab}{c}$. Et $2a\sqrt{az}$ in $3b\sqrt{az}$ facit $6ab\sqrt{aazz}$, hoc est $6aabz$. Et $\frac{3xx}{\sqrt{ac}}$ in $\frac{-2x}{\sqrt{ac}}$ facit $\frac{-6x^3}{\sqrt{aacc}}$, hoc est $\frac{-6x^3}{ac}$. Et $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$ in $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ facit $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$ k.

* Vide Cap. De Notatione.

Quantitates pluribus partibus constantes multiplicantur ducendo singulas unius partes in singulas alterius, perinde ut in Multiplicatione numerorum ostensum est. Sic $c-x$ in a facit $ac-ax$, & $aa+2ac-bc$ in $a-b$ facit $a^3+2aac-aab-3bac+bcc$. Nam $aa+2ac-bc$ in $-b$ facit $-aab-2acb+bbc$, & in a facit $a^3+2aac-abc$, quorum summa est $a^3+2aac-aab-3abc+bbc$. Hujus multiplicationis specimen, unà cum aliis consimilibus exemplis, subjectum habes.

sunt indices (vide cap. 1. not. [b]). Sic $a^2 \times a^3 = a^5$, et $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$, et $a^2 \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{3}}$, et $a^1 \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$, et $a^3 \times a^{-1} = a^2$, et $a^3 \times a^{-4} = a^{-1}$, et $a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}}$, & $a^{-\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{4}{5}} = a^{-\frac{22}{15}}$. et $a^2 \times a^3 \times a^{-5} = a^0 = 1$, et $a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{2}{3}} = a^0 = 1$.

CAPUT QUARTUM.

$$\begin{array}{r} aa + 2ac - bc \\ a - b \\ \hline - aab - 2abc + bbc \\ a^3 + 2aac - abc \\ \hline a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ab + bb \\ aa + ab \\ \hline aa + 2ab + bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline - ab - bb \\ aa + ab \\ \hline aa \quad * - bb \end{array} \qquad \begin{array}{r} yy + 2ay - \frac{1}{2}aa \\ yy - 2ay + aa \\ \hline aayy + 2a^3y - \frac{1}{2}a^4 \\ - 2ay^3 - 4aayy + a^3y \\ y^4 + 2ay^3 - \frac{1}{2}aayy \\ \hline y^4 \quad * - 3\frac{1}{2}aayy + 3a^3y - \frac{1}{2}a^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{2ax}{c} - \sqrt{\frac{a^3}{c}} \\ 3a + \sqrt{\frac{abb}{c}} \\ \hline \frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}} - \frac{aab}{c} \\ \frac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} \\ \hline \frac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} + \frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{abb}{c}} - \frac{aab}{c}. \end{array}$$

CAPUT

CAPUT QUINTUM.

DE DIVISIONE.

Divisio.

DIVISIO in numeris instituitur, quærendo quot vicibus Divisor in Dividendo continetur, totiesque auferendo, & scribendo totidem unitates in Quoto. Idque iteratò si opus est, quamdiu divisor auferri potest.

Sic ad dividendum 63 per 7, quære quoties 7 continetur in 63, & emergent 9 pro quoto præcisè; adeoque $\frac{63}{7}$ valet 9. Insuper ad dividendum 371 per 7, præfige diviforem 7, & imprimis opus instituens in initialibus figuris Dividendi proximè majoribus Divisore, nempe in 37, dic quoties 7 continetur in 37? Resp. 5. Tum, scripto 5 in Quoto, aufer 5×7, seu 35, de 37, & restabit 2; cui adnecte ultimam figuram Dividendi, nempe 1, & fit 21, reliqua pars Dividendi, in quâ proximum opus instituendum est. Dic itaque ut ante quoties 7 continetur in 21? Resp. 3. Quare scripto 3 in Quoto, aufer 3×7, seu 21, de 21, & restabit 0. Unde constat 53 esse numerum præcisè, qui oritur ex divisione 371 per 7.

```
7)371(53
  35
  --
   21
   21
   --
    0
```

Atque ita ad dividendum 4798 per 23, opus primò instituens in initialibus figuris 47, dic quoties 23 continetur in 47? Resp. 2. Scribe ergo 2 in Quoto; & de 47 subduc 2×23, seu 46, restatque 1; cui subjunge proximum numerum Dividendi, nempe 9, & fit 19 in subsequens opus. Dic itaque quoties 23 continetur in 19? Resp. 0. Quare scribe 0 in Quoto; & de 19, subduc 0×23, seu 0, & restat 19; cui subjunge ultimum numerum 8, & fit 198 in proximum opus. Quamobrem dic ultimò quoties 23 continetur in 198, (id quod ex initialibus numeris,

CAPUT QUINTUM.

2 & 19, conjici poteſt, animadvertendo quoties 2 continetur in 19)? Reſp. 8. Quare ſcribe 8 in Quoto; & de 198 ſubduc 8 × 23, ſeu 184; reſtabitque 14 adhuc dividendus per 23. Adeoque Quotus erit 208$\frac{14}{23}$. Quod ſi hujuſmodi fractio minùs placeat, poſſis Diviſionem in Fractionibus decimalibus ultrà ad libitum proſequi, ſemper adnectendo circulum numero reſiduo. Sic reſiduo 14 adnecte 0, fitque 140. Tum dic quoties 23 ſit in 140? Reſp. 6. Scribe ergo 6 in Quoto; & de 140 ſubduc 6 × 23, ſeu 138, & reſtabit 2; cui adnecte 0 ut ante. Et ſic, opere ad arbitrium continuato, emerget tandem Quotus 208,6086, &c.

```
23)4798(208,6086,&c.
   46
   --
    19
    00
    --
    198
    184
    ---
     140
     138
     ---
       20
       00
       --
       200
       184
       ---
       160
```

Ad eundum modum fractio decimalis 3,5218 per fractionem decimalem 46,1 dividitur, & prodit 0, 07639, &c. *Ubi nota, quòd in Quoto tot figuræ pro decimalibus abſcindendæ ſunt, quot ſunt in ultimo dividuo plures quàm in diviſore:* Ut in hoc exemplo quinque, quia ſex ſunt in ultimo dividuo 0,004370 & una in Diviſore 46,1.

```
46,1)3,5218(0,07639
      322,7
      -----
       2948
       2766
       ----
        1820
        1383
        ----
         4370
```

Exempla plura lucis gratiâ ſubjunximus.

```
9043)20844115(2305.
     18086
     -----
      27581
      27129
      -----
       45215
       45215
       -----
           0
```

```
72,4)2099,6(29
     1448
     ----
      6516
      6516
      ----
         0
```

50,18)

Divisio.

```
50,18)137,995(2,75.      0,0132)0,051513(3,9025
      10036                     396
      -----                     ----
      37635                     1191
      35126                     1188
      -----                     ----
       25090                      330
       25090                      264
       -----                      ---
         0                         660
                                   660
                                   ---
                                    0
```

In terminis Algebraicis Divisio fit resolvendo quicquid per multiplicationem conflatur. Sic ab divis. per a dat b pro quoto, $6ab$ div. per $2a$ dat $3b$; & div. per $-2a$ dat $-3b$. $-6ab$ div. per $2a$ dat $-3b$; & div. per $-2a$ dat $3b$. $16abc^3$ div. per $2ac$ dat $8bcc$. $-84a^3x^4$ div. per $-12aaxx$ dat $7axx$. Item $\frac{6}{35}$ div. per $\frac{2}{5}$ dat $\frac{3}{7}$. $\frac{ac}{bd}$ div. per $\frac{a}{b}$ dat $\frac{c}{d}$. $\frac{-21accy^3}{8b^5}$ div. per $\frac{3acy}{2bb}$ dat $\frac{-7cyy}{4b^3}$. $\frac{6}{5}$ div. per 3 dat $\frac{2}{5}$; & vicissim $\frac{6}{5}$ div. per $\frac{2}{5}$ dat $\frac{3}{1}$, seu 3. $\frac{30a^3z}{cc}$ div. per $2a$ dat $\frac{15aaz}{cc}$; & vicissim divis. per $\frac{15aaz}{cc}$ dat $2a$. Item $\sqrt{15}$ div. per $\sqrt{3}$ dat $\sqrt{5}$. $\sqrt{abcd}$ div. per $\sqrt{cd}$ dat $\sqrt{ab}$. $\sqrt{a^3c}$ per $\sqrt{ac}$ dat $\sqrt{aa}$, seu a. $\sqrt[3]{35aay^3z}$ div. per $\sqrt[3]{5ayy}$ dat $\sqrt[3]{7ayz}$. $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ div. per $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ dat $\sqrt{\frac{abb}{c}}$. $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$ div. per $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ce}$ dat $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$. Atque ita $\overline{a+b}\sqrt{ax}$ div. per $a+b$ dat $\sqrt{ax}$, & vicissim div. per $\sqrt{ax}$ dat $a+b$. Et $\frac{a}{a+b}\sqrt{ax}$ div. per $\frac{1}{a+b}$ dat $a\sqrt{ax}$; vel div. per a dat $\frac{1}{a+b}\sqrt{ax}$, sive $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$; & vicissim div. per $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$ dat a. Cæterùm in hujusmodi resolutionibus omninò cavendum est, ut quan-

CAPUT QUINTUM. quantitates sint ejusdem ordinis quæ ad invicem applicantur. Nempe ut numeri applicentur ad numeros, species ad species, radicales ad radicales, numeratores Fractionum ad Numeratores, ac Denominatores ad Denominatores, nec non in Numeratoribus, Denominatoribus, & Radicalibus quantitates cujusque generis ad quantitates homogeneas.

Quòd si quantitas dividenda nequeat sic per divisorem resolvi, sufficit, ubi ambæ quantitates sunt integræ, subscribere Divisorem cum lineolâ interjectâ. Sic ad dividendum ab per c, scribitur $\frac{ab}{c}$; & ad dividendum $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ per a, scribitur $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$, vel $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$. Et sic $\sqrt{ax-xx}$ divis. per $\sqrt{cx}$ dat $\frac{\sqrt{ax-xx}}{\sqrt{cx}}$, sive $\sqrt{\frac{ax-xx}{cx}}$. Et $\overline{aa+ab}\sqrt{aa-2xx}$ divis. per $\overline{a-b}\sqrt{aa-xx}$ dat $\frac{aa+ab}{a-b}\sqrt{\frac{aa-2xx}{aa-xx}}$. Et $12\sqrt{5}$ div. per $4\sqrt{7}$ dat $3\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Ubi verò fractæ sunt illæ quantitates, Duc Numeratorem Dividendæ quantitatis in Denominatorem Divisoris, ac Denominatorem in Numeratorem; & *factus prior* erit Numerator, ac *posterior* Denominator Quoti. Sic ad dividendum $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ scribitur $\frac{ad}{bc}$, multiplicato scilicet a per d, & b per c. Parique ratione $\frac{3}{7}$ divis. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{35}$: & $\frac{3a}{4c}\sqrt{ax}$ divis. per $\frac{2c}{5a}$ dat $\frac{15aa}{8cc}\sqrt{ax}$; divis. autem per $\frac{2c\sqrt{aa-xx}}{5a\sqrt{ax}}$ dat $\frac{15a^2x}{8cc\sqrt{aa-xx}}$. Et ad eundem modum $\frac{ad}{b}$ divis. per c (sive per $\frac{c}{1}$) dat $\frac{ad}{bc}$. Et c (sive $\frac{c}{1}$) divis. per $\frac{ad}{b}$ dat $\frac{bc}{ad}$. Et $\frac{3}{7}$ div. per 5 dat $\frac{3}{35}$. Et 3 div. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{5}$. Et $\frac{a+b}{c}\sqrt{cx}$ div. per a dat $\frac{a+b}{ac}\sqrt{cx}$. Et $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ div.

div. per $\frac{a}{c}$ dat $\frac{ac+bc}{a}\sqrt{cx}$. Et $2\sqrt{\frac{axx}{c}}$ divis. per $3\sqrt{cd}$ dat $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{axx}{ccd}}$; Div. autem per $3\sqrt{\frac{cd}{x}}$ dat $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{ax^3}{ccd}}$. Et $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{7}{11}}$ divis. per $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ dat $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{49}{33}}$. Et sic in aliis.

Quantitas ex pluribus terminis composita dividitur applicando singulos ejus terminos ad Divisorem. Sic $aa+3ax-xx$ divisum per a dat $a+3x-\frac{xx}{a}$. At ubi Divisor etiam ex pluribus terminis constat, divisio perinde ac in Numeris institui debet. Sic ad dividendum $a^3+2aac-aab-3abc+bbc$ per $a-b$, Dic quoties a continetur in a^3, nempe primus terminus Divisoris in primo Dividendi? Resp. aa. Quare scribe aa in Quoto, & ablato $a-b$ in aa, sive a^3-aab, de Dividendo, restabit $2aac-3abc+bbc$ adhuc dividendum. Dic itaque rursus quoties a continetur in $2aac$? Resp. $2ac$. Quare scribe etiam $2ac$ in Quoto, & ablato $a-b$ in $2ac$, sive $2aac-2abc$, de præfato Residuo, restabit etiamnum $-abc+bbc$. Quamobrem dic iterum quoties a continetur in $-abc$? Resp. $-bc$. Et proinde scribe $-bc$ in Quoto, & ablato denuo $a-b$ in $-bc$, sive $-abc+bbc$, de novissimo Residuo, restabit nihil. Quod indicat Divisionem peractam esse, prodeunte Quoto $aa+2ac-bc$

Cæterùm ut hujusmodi operationes ad formam, quâ in Divisione numerorum usi sumus, debitè reducantur, *termini tum dividendæ quantitatis tum Divisoris juxta dimensiones literæ alicujus, quæ ad hanc rem maximè idonea judicabitur, in ordine disponendi sunt*, ita nempe ut illi primum locum occupent, in quibus litera ista est plurimarum dimensionum, iique secundum in quibus dimensiones ejus ad maximas proximæ sunt; Et sic deinceps usque ad terminos qui per literam istam non omnino multiplicantur, adeoque ultimum locum occupabunt. Sic in allato Exemplo si termini ordinentur juxta dimensiones literæ a, formam operis exhibebit adjunctum Diagramma.

$$\begin{array}{l} a-b)a^3 {+2aac \atop -\ aab} -3abc+bbc(aa+2ac-bc \\ \quad\ \ \underline{a^3-\ aab} \\ \quad\ \ 0+2aac-3abc \\ \quad\quad\ \ \underline{2aac-2abc} \\ \quad\quad\quad\quad 0-\ abc+bbc \\ \quad\quad\quad\quad \underline{-\ abc+bbc} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\ 0 \quad 0 \end{array}$$

Ubi videre est quod terminus a^3, sive a trium dimensionum, occupat primum locum dividendæ quantitatis, terminique ${2aac \atop -aab}$, in quibus a est duarum dimensionum, secundum occupant, & sic præterea. Potuit etiam dividenda quantitas sic scribi; $a^3 {+2c \atop -\ b} aa-3bca+bbc$: ubi termini secundum locum occupantes uniuntur, aggregando factores literæ juxta quam fit ordinatio. Et hoc modo si termini juxta dimensiones literæ b disponerentur, opus sicut in proximo Diagrammate institui deberet: Cujus explicationem adnectere visum est.

$$\begin{array}{l} -b+a)cbb {-3ac \atop -\ aa} b {+a^3 \atop +2aac} (-cb {+2ac \atop +\ aa} \\ \quad\quad\ \ \underline{cbb-acb} \\ \quad\quad\quad 0 {-2ac \atop -\ aa} b {+a^3 \atop +2aac} \\ \quad\quad\quad\ \underline{{-2ac \atop -\ aa} b {+2aac \atop +a^3}} \\ \quad\quad\quad\quad\quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Dic quoties $-b$ continetur in cbb? Resp. $-cb$. Quare scripto $-cb$ in Quoto, aufer $-b+a$ in $-cb$, seu $bbc-acb$, & restabit in secundo loco ${-2ac \atop -\ aa}b$. Residuo huic adnecte, si placet, quantita-

tes

tes in ultimo loco, nempe $\begin{matrix} a^3 \\ +2aac \end{matrix}$; & dic iterum quoties $-b$ continetur in $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}b$? Resp. $\begin{matrix}+2ac\\+aa\end{matrix}$. Quare his in Quoto scriptis, aufer $-b+a$ in $\begin{matrix}+2ac\\+aa\end{matrix}$, seu $\begin{matrix}-2ac\\-aa\end{matrix}b\begin{matrix}+2aac\\+a^3\end{matrix}$ & restabit nihil. Unde constat divisionem peractam esse, prodeunte Quoto $-cb+2ac+aa$ ut ante.

Atque ita si dividere oportet $aay^4-aac^4+yyc^4+y^6-2y^4cc-a^6-2a^4cc-a^4yy$ per $yy-aa-cc$: Quantitates juxta literam y ad hunc modum ordino, $yy\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}\Big)y^6\begin{matrix}+aa\\-2cc\end{matrix}y^4\begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}yy\begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc.\\-aac^4\end{matrix}$ Dein Divisionem ut in subjecto Diagrammate instituo. Adjiciuntur & alia exempla, de quibus insuper observandum est, quod ubi dimensiones literæ, ad quam ordinatio fit, non in eâdem ubique progressione Arithmeticâ, sed per saltum alicubi procedunt, locis vacuis substituitur nota *

$$yy\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}\Big)y^6\begin{matrix}+aa\\-2cc\end{matrix}y^4\begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}yy\begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{matrix}\Big(y^4\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}yy\begin{matrix}+a^4\\+aacc\end{matrix}$$

$$y^6\begin{matrix}-aa\\-cc\end{matrix}y^4$$

$$o\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}y^4$$

$$\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}y^4\begin{matrix}-2a^4\\-aaccyy\\+c^4\end{matrix}$$

$$o\quad\begin{matrix}+a^4\\+aacc\end{matrix}yy$$

$$\begin{matrix}+a^4\\+aacc\end{matrix}yy\begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{matrix}$$

$$o\qquad o$$

$$a+b)aa*-bb(a-b$$

$$aa\ +ab$$

$$o\ -ab$$

$$-ab-bb$$

$$o\quad o$$

$yy-$

$$
\begin{array}{l}
yy - 2ay + aa)\quad y^4 \quad * \quad - 3\tfrac{1}{2}aayy + 3a^3y - \tfrac{1}{2}a^4 \quad (yy + 2ay - \tfrac{1}{2}aa. \\
\underline{y^4 - 2ay^3 + \quad aayy} \\
0 + 2ay^3 - 4\tfrac{1}{2}aayy \\
\underline{\quad + 2ay^3 - 4\ aayy + 2a^3y} \\
\quad 0 - \tfrac{1}{2}aayy + a^3y \\
\underline{\quad - \tfrac{1}{2}aayy + a^3y - \tfrac{1}{2}a^4} \\
\quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
aa + ab\sqrt{2} + bb)\quad a^4 \quad * \quad * \quad * \quad + b^4 \quad (aa - ab\sqrt{2} + bb \\
\underline{a^4 + a^3b\sqrt{2} + \quad aabb} \\
-a^3b\sqrt{2} - \quad aabb \\
\underline{-a^3b\sqrt{2} - 2aabb - ab^3\sqrt{2}} \\
\quad + aabb + ab^3\sqrt{2} \\
\underline{\quad + aabb + ab^3\sqrt{2} + b^4} \\
\quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

Aliqui Divifionem incipiunt ab ultimis terminis; fed eodem recidit, fi, inverfo terminorum ordine, incipiatur à prioribus. Sunt & aliæ methodi dividendi, fed facillimam & commodiffimam nôffe fufficit.

CAPUT SEXTUM.

DE EXTRACTIONE RADICUM.

CUM numeri alicujus *radix quadratica* extrahi debet, *is in locis alternis, incipiendo ab unitate, punctis notandus eft*; *Dein figura*

[1] Nefcio an vulgò notum fit, quod tamen effe Theone refero, radicis quadraticæ inquifitionem eodem prorfus modo Veteres inftituiffe. Petenda eft operationis ratio à Theoremate formationis quadrati à radice binominali: $\overline{A + B}$|quad. = A quad. + 2AB + B quad. Confimilem radicis cubicæ extractionem à Theoremate formationis cubi derivatam Arithmetici paffim tradunt. Nam eâdem quidem viâ Nicolaus Tartaglia, et Tartagliæ difcipulus Raphael Bombelli extractionum opus in gradibus etiam elatiffimis abfolvebant, operationem utique pro radice quâque peculiarem

figura in Quoto, seu Radice, scribenda, cujus quadratum figuræ vel figuris, ante primum punctum, aut æquale sit, aut proximè minus. Et ablato illo quadrato, cæteræ radicis figuræ sigillatim invenientur, dividendo residuum per duplum radicis eatenus extractæ, & singulis vicibus auferendo è residuo illo factum à figurâ novissimè prodeunte & decuplo prædicti Divisoris figurâ illâ aucti [1]. EXTRACTIO RADICUM.

Sic ad extrahendam radicem ex 99856, imprimis nota cum punctis ad hunc modum 9·98·56. Dein quære numerum, cujus quadratum æquatur primæ figuræ 9, nempe 3; scribeque in Quoto. Et de 9 ablato quadrato 3×3 seu 9, restabit o; cui adnecte figuras ante proximum punctum, nempe 98, pro sequente opere. Tum neglectâ ultimâ figurâ 8, dic quoties duplum 3, seu 6, continetur in priori 9? Resp. 1. Quare scripto 1 in Quoto, aufer factum 1×61, seu 61, de 98: restabit 37; cui adnecte ultimas figuras 56, & fiet 3756 numerus in quo opus denuo institui debet. Quare & hujus ultimâ figurâ, 6, neglectâ, dic quoties duplum 31, seu 62, continetur in 375 (id quod ex initialibus figuris 6 & 37 conjici potest, animadvertendo quoties 6 continetur in 37?) Resp. 6. Et scripto 6 in Quoto, aufer factum 6×626, seu 3756, & restabit nihil. Unde constat opus peractum esse; prodeunte Radice 316.

```
9·98·56(316
9
————
098
 61
————
 3756
 3756
————
   0
```

Atque ita si radicem ex 22178791 extrahere oportet, imprimis factâ punctatione, quære numerum cujus quadratum (siquidem id nequeat æquari) sit proximè minus figuris 22 antecedentibus primum punctum, & invenies esse 4. Nam 5×5, sive 25, major est quam 22, & 4×4, sive 16, minor. Quare 4 erit pri-

liarem ordinando secundum theorema, quod vocant, syntheticum potestatis homologæ. Atque horum vestigiis insistens Franciscus Vieta potestatum utcunque affectarum resolutiones similibus operationibus expediebat. Praxin Tartaglianam miro quodam acumine inventam, ordine luculento eximiâ praeceptorum perspicuitate et elegantiâ à Vietâ traditam, Harrioto et Oughtredo summopere excultam, licet ob immensum in gradibus ultra-cubicis computationum laborem, evulgatis Newtoni inventis, brevi exoleverit, nihilominus sedulo velim edifeat siquis in hisce disciplinis perfectus esse velit. Siquidem in omni scientiarum genere, nôsse quibus gradatim incrementis adoleverint, per se scitu jucundissimum est, et ad rerum ipsarum intelligentiam plurimum confert.

CAPUT SEXTUM.

ma figura radicis. Et hâc itaque in Quoto ſcriptâ, de 22 aufer quadratum 4×4, ſeu 16; reſiduoque 6 adjunge deſuper proximas figuras 17, & habebitur 617; cujus diviſione per duplum 4 elicienda eſt ſecunda figura radicis. Nempe, neglectâ ultimâ figurâ 7, dic quoties 8 continetur in 61? Reſp. 7. Quare ſcribe 7 in Quoto, & de 617 aufer factum 7 in 87, ſeu 609; & reſtabit 8, cui adjunge proximas duas figuras 87, & habebitur 887; cujus diviſione per duplum 47, ſeu 94, elicienda eſt tertia figura. Utpote dic quoties 94 continetur in 88? Reſp. 0. Quare ſcribe 0 in quoto, adjungeque ultimas duas figuras 91, & habebitur 88791, cujus diviſione per duplum 470, ſeu 940, elicienda eſt ultima figura. Nempe dic quoties 940 continetur in 8879? Reſp. 9. Quare ſcribe 9 in Quoto, & radicem habebis 4709.

```
22·17·87·91(4709,43637 &c.
16
617
609
 88791
 84681
   4110.00
   3767 36
    3426400
    2825649
     60079100
     56513196
      356190400
      282566169
       73624231
```

Cæterùm cùm factus 9×9409, ſeu 84681, ablatus de 88791 relinquat 4110, id indicio eſt numerum 4709 non eſſe radicem numeri 22178791 præciſe, ſed eâ paulo minorem exiſtere. Et in hoc caſu, aliiſque ſimilibus, ſi veram radicem magis appropinquare placeat, proſequenda eſt operatio in decimalibus numeris, adnectendo ad reſiduum circulos duos in ſingulis operationibus. Sic reſiduum 4110, adnexis circulis, evadit 411000; cujus diviſione per duplum 4709, ſeu 9418, elicietur figura prima decimalis, nimirum 4. Dein ſcripto 4 in Quoto, aufer 4×94184, ſeu 376736, de 411000, & reſtabit 34264. Atque ita adnexis iterum duobus circulis, opus pro lubitu continuari poteſt, prodeunte tandem radice 4709,43637, &c.

Ubi

Ubi vero radix ad medietatem, aut ultra, extracta eſt, cæteræ figuræ per diviſionem ſolam obtineri poſſunt. Ut in hoc exemplo, ſi radicem ad uſque novem figuras extrahere animus eſſet, poſtquam quinque priores 4709,4 extractæ ſunt, quatuor poſteriores 3637 elici poſſent dividendo reſiduum 34264 per duplum 4709,4. EXTRACTIO RADICUM.

Et ad hunc modum ſi radix ex 32976 ad uſque quinque figuras extrahi debet; poſtquam figuræ punctis notantur, ſcribe 1 in Quoto, utpote cujus quadratum 1 × 1, ſeu 1, maximum eſt quod in 3, figurâ primum punctum antecedente, continetur. Ac de 3 ablato quadrato illo 1, reſtabit 2. Dein huic, 2, annexis proximis figuris, 29, quære quoties duplum 1, ſeu 2, continetur in 22, & invenies quidem pluſquam 10: ſed nunquam licet diviſorem vel decies ſumere, imo neque novies in hoc caſu, quia factus 9 × 29, ſive 261, major eſt quàm 229, unde deberet auferri. Quare pone tantùm 8. Et perinde ſcripto 8 in Quoto, & ablato 8 × 28, ſive 224, reſtabit 5. Huic inſuper annexis figuris 76, quære quoties duplum 18, ſeu 36, continetur in 57, & invenies 1; adeoque ſcribe 1 in Quoto; ac de 576 ablato 1 × 361, ſeu 361, reſtabit 215. Denique, ad cæteras figuras eliciendas, divide hunc 215 per duplum 181, ſeu 362, & exibunt figuræ 59; quibus etiam ſcriptis in Quoto, habebitur Radix 181,59.

```
3·29·76(181,59
1
———
229
224
———
 576
 361
———
362)215(59
```

Eâdem methodo radices etiam è decimalibus numeris extrahuntur. Sic ex 329,76 radix eſt 18,159. Et ex 3,2976 radix eſt 1,8159. Et ex 0,032976 radix eſt 0,18159. Et ſic præterea. Sed ex 3297,6 radix eſt 57,4247. Et ex 32,976 radix eſt 5,74247. Atque ita ex 9,9856 radix eſt 3,16. Sed ex 0,99856 radix eſt 0,999279, *&c.* Quemadmodum è ſubjectis Diagrammis conſtare poteſt.

32·97;6(57,4247, &c.	0;99·85·6(0,999279, &c.
25	81
797	1885
749	1701
4860	18460
4576	17901
1148) 284(247	1998) 559 (279

Extractionem radicis cubicæ, & aliarum omnium, regulâ generali comprehendam, praxi potiùs intellectu facili quàm expeditæ consulens, ne moram in eâ quod raró usu veniet, discentibus inferam. *Nimirum* tertia *quæque figura, incipiendo ab unitate, primò punctis notanda est, si radix sit* cubica; *aut unaquæque* quinta *si sit* quadrato-cubica, *&c. Dein figura in Quoto scribenda est, cujus maxima potestas (hoc est* cubica *si radix sit* cubica, *aut* quadrato-cubica *si radix sit* quadrato-cubica, *&c.) aut æquetur figuræ vel figuris ante primum punctum, aut proximè minor sit. Et ablatâ illâ potestate, figura proxima elicietur, dividendo residuum, proximâ numeri resolvendi figurâ auctum, per potestatem Quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ potestatis, hoc est, per* triplum Quadratum *Quoti si radix sit* cubica, *aut per* quintuplum quadrato-quadratum *si radix sit* quadrato-cubica, *&c. Rursusque à numero resolvendo ablatâ maximâ Quoti potestate, figura tertia invenietur, dividendo residuum illud, proximâ numeri resolvendi figurâ auctum, per potestatem Quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ potestatis.* Et sic in infinitum.

Sic ad extrahendam radicem cubicam ex 13312053, numerus ille primò punctis ad hunc modum 13·312·053 notandus est. Deinde in Quoto scribenda est illa figura 2, cujus cubus 8, siqui-

dem

Extractio Radicum.

dem æquari nequeat, proximè minor sit figuris 13 antecedentibus primum punctum. Et ablato illo cubo restabit 5; quod proximâ numeri resolvendi figurâ 3 auctum, & per triplum quadratum quoti 2 divisum (quærendo nempe quoties 3 × 4, seu 12, continetur in 53) dat 4 pro secundâ figurâ Quoti. Sed cùm Quoti, 24, prodiret cubus 13824 major quàm qui auferri posset de figuris 13312 antecedentibus secundum punctum, scribi debet tantùm 3 in Quoto. Tum Quotus 23, in chartâ aliquâ seorsim per 23 multiplicatus, dat quadratum 529; quod iterum per 23 multiplicatum dat cubum 12167; & hic de 13312 ablatus relinquit 1145; quod proximâ resolvendi numeri figurâ o auctum, & per triplum quadratum Quoti 23 divisum (quærendo nempe quoties 3 × 529, seu 1587, continetur in 11450) dat 7 pro tertiâ figurâ Quoti. Tum Quotus 237 per 237 multiplicatus dat quadratum 56169; quod iterum per 237 multiplicatum dat cubum 13312053; & hic de resolvendo numero ablatus relinquit nihil. Unde patet radicem quæsitam esse 237.

```
           13'312'053 (237
aufer cub. 8
   12) restat 53 (4. aut 3.
      aufer c. 12167
 1587) restat 11450(7.
      aufer c. 13312053
               restat o
```

Atque ita ad extrahendam radicem quadrato-cubicam ex 364'30820, punctum ponitur ad quintam figuram; & figura 3, cujusquadrato-cubus, 243, proximè minor est figuris 364 antecedentibus punctum istud, scribitur in Quoto. Dein quadrato-cubo 243 de 364 ablato, restat 121; quod proximâ resolvendi numeri figurâ 3 auctum, & per quinquies quadrato-quadratum Quoti divisum (quærendo nempe quoties 5 × 81, seu 405, continetur in 1213) dat 2 pro secundâ figurâ. Quotus ille, 32, in se ter ductus efficit quadrato-quadratum 1048576, & hoc iterum in 32 ductum efficit quadrato-cubum 33554432; qui à numero resolvendo ablatus relinquit 2876388. Itaque 32 est

```
          364'30820 (32,5
          243
     405) 1213 (2
          33554432
 5242880) 2876388,0 (5
```

eſt integra pars radicis, ſed non juſta radix; & proinde ſi opus in decimalibus numeris proſequi animus eſt, reſiduum circulo auctum dividi debet per quinquies prædictum quadrato-quadratum Quoti, quærendo quoties 5×1048576 ſeu 5242880 continetur in $2876388,0$; & prodibit tertia figura, ſive prima decimalis, 5. Atque ita auferendo quadrato-cubum Quoti $32,5$ de numero reſolvendo, ac dividendo reſiduum per quinquies quadrato-quadratum ejus, erui poteſt quarta figura. Et ſic in infinitum.

Cum radix quadrato-quadratica extrahenda eſt, oportet bis extrahere radicem quadraticam, eo quod $\sqrt{}^{4}$ *valeat* $\sqrt{}^{2\times 2}$. *Et cum radix cubo-cubica extrahenda eſt, oportet extrahere radicem cubicam, & ejus radicis radicem quadraticam, eo quod* $\sqrt{}^{6}$ *valeat* $\sqrt{}^{2\times 3}$: *unde aliqui radices baſce non cubo-cubicas ſed quadrato-cubicas dixêre.* Et idem in aliis radicibus, quarum indices non ſunt numeri primi, òbſervandum eſt.

E ſimplicibus quantitatibus Algebraicis extractio radicum ex ipsâ Notatione patet. Quemadmodum quòd $\sqrt{aa}$ ſit a, & quòd $\sqrt{aacc}$ ſit ac, & quòd $\sqrt{9aacc}$ ſit $3ac$, & quòd $\sqrt{49a^4xx}$ ſit $7aax$. Atque ita quòd $\sqrt{\frac{a^4}{cc}}$, ſeu $\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{cc}}$, ſit $\frac{aa}{c}$; & quòd $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ ſit $\frac{aab}{c}$; & quòd $\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ ſit $\frac{3az}{5b}$; & quòd $\sqrt{\frac{4}{9}}$ ſit $\frac{2}{3}$. Et quòd $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{27a^3}}$ ſit $\frac{2bb}{3a}$. Et quòd $\sqrt[4]{aabb}$ ſit $\sqrt{ab}$. Quinetiam quòd $b\sqrt{aacc}$, ſeu b in $\sqrt{aacc}$, valeat b in ac, ſive abc. Et quòd $3c\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ valeat $3c \times \frac{3az}{5b}$ ſive $\frac{9acz}{5b}$. Et quòd $\frac{a+3x}{c}\sqrt{\frac{4bbx^4}{81aa}}$ valeat $\frac{a+3x}{c} \times \frac{2bxx}{9a}$ ſive $\frac{2abxx+6bx^3}{9aa}$.

Hæc inquam patent, ſiquidem propoſitas quantitates è radicibus in ſe ductis produci (ut aa ex a in a, $aacc$ ex ac in ac, $9aacc$ ex $3ac$ in $3ac$, &c.) primâ fronte conſtare poteſt. Ubi verò quantitates pluribus terminis conſtant, opus perinde ac in numeris abſolvitur. Sic ad extrahendam radicem quadraticam

EXTRACTIO RADICUM.

ex $aa+2ab+bb$, imprimis radicem primi termini aa, nempe a, ſcribe in Quoto. Et ablato ejus quadrato $a\times a$, reſtabit $2ab+bb$ pro eliciendâ reliquâ parte radicis. Dic itaque quoties duplum quoti, ſeu $2a$, continetur in primo reſidui termino $2ab$? Reſp. b. Adeoque ſcribe b in Quoto, & ablato facto b in $\overline{2a+b}$, ſeu $2ab+bb$, reſtabit nihil. Quod indicat opus peractum eſſe, prodeunte radice $a+b$.

$$\begin{array}{l} aa+2ab+bb(a+b \\ \underline{aa} \\ 0 \quad \underline{2ab+bb} \\ \qquad 0 \quad 0 \end{array}$$

Et ſic ad extrahendam radicem ex $a^4+6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4$, imprimis pone in Quoto radicem primi termini a^4 nempe aa, & ablato ejus quadrato $aa\times aa$, ſeu a^4, reſtabit $6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4$ pro reliquâ radice eliciendâ. Dic itaque quoties $2aa$ continetur in $6a^3b$? Reſp. $3ab$. Quare ſcribe $3ab$ in Quoto: & ablato facto $3ab$ in $\overline{2aa+3ab}$, ſeu $6a^3b+9aabb$, reſtabit etiamnum $-4aabb-12ab^3+4b^4$ pro opere proſequendo.

$$\begin{array}{l} a^4+6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4(aa+3ab-2bb \\ \underline{a^4} \\ 0 \\ \qquad \underline{6a^3b+9aabb} \\ \qquad\quad 0-4aabb \\ \qquad\quad \underline{-4aabb-12ab^3+4b^4} \\ \qquad\qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \end{array}$$

Adeoque dic iterum quoties duplum Quoti, nempe $2aa+6ab$ continetur in $-4aabb-12ab^3$; ſive, quod perinde eſt, dic quoties duplum primi termini Quoti, ſeu $2aa$, continetur in primo reſidui termino $-4aabb$? Reſp. $-2bb$. Et proinde ſcripto $-2bb$ in Quoto, & ablato facto $-2bb$ in $2aa+6ab-2bb$, ſeu $-4aabb-12ab^3+4b^4$, reſtabit nihil. Unde conſtat radicem eſſe $aa+3ab-2bb$.

Atque ita quantitatis $xx-ax+\frac{1}{4}aa$ radix eſt $x-\frac{1}{2}a$; & quantitatis y^4+4y^3-8y+4 radix $yy+2y-2$; & quantitatis $16a^4-24aaxx+9x^4+12bbxx-16aabb+4b^4$ radix $3xx-4aa+2bb$, ut è ſubjectis diagrammis conſtare poteſt.

$xx-$

CAPUT SEXTUM.

$$\begin{array}{l} xx-ax+\tfrac{1}{4}aa(x-\tfrac{1}{2}a. \\ xx \\ \hline 0 \\ \quad -ax+\tfrac{1}{4}aa \\ \hline \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9x^4 \begin{matrix}-24aa\\+12bb\end{matrix} xx \begin{matrix}+16a^4\\-16aabb\\+4b^4\end{matrix} (3xx \begin{matrix}-4aa\\+2bb\end{matrix} \\ 9x^4 \\ \hline 0 \\ \quad \begin{matrix}-24aa\\+12bb\end{matrix} xx \begin{matrix}+16a^4\\-16aabb\\+4b^4\end{matrix} \\ \hline \quad 0 \qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y^4+4y^3 * -8y+4(yy+2y-2 \\ y^4 \\ \hline 0 \\ \quad 4y^3+4yy \\ \hline \quad 0-4yy \\ \quad\; -4yy-8y+4 \\ \hline \qquad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Si radicem cubicam ex $a^3+3aab+3abb+b^3$ oportet extrahere, operatio eſt hujuſmodi. Extrahe radicem cubicam primi

$$\begin{array}{l} a^3+3aab+3abb+b^3(a+b. \\ a^3 \\ 3aa)0+3aab(b \\ \hline a^3+3aab+3abb+b^3 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

termini a^3 nempe a, & pone in Quoto. Tum ablato ejus cubo a^3, dic quoties triplum quadratum ejus, ſeu $3aa$, continetur in proximo reſidui termino $3aab$; & prodit b. Quare ſcribe etiam b in Quoto, & cubo Quoti $a+b$ ablato reſtabit nihil. Radix itaque eſt $a+b$.

Eodem modo radix cubica, ſi extrahatur ex $z^6+6z^5-40z^3+96z-64$, prodit $zz+2z-4$. Atque ita in altioribus radicibus.

2 De

CAPUT SEPTIMUM.

DE REDUCTIONE FRACTIONUM ET RADICALIUM.

PRæcedentibus operationibus inſervit reductio fractarum & radicalium quantitatum, idque vel ad minimos terminos vel ad eandem denominationem.

S E C T. I.

De REDUCTIONE FRACTIONUM *ad minimos terminos.*

DEDUCTIO FRACTIONUM.

F*Ractiones ad minimos terminos reducuntur dividendo numeratores ac denominatores per maximum communem diviſorem.* Sic fractio $\frac{aac}{bc}$ reducitur ad ſimpliciorem, $\frac{aa}{b}$, dividendo utrumque aac & bc per c; & $\frac{203}{667}$ reducitur ad ſimpliciorem, $\frac{7}{23}$, dividendo utrumque 203 & 667 per 29; & $\frac{203aac}{667bc}$ reducitur ad $\frac{7aa}{23b}$ dividendo per $29c$. Atque ita $\frac{6a^3-9acc}{6aa+3aa}$ evadit $\frac{2aa-3cc}{2a+c}$ dividendo per $3a$. Et $\frac{a^3-aab+abb-b^3}{aa-ab}$ evadit $\frac{aa+bb}{a}$ dividendo per $a-b$.

Et hàc Methodo termini poſt Multiplicationem vel Diviſionem plerumque abbreviari poſſunt. Quemadmodum ſi multiplicare oportet $\frac{2ab^3}{3ccd}$ per $\frac{9acc}{bdd}$, vel id dividere per $\frac{bdd}{9acc}$, prodibit $\frac{18aab^3cc}{3bccd^3}$, & per reductionem $\frac{6aabb}{d^3}$. Sed in hujuſmodi caſibus præſtat ante operationem concinnare terminos, dividendo per maximum communem diviſorem, quos poſtea dividere oporteret. Sic in allato exemplo, ſi dividam $2ab^3$ & bdd per communem diviſorem b, & $3ccd$ ac $9acc$ per communem diviſorem $3cc$; emerget fractio $\frac{2abb}{d}$ multiplicanda per $\frac{3a}{dd}$, vel dividenda per $\frac{dd}{3a}$, prodeunte tandem $\frac{6aabb}{d^3}$ ut ſupra. Atque ita $\frac{aa}{c}$ in $\frac{c}{b}$ evadit $\frac{aa}{1}$ in $\frac{1}{b}$, ſeu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{aa}{c}$ diviſ. per $\frac{b}{c}$ evadit aa diviſ. per b, ſeu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{a^3-axx}{xx}$ in $\frac{cx}{aa+ax}$ evadit $\frac{a-x}{x}$ in $\frac{c}{1}$, ſeu $\frac{ac}{x}-c$. Et 28 diviſ. per $\frac{7}{3}$ evadit 4 diviſ. per $\frac{1}{3}$, ſeu 12.

S E C T.

SECT. II.

DE INVENTIONE DIVISORUM.

HUC spectat inventio divisorum, per quos quantitas aliqua dividi possit. *Si quantitas simplex est, divide eam per minimum ejus divisorem, & quotum per minimum divisorem ejus, donec quotus restet indivisibilis, & omnes quantitatis divisores primos habebis. Dein horum divisorum singulos binos, ternos, quaternos,* &c. *duc in se, & habebis etiam omnes divisores compositos.* Ut si numeri 60 divisores omnes desiderentur, divide eum per 2, & quotum 30 per 2, & quotum 15 per 3, & restabit quotus indivisibilis 5. Ergo divisores primi sunt 1,2,2,3,5 : ex binis compositi 4,6,10,15 : ex ternis 12,20,30; ex omnibus 60. Rursus si quantitatis $21abb$ divisores omnes desiderentur, divide eam per 3, & quotum $7abb$ per 7, & quotum abb per a, & quotum bb per b, & restabit quotus primus b. Ergo divisores primi sunt $1,3,7,a,b,b$; ex binis compositi 21 $3a$, $3b$, $7a$, $7b$, ab, bb; ex ternis $21a$, $21b$, $3ab$, $3bb$, $7ab$, $7bb$, abb; ex quaternis $21ab$, $21bb$, $3abb$, $7abb$; ex quinis $21abb$. Eodem modo ipsius $2abb-6aac$ divisores omnes sunt $1, 2, a, bb-3ac, 2a, 2bb-6ac, abb-3aac, 2abb-6aac$.

Si quantitas postquam divisa est per omnes simplices divisores manet composita, & suspicio est eam compositum aliquem divisorem habere, dispone eam secundum dimensiones literæ alicujus quæ in eâ est; & pro literâ illâ substitue sigillatim tres vel plures terminos hujus progressionis Arithmeticæ, 3, 2, 1, 0, −1, −2, *ac terminos totidem resultantes, unà cum omnibus eorum divisoribus, statue è regione correspondentium terminorum progressionis, positis divisorum signis tàm affirmativis quàm negativis. Dein è regione etiam statue progressiones arithmeticas, quæ per omnium numerorum divisores percurrunt, pergentes à majoribus terminis ad minores eodem ordine quo termini progressionis* 3, 2, 1, 0, −1, −2 *pergunt, & quarum termini differunt vel*

unitate,

unitate, vel numero aliquo, qui dividit altissimum terminum propositæ quantitatis. Siqua occurrit ejusmodi progressio, iste terminus ejus qui stat è regione termini 0 *progressionis primæ, divisus per differentiam terminorum, & cum signo suo annexus literæ præfatæ, componet quantitatem per quam divisio tentanda est.* INVENTIO DIVISORUM.

Ut si quantitas sit $x^3 - xx - 10x + 6$, pro x substituendo sigillatim terminos progressionis 1, 0, − 1, orientur numeri − 4, 6, + 14 quos, cum omnibus eorum divisoribus, colloco è regione terminorum progressionis 1, 0, − 1 hoc modo. Dein quoniam altissimus terminus x^3 per nullum numerum præter unitatem divisibilis est; quæro in divisoribus progressionem, cujus termini differunt unitate, &c, à superioribus ad inferiora pergendo, decrescunt, perinde ac termini progressionis lateralis 1, 0, − 1. Et hujusmodi progressionem unicam tantùm invenio, nempe 4, 3, 2, cujus itaque terminum + 3 seligo, qui stat è regione termini 0 progressionis primæ 1, 0, − 1, tentoque divisionem per $x + 3$: et res succedit, prodeunte $xx - 4x + 2$.

1	4	1.2.4.	+ 4.
0	6	1.2.3.6	+ 3.
− 1	14	1.2.7.14	+ 2.

Rursus si quantitas sit $6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20$, pro y substituo sigillatim 2, 1, 0, − 1, − 2; & numeros resultantes 30, 7, 20, 3, 34, cum omnibus eorum divisoribus, è regione colloco, ut sequitur: et in divisoribus hanc solam esse animadverto decrescentem progressionem arithmeticam, + 10, + 7, + 4, + 1, − 2. Hujus terminorum differentia, 3, dividit altissimum quantitatis terminum, $6y^4$. Quare terminum + 4, qui stat è regione termini 0, divisum per differentiam terminorum, 3, adjungo literæ y, tentoque divisionem per $y + \frac{4}{3}$, vel, quod perinde est, per $3y + 4$; & res succedit prodeunte $2y^3 - 3yy - 3y + 5$.

2	30	1.2.3.5.6.10.15.30	+ 10.
1	7	1.7	+ 7.
0	20	1.2.4.5.10.20	+ 4.
− 1	3	1.3	+ 1.
− 2	34	1.2.17.34	− 2.

Atque ita si quantitas sit $24a^5 - 50a^4 + 49a^3 - 140aa + 64a + 30$; operatio erit ut sequitur. Tres occurrunt hîc progressiones, quarum termini, − 1. − 5. − 5, divisi per differentias terminorum 2, 4, 6, dant tres divisores tentandos, $a - \frac{1}{2}$,

2	42	1.2.3.6.7.14.21.42.	+ 3. + 3. + 7.
1	23	1.23.	+ 1. − 1. + 1.
0	30	1.2.3.5.6.10.15.30.	− 1. − 5. − 5.
− 1	297	1.3.9.11.27.33.99.297.	− 3. − 9. − 11.

CAPUT SEPTIMUM. $a-\frac{1}{2}$, $a-\frac{5}{4}$ & $a-\frac{5}{6}$. Et divisio per ultimum divisorem, $a-\frac{5}{6}$, seu $6a-5$, succedit, prodeunte $4a^4-5a^3+4aa-20a-6$.

Si nullus occurrit hâc methodo divisor, vel nullus qui dividit propositam quantitatem, concludendum erit quantitatem illam non admittere divisorem unius dimensionis. Potest tamen fortasse, si plurium * sit quàm trium dimensionum, divisorem admittere duarum. Et si ita, divisor ille investigabitur hâc methodo. *In quantitate illâ pro literâ substitue, ut antè, quatuor vel plures terminos progressionis hujus*, 3, 2, 1, 0, − 1, − 2, − 3. *Divisores omnes numerorum resultantium sigillatim adde & subduc quadratis correspondentium terminorum progressionis illius ductis in divisorem aliquem numeralem altissimi termini quantitatis propositæ, & summas differentiasque è regione progressionis colloca. Dein progressiones omnes collaterales nota, quæ per istas summas differentiasque percurrunt. Sit* ± C *terminus istiusmodi progressionis, qui stat è regione termini* 0 *progressionis primæ*; ± B *differentia quæ oritur subducendo* ± C *de termino proximè superiori, qui stat è regione termini* 1 *progressionis primæ*; A *prædictus termini altissimi divisor numeralis*, & l *litera quæ in quantitate propositâ est*; & *erit* A ll ± B l ± C *divisor tentandus*.

Ut si quantitas proposita sit $x^4-x^3-5xx+12x-6$, pro x scribo successivè 3, 2, 1, 0, − 1, − 2; & prodeuntes numeros, 39, 6, 1, − 6, − 21, − 26, unà cum eorum divisoribus, è regione dispono; addoque & subduco divisores terminis progressionis illius quadratis ductisque in divisorem numeralem termini x^4 qui unitas est, *viz.* terminis 9,4,1,0,1,4; & summas differentiasque è latere pariter dispono. Dein progressiones, quæ in iisdem obveniunt, è latere etiam scribo, ut sequitur. Harum progressionum terminos, 2 & − 3, qui stant è regione termini 0 progressionis illius quæ in columnâ primâ est, usurpo successive pro ± C. Differentias, quæ oriuntur subducendo hos terminos de terminis superioribus, 0 & 0, nempe − 2 & + 3, usurpo respectivè

3	39	1.3.13.39.	9	− 30. − 4.6.8.10.12.22.48.	− 4.	6.
2	6	1.2. 3. 6.	4	− 2.1.2.3.5. 6. 7. 10.	− 2.	3.
1	1	1.	1	0. 2.	0.	0.
0	6	1.2. 3. 6.	0	− 6. − 3. − 2. − 1.1.2.3.6.	2.	− 3.
− 1	21	1.3. 7.21.	1	− 20. − 6. − 2.0.2.4. 8.22.	4.	− 6.
− 2	26	1.2.13.26.	4	− 22. − 9.2.3.5.6.17.30.	6.	− 9.

* Rectè quidem *plurium*. Nam si quantitas trium dimensionum divisorem aliquem duarum dimensionum admitteret, omnino unius admitteret. Quotus enim, qui oritur ex divisione quantitatis

tivè pro $\pm B$. Unitatem item pro A; & x pro l. Et ſic pro $All \pm Bl \pm C$ habeo diviſores duos tentandos, $xx + 2x - 2$, & $xx - 3x + 3$; per quorum utrumque res ſuccedit. Inventio Diviſorum.

Rurſus ſi proponatur quantitas $3y^5 - 6y^4 + y^3 - 8yy - 14y + 14$, operatio erit ut ſequitur. Primò rem tento addendo & ſubducendo diviſores quadratis terminorum progreſſionis 2, 1, 0, 1 uſurpato 1 pro A; ſed res non ſuccedit. Quare pro A uſurpo 3, alterum nempe termini altiſſimi $3y^5$ diviſorem numeralem, &

3	170		27		−7. 17
2	38	1.2.19.38.	12	−26.−7.10.11.13.14.31.50.	−7. 11
1	10	1.2. 5.10.	3	− 7.−2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	−7. 5
0	14	1.2. 7.14.	0	−14.−7.−2.−1.1.2.7.14.	−7.− 1
−1	10	1.2. 5.10.	3	− 7.−2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	−7.− 7
−2	190		12		−7.−13

quadratis iſtis multiplicatis per 3, hoc eſt numeris 12, 3, 0, 3, addo ſubducoque diviſores; & progreſſiones in terminis reſultantibus haſce duas invenio, − 7, − 7, − 7, − 7; & 11, 5, − 1, − 7. Expeditionis gratiâ neglexeram diſviſores extimorum numerorum, 170 & 190. Quare, continuatis progreſſionibus, ſumo proximos earum hinc inde terminos, *viz.* − 7 & 17 ſuperiùs, & − 7, & − 13 inferiùs; ac tento, ſi ſubductis his de numeris 27 ac 12, qui ſtant è regione in quartâ columnâ, differentiæ dividunt iſtos 170 & 190, qui ſtant è regione in columnâ ſecundâ. Et quidem differentia inter 27 & − 7, id eſt 34, dividit 170; & differentia 12 & − 7, id eſt 19, dividit 190. Item differentia inter 27 & 17, id eſt 10, dividit 170; ſed differentia inter 12 & − 13, id eſt 25, non dividit 190. Quare poſteriorem progreſſionem rejicio. Juxta priorem $\pm C$ eſt − 7, & $\pm B$ nihil; terminis progreſſionis nullam habentibus differentiam. Quare diviſor tentandus $All \pm Bl \pm C$, erit $3yy + 7$. Et diviſio ſuccedit, prodeunte $y^3 - 2yy - 2y + 2$.

Si nullus inveniri poteſt hoc pacto diviſor qui ſuccedit, concludendum eſt quantitatem propoſitam non admittere diviſorem duarum dimenſionum. Poſſet eadem methodus extendi ad inventionem diviſorum dimenſionum plurium; quærendo in prædictis ſummis differentiiſque progreſſiones, non arithmeticas qui-

tatis trium dimenſionum per quantitatem duarum, unius eſt dimenſionis, et quantitatem diviſam dividit.

 dem,

CAPUT SEPTIMUM.

dem, ſed alias quaſdem; quarum terminorum differentiæ primæ, ſecundæ, tertiæ, &c. ſunt in arithmeticâ progreſſione: at in his Tiro non eſt detinendus.

Ubi in quantitate propoſitâ duæ ſunt literæ, & omnes ejus termini ad dimenſiones æquè altas aſcendunt; pro unâ iſtarum literarum pone unitatem, dein per regulas præcedentes quære diviſorem, ac diviſoris hujus comple deficientes dimenſiones, reſtituendo literam illam pro unitate.

Ut ſi quantitas ſit $6y^4 - cy^3 - 21ccyy + 3c^3y + 20c^4$, ubi termini omnes ſunt quatuor dimenſionum; pro c pono 1: quantitas evadit $6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20$, cujus diviſor, ut ſuprà, eſt $3y + 4$; & completâ deficiente dimenſione poſterioris termini per dimenſionem c, ſit $3y + 4c$ diviſor quæſitus. Ita ſi quantitas ſit $x^4 - bx^3 - 5bbxx + 12b^3x - 6b^4$; poſito 1 pro b, & quantitatis reſultantis, $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6$, invento diviſore $xx + 2x - 2$, compleo ejus deficientes dimenſiones per dimenſiones b, & ſic habeo diviſorem quæſitum $xx + 2bx - 2bb$.

Ubi in quantitate propoſitâ tres vel plures ſunt literæ, & ejus termini omnes ad eaſdem dimenſiones aſcendunt; poteſt diviſor per præcedentes regulas inveniri; ſed expeditiùs hoc modo: *Quære omnes diviſores terminorum omnium in quibus literarum aliqua non eſt; item terminorum omnium in quibus alia aliqua literarum non eſt; pariter & omnium in quibus tertia litera, quartaque, & quinta, non eſt, ſi tot ſunt literæ. Et ſic percurre omnes literas: et è regione literarum colloca diviſores reſpectivè. Dein vide, ſi in ſerie aliquâ diviſorum per omnes literas pergente, partes omnes, unicam tantùm literam involventes, tot vicibus reperiantur, quot ſunt literæ, unâ demptâ, in quantitate propoſitâ: et partes duas literas involventes tot vicibus quot ſunt literæ, demptis duabus, in eâdem quantitate. Si ita eſt, partes iſtæ omnes, ſub ſignis ſuis ſemel ſumptæ, erunt diviſor quæſitus.*

Ut ſi proponatur quantitas $12x^3 - 14bxx + 9cxx - 12bbx - 6bcx + 8ccx + 8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$; terminorum $8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$, in quibus non eſt x, diviſores unius dimenſionis, per præcedentes regulas inventi, erunt $2b - 3c$, & $4b - 6c$; terminorum, $12x^3 + 9cxx + 8ccx$

$+8ccx+6c^3$, in quibus non eſt b, diviſor unicus $4x+3c$; ac terminorum, $12x^3-14bxx-12bbx+8b^3$, in quibus non eſt c, diviſores $2x-b$, & $4x-2b$. Hos diviſores è regione literarum x, b, c diſpono, ut hìc vides. Cùm tres ſint literæ, & diviſorum partes ſingulæ non niſi ſingulas literas involvant, in ſerie diviſorum debent partes illæ bis reperiri. At diviſorum $4b-6c$, & $2x-b$, partes $4b$, $6c$, $2x$, b non niſi ſemel occurrunt: extra diviſorem illum, cujus ſunt partes, non reperiuntur. Quare diviſores illos negligo. Reſtant tantùm tres diviſores, $2b-3c$, $4x+3c$, & $4x-2b$. Hi in ſerie ſunt per omnes literas x, b, c pergente; & eorum partes ſingulæ, $2b$, $3c$, $4x$, bis reperiuntur in ipſis, ut oportuit; idque cum ſignis iiſdem, ſi modò ſigna diviſoris $2b-3c$ mutentur, & ejus loco ſcribatur $-2b+3c$: nam ſigna diviſoris cujuſvis mutare licet. Sumo itaque horum partes omnes $2b$, $3c$, $4x$ ſemel ſub ſignis ſuis, & aggregatum, $-2b+3c+4x$, diviſor erit quem invenire oportuit. Nam ſi per hunc dividas quantitatem propoſitam, prodibit $3xx-2bx+2cc-4bb$.

x	$2b-3c.4b-6c.$
b	$4x+3c.$
c	$2x-b.4x-2b.$

Rurſus ſi quantitas ſit $12x^5-10ax^4-9bx^4-26aax^3+12abx^3+6bbx^3+24a^3xx-8aabxx-8abbxx-24b^3xx-4a^3bx+6aabbx-12ab^3x+18b^4x+12a^4b+32aab^3-12b^5$; diviſores terminorum, in quibus x non eſt, colloco è regione x; illos terminorum, in quibus a non eſt, è regione a; & illos terminorum quibus b non eſt, è regione b, ut hìc vides. Dein illos omnes qui ſunt unius dimenſionis rejiciendos eſſe ſentio; quia ſimplices b, $2b$, $4b$, x, $2x$, & partes compoſitorum $3x-4a$, $6x-8a$, non niſi ſemel in omnibus diviſoribus reperiantur; tres autem ſunt literæ in quantitate propoſitâ, & partes illæ unicam tantùm involvunt, atque adeo bis reperiri deberent. Similiter diviſores duarum dimenſionum, $aa+3bb$, $2aa+6bb$, $4aa+12bb$, $bb-3aa$, & $4bb-12aa$, rejicio; quia partes eorum, aa, $2aa$, $4aa$, bb & $4bb$, unicam tantùm literam, a vel b, involventes non niſi ſemel reperiuntur. Diviſoris autem $2bb-6aa$, qui ſolus reſtat è regione x, partes $2bb$ & $6aa$, quæ ſimiliter unicam tantùm literam involvunt, iterum reperiuntur; nempe pars $2bb$ in diviſore $4xx-3bx+2bb$, & pars

x	$b, 2b, 4b, aa+3bb, 2aa+6bb, 4aa+12bb, bb-3aa, 2bb-6aa, 4bb-12aa.$
a	$4xx-3bx+2bb, 12xx-9bx+6bb.$
b	$x, 2x, 3x-4a, 6x-8a, 3xx-4ax, 6xx-8ax, 2xx+ax-3aa, 4xx+2ax-6aa.$

$6aa$.

CAPUT SEPTIMUM.

$6aa$ in divisore $4xx+2ax-6aa$. Quin etiam hi tres divisores in serie sunt, stantes è regione trium literarum x, a, b; & omnes eorum partes, $2bb$, $6aa$, $4xx$, quæ unicam tantùm literam involvunt, bis reperiuntur in ipsis, idque sub propriis signis; partes verò $3bx$, $2ax$, quæ duas literas involvunt, non nisi semel occurrunt in ipsis. Quare horum trium divisorum partes omnes diversæ $2bb$, $6aa$, $4xx$, $3bx$, $2ax$ sub signis suis connexæ, divisorem desideratum $2bb-6aa+4xx-3bx+2ax$ conflabunt. Per hunc itaque divido quantitatem propositam, & oritur $3x^3-4axx-2aab-6b^3$.

Si quantitatis alicujus termini omnes non sunt æque alti, complendæ sunt dimensiones deficientes per dimensiones literæ cujusvis assumptæ; dein per præcedentes regulas invento divisore, litera assumpta delenda est. Ut si quantitas sit $12x^3-14bxx+9xx-12bbx-6bx+8x+8b^3-12bb-4b+6$; assume literam quamvis c, & per dimensiones ejus comple dimensiones quantitatis propositæ ad hunc modum: $12x^3-14bxx+9cxx-12bbx-6bcx+8ccx+8b^3-12bbc-4bcc+6c^3$. Dein hujus divisore, $4x-2b+3c$, invento dele c; & habebitur divisor desideratus $4x-2b+3$.

Aliquando divisores faciliùs quàm per has regulas inveniri possunt. Ut si litera aliqua in quantitate propositâ sit unius tantùm dimensionis; quærendus erit maximus communis divisor terminorum, in quibus litera illa reperitur, & reliquorum terminorum, in quibus non reperitur; nam divisor ille totam dividet. Et si nullus est ejusmodi communis divisor, nullus erit divisor totius. Exempli gratiâ, si proponatur quantitas $x^4-3ax^3-8aaxx+18a^3x+cx^3-acxx-8aacx+6a^3c-8a^4$; quæratur communis divisor terminorum, $+cx^3-acxx-8aacx+6a^3c$, in quibus c unius est tantùm dimensionis, & terminorum reliquorum, $x^4-3ax^3-8aaxx+18a^3x-8a^4$; ac divisor ille, nempe $xx+2ax-2aa$, dividet totam quantitatem.

Cæterùm maximus duorum numerorum divisor communis, si primâ fronte non innotescit, invenitur perpetuâ ablatione minoris de majori & reliqui de ablato. Nam quæsitus erit divisor, qui tandem nihil relinquit [n]. Sic ad inveniendum maximum communem divisorem

[n] Euclid. Elem. Lib. 7. Prop. 2.

numerorum 203 & 667, aufer ter 203 de 667 ; & reliquum 58 ter de 203 ; & reliquum 29 bis de 58 ; restabitque nihil : quod indicat 29 esse divisorem quæsitum. INVENTIO DIVISORUM.

Haud secus in speciebus communis divisor, ubi compositus est, invenitur, subducendo alterutram quantitatem, aut multiplicem ejus, de alterâ : Si modò & quantitates illæ & residuum juxta literæ alicujus dimensiones, ut Divisione ostensum est, ordinentur, & quâlibet vice concinnentur, dividendo ipsas per suos omnes divisores, qui aut simplices sunt, aut singulos terminos instar simplicium dividunt. Sic ad inveniendum communem divisorem Numeratoris ac Denominatoris fractionis hujus, $\frac{x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4}{x^3 - axx - 8aax + 6a^3}$, multiplica Denominatorem per x, ut primus ejus terminus evadat idem cum primo termino numeratoris. Dein aufer, & restabit $-2ax^3 + 12a^3x - 8a^4$, quod concinnatum, dividendo per $-2a$, evadit $x^3 - 6aax + 4a^3$. Hoc aufer de Denominatore, & restabit $-axx - 2aax + 2a^3$: quod itidem per $-a$ divisum fit $xx + 2ax - 2aa$. Hoc autem per x multiplica (ut ejus primus terminus evadat idem cum primo termino novissimi ablati $x^3 - 6aax + 4a^3$, de quo auferendum est) & restabit $-2axx - 4aax + 4a^3$; quod, per $-2a$ divisum, fit etiam $xx + 2ax - 2aa$. Et hoc, cùm idem sit ac superius residuum, proindeque ablatum relinquat nihil, quæsitus erit divisor per quem fractio proposita, factâ Numeratoris ac Denominatoris divisione, reduci potest ad simpliciorem, nempe ad $\frac{xx - 5ax + 4aa}{x - 3a}$.

Atque ita si habeatur fractio, $\frac{6a^5 + 15a^4b - 4a^3cc - 10aabcc}{9a^3b - 27aabc - 6abcc + 18bc^3}$; termini ejus imprimis abbreviandi sunt, dividendo numeratorem per aa, ac Denominatorem per $3b$. Dein ablato bis $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$ de $6a^3 + 15aab - 4acc - 10bcc$, restabit $\begin{smallmatrix}15b\\+18c\end{smallmatrix}aa\begin{smallmatrix}-10bcc\\-12c^3\end{smallmatrix}$. Quod concinnatum, dividendo terminum utrumque per $5b + 6c$, perinde ac si $5b + 6c$ simplex esset quantitas, evadit $3aa - 2cc$. Hoc multiplicatum per a aufer de $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$, & secundâ vice restabit $-9aac + 6c^3$: quod itidem concinnatum, per applicationem ad $-3c$, evadit etiam $3aa - 2cc$ ut antè. Quare $3aa - 2cc$ quæsitus est divisor. Quo invento, divide per eum partes fractionis propositæ, & obtinebitur $\frac{2a^3 + 5aab}{3ab - 9bc}$.

Quod

Quòd si divisor communis hoc pacto non inveniatur, certum est nullum omninò existere; nisi forsan è terminis prodeat, per quos Numerator ac Denominator fractionis abbreviantur. Ut si habeatur fractio $\frac{aadd - ccdd - aacc + c^4}{4aad - 4acd - 2acc + 2c^3}$, ac termini ejus juxta dimensiones literæ d disponantur, ita ut Numerator evadat $\begin{matrix} aa \\ -cc \end{matrix} dd \begin{matrix} -aacc \\ +c^4 \end{matrix}$, ac Denominator $\begin{matrix} 4aa \\ -4ac \end{matrix} d \begin{matrix} -2acc \\ +2c^3 \end{matrix}$: hos imprimis oportet abbreviare, dividendo utrumque Numeratoris terminum per $aa - cc$, & utrumque Denominatoris per $2a - 2c$, perinde ac si $aa - cc$, & $2a - 2c$, essent simplices quantitates. Atque ita vice Numeratoris emerget $dd - cc$, & vice Denominatoris $2ad - cc$, ex quibus sic præparatis nullus communis divisor obtineri potest. Sed è terminis $aa - cc$ & $2a - 2c$ per quos Numerator ac Denominator abbreviati sunt, prodit ejusmodi divisor, nempe $a - c$, cujus ope fractio ad hanc $\frac{add + cdd - acc - c^3}{4ad - 2cc}$ reduci potest. Quòd si neque termini, $aa - cc$, & $2a - 2c$, communem divisorem habuissent, fractio proposita fuisset irreducibilis.

Et hæc generalis est methodus inveniendi communes divisores: *Sed plerumque expeditiùs inveniuntur quærendo omnes alterutrius quantitatis divisores primos, hoc est, qui per alios dividi nequeunt, ac dein tentando siqui alteram divident absque residuo.* Sic ad reducendum $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ ad minimos terminos, inveniendi sunt divisores quantitatis $aa - ab$, nempe a, & $a - b$. Dein tentandum est an alteruter, a, vel $a - b$, dividit etiam $a^3 - aab + abb - b^3$ absque residuo.

S E C T. III.

De Reductione Fractionum *ad communem Denominatorem.*

Fractiones ad communem Denominatorem reducuntur multiplicando terminos utriusque per denominatorem alterius.

Sic habitis $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, duc terminos unius $\frac{a}{b}$ in d, & vicissim terminos alterius $\frac{c}{d}$ in b, & evadent $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, quarum communis est denominator

denominator bd. Atque ita a & $\frac{ab}{c}$, five $\frac{a}{1}$ & $\frac{ab}{c}$, evadunt $\frac{ac}{c}$ & $\frac{ab}{c}$. Reductio Fractionum.
Ubi verò Denominatores communem habent diviſorem, ſufficit multiplicare alternè per Quotientes. Sic fractiones $\frac{a^3}{bc}$ & $\frac{a^3}{bd}$ ad haſce, $\frac{a^3d}{bcd}$ & $\frac{a^3c}{bcd}$, reducuntur, multiplicando alternè per Quotientes, c ac d, ortos diviſione denominatorum per communem diviſorem b.

Hæc autem reductio præcipuè uſui eſt in Additione & Subductione fractionum; quæ, ſi diverſos habent denominatores, ad eundem reducendæ ſunt, antequam uniri poſſunt. Sic $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ per reductionem evadit $\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$, ſive $\frac{ad+bc}{bd}$. Et $a + \frac{ab}{c}$ evadit $\frac{ac+ab}{c}$. Et $\frac{a^3}{bc} - \frac{a^3}{bd}$ evadit $\frac{a^3d-a^3c}{bcd}$, vel $\frac{d-c}{bcd}a^3$. Et $\frac{c^4+x^4}{cc-xx} - cc - xx$ evadit $\frac{2x^4}{cc-xx}$. Atque ita $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ evadit $\frac{14}{21} + \frac{15}{21}$, ſive $\frac{14+15}{21}$, hoc eſt $\frac{29}{21}$. Et $\frac{11}{6} - \frac{3}{4}$ evadit $\frac{22}{12} - \frac{9}{12}$, ſive $\frac{13}{12}$. Et $\frac{3}{4} - \frac{5}{12}$ evadit $\frac{9}{12} - \frac{5}{12}$, ſive $\frac{4}{12}$, hoc eſt $\frac{1}{3}$. Et $3\frac{4}{7}$ ſive $\frac{3}{1} + \frac{4}{7}$ evadit $\frac{21}{7} + \frac{4}{7}$, ſive $\frac{25}{7}$. Et $25\frac{1}{2}$ evadit $\frac{51}{2}$.

Fractiones, ubi plures ſunt, gradatim uniri debent. Sic habito $\frac{aa}{x} - a + \frac{2xx}{3a} - \frac{ax}{a-x}$; ab $\frac{aa}{x}$ aufer a, & reſtabit $\frac{aa-ax}{x}$; huic adde $\frac{2xx}{3a}$, & prodibit $\frac{3a^3-3aax+2x^3}{3ax}$; unde aufer denique $\frac{ax}{a-x}$, & reſtabit $\frac{3a^4-6a^3x+2ax^3-2x^4}{3aax-3axx}$. Atque ita ſi habeatur $3\frac{4}{7} - \frac{2}{3}$, imprimis aggregatum $3\frac{4}{7}$ inveniendum eſt, nempe $\frac{25}{7}$; dein ab hoc auferendum $\frac{2}{3}$, & reſtabit $\frac{61}{21}$.

S E C T. IV.

De Reductione Radicalium *ad minimos terminos.*

RAdicalis, ubi totius radix extrahi nequit, plerumque concinnatur extrahendo radicem diviſoris alicujus.

Sic $\sqrt{aabc}$, extrahendo radicem diviſoris aa, fit $a\sqrt{bc}$. Et $\sqrt{48}$, extrahendo radicem diviſoris 16, fit $4\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48aabc}$, extrahendo radicem diviſoris $16aa$, fit $4a\sqrt{3bc}$. Et $\sqrt{\frac{a^3b-4aabb+4ab^3}{cc}}$, extrahendo radicem diviſoris $\frac{aa-4ab+4bb}{cc}$, fit $\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$. Et

CAPUT SEPTIMUM.

$\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$, extrahendo radicem diviſoris $\frac{aamm}{ppzz}$, fit $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$. Et $6\sqrt{\frac{75}{98}}$, extrahendo radicem diviſoris $\frac{25}{49}$, fit $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}$, ſive $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{6}{4}}$: radicemque denominatoris adhuc extrahendo, fit $\frac{15}{7}\sqrt{6}$. Et ſic $a\sqrt{\frac{b}{a}}$, ſive $a\sqrt{\frac{ab}{aa}}$, extrahendo radicem denominatoris, fit $\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{3}:\overline{8a^3b+16a^4}$, extrahendo radicem cubicam diviſoris $8a^3$, fit $2a\sqrt{3}:\overline{b+2a}$. Haud ſecus $\sqrt{4}a^3x$, extrahendo radicem quadraticam diviſoris aa fit, $\sqrt{a}$ in $\sqrt{4}\,ax$; vel extrahendo radicem quadrato-quadraticam diviſoris a^4, fit $a\sqrt{4}\,\frac{x}{a}$. Atque ita $\sqrt{6}:a^7x^5$ convertitur in $a\sqrt{6}:ax^5$, vel in $ax\sqrt{6}:\frac{a}{x}$, vel in $\sqrt{ax}\times\sqrt{3}:aax$.

Cæterùm hæc reductio non tantùm concinnandis radicalibus inſervit, ſed & earum Additioni & Subductioni; ſi modò ex parte radicali conveniant, ubi ad formam ſimpliciſſimam reducuntur. Tunc enim uniri poſſunt, quod aliter non fit. Sic $\sqrt{48}+\sqrt{75}$, per reductionem, evadit $4\sqrt{3}+5\sqrt{3}$, hoc eſt $9\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48}-\sqrt{\frac{16}{27}}$, per reductionem evadit $4\sqrt{3}-\frac{4}{9}\sqrt{3}$, hoc eſt $\frac{32}{9}\sqrt{3}$. Et ſic $\sqrt{\frac{4ab^3}{cc}}+\sqrt{\frac{a^3b-4aabb+4ab^3}{cc}}$, extrahendo quicquid eſt rationale, evadit $\frac{2b}{c}\sqrt{ab}+\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$, hoc eſt $\frac{a}{c}\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{3}:\overline{8a^3b+16a^4}-\sqrt{3}:\overline{b^4+2ab^3}$, evadit $2a\sqrt{3}:\overline{b+2a}-b\sqrt{3}:\overline{b+2a}$, hoc eſt $\overline{2a-b}\,\sqrt{3}:\overline{b+2a}$.

SECT.

(c) Invento ſcilicet numero quem minimum indices datarum radicalium dividant, datarum unaquæque in aliam tranſmutanda eſt, quæ minimum illum numerum indicem habeat. Eò igitur res redit, ut quantitas radicalis data in aliam tranſmutetur dato indice. Detur igitur quantitas radicalis $\sqrt{n}\,a^m$, ad aliam reducenda, cujus index dato numero p æqualis ſit. Factum puta: ſit $\sqrt{p}\,a^{mx}=\sqrt{n}\,a^m$. Extrahendo igitur utrobique radicem à numero m denominatam, $\sqrt{p}\,a^x=\sqrt{n}\,a$: capiendoque utrinque poteſtates à numero n denominatas, $\overline{\sqrt{p}\,a^x}|^n=a$: atque rurſum capiendo utrinque poteſtatem à numero p denominatas, $a^{xn}=a^p$. Ergo $xn=p$, & $x=\frac{p}{n}$. Numeri autem p, n, dati. Numerus igitur x datus, qui index eſt poteſtatis illius quantitatis a^m, cujus radix à numero p denominata, quantitatis a^m radici à numero n denominatæ æqualis eſt. Datam igitur radicalem $\sqrt{n}\,a^m$ ita in aliam transformaveris, quæ indicem habeat numero p æqualem, ſi ſigno radicali $\sqrt{p}$ quantitatem illam ſuffixeris, quæ provenerit ſi quantitatem ſigno radicali $\sqrt{n}$ ſuffixam, nimirum

SECT. V.

Reductio Radicalium.

De Reductione Radicalium *ad eandem denominationem.*

CUM in radicalibus diverſæ denominationis inſtituenda eſt multiplicatio vel diviſio, oportet omnes ad eandem denominationem reducere; idque præfigendo ſignum radicale, cujus index eſt minimus numerus quem earum indices dividunt abſque reſiduo, & ſuffixas quantitates toties, demptâ unâ vice, in ſe ducendo, quoties index ille jam major evaſerit. (°)

Sic enim $\sqrt{ax}$ in $\sqrt{3}:aax$ evadit $\sqrt{6}:a^3x^3$ in $\sqrt{6}:a^4xx$, hoc eſt $\sqrt{6}:a^7x^5$. Et $\sqrt{a}$ in $\sqrt{4}:ax$ evadit $\sqrt{4}:aa$ in $\sqrt{4}:ax$, hoc eſt $\sqrt{4}:a^3x$. Et $\sqrt{6}$ in $\sqrt{4}:\frac{5}{6}$ evadit $\sqrt{4}:36$ in $\sqrt{4}:\frac{5}{6}$, hoc eſt $\sqrt{4}:30$. Eadem ratione $a\sqrt{bc}$ evadit $\sqrt{aa}$ in $\sqrt{bc}$, hoc eſt $\sqrt{aabc}$. Et $4a\sqrt{3bc}$ evadit $\sqrt{16aa}$ in $\sqrt{3bc}$, hoc eſt $\sqrt{48aabc}$. Et $2a\sqrt{3}:\overline{b+2a}$ evadit $\sqrt{3}:8a^3$ in $\sqrt{3}:\overline{b+2a}$, hoc eſt $\sqrt{3}:\overline{8a^3b+16a^4}$. Atque ita $\frac{\sqrt{ac}}{b}$ fit $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bb}}$, ſive $\sqrt{\frac{ac}{bb}}$. Et $\frac{6abb}{\sqrt{18ab^3}}$ fit $\frac{\sqrt{36aab^4}}{\sqrt{18ab^3}}$, ſive $\sqrt{2ab}$. Et ſic in aliis.

SECT. VI.

De Reductione Radicalium *ad ſimpliciores radicales per extractionem radicum.*

RAdices quantitatum, quæ ex integris & radicalibus quadraticis componuntur, ſic extrahe.

nimirum ſi ipſam a^m, toties demptâ unâ vice in ſe ipſam duxeris, quoties multiplicandus eſt numerus n, ut numerum numero p æqualem faciat. Atque ita tandem verum ni fallor ſenſum præcepti Newtoniani aſſecuti ſumus, quod verborum ambiguitate incautos facilè deciperet: cùm ita intelligi poſſet, ac ſi quantitas ſigno radicali ſubjecta toties in ſe ducenda eſſet, quot, unâ ſaltem demptâ, unitates fuerint in numero quo novus index p datum n exuperaverit.

Cæterùm radicalium, necnon potentialium, reductiones adhibitis indicibus fractis facillimè peragendæ ſunt, cum nihil aliud requiritur niſi ut dati indices ad denominatorem revocentur communem. Exempli gratiâ, $\overline{ax}|^{\frac{1}{2}} \times \overline{a^3x}|^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} \times \overline{a}|^{\frac{3}{3}} \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{9}{6}} \times x^{\frac{5}{6}} = \overline{a^9 \times x^5}|^{\frac{1}{6}}$. Rurſum $a^{\frac{1}{2}} \times \overline{ax}|^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{3}{6}} \times a^{\frac{1}{6}} \times x^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{4}{6}} \times x^{\frac{1}{6}} = \overline{a^4x}|^{\frac{1}{6}}$. Sic etiam $a^3 \times x^2 \times \overline{ab}|^{\frac{2}{15}} = a^3 \times a^{\frac{2}{15}} \times b^{\frac{2}{15}} \times x^2 = a^{\frac{17}{15}} \times b^{\frac{2}{15}} \times x^{\frac{12}{15}} = \overline{a^{17}b^2x^{12}}|^{\frac{1}{15}}$. Rurſum $\overline{ax}|^{\frac{1}{2}} \times \overline{a^3x}|^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{3}{3}} \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{3}{6}} \times x^{\frac{1}{6}} = \overline{\frac{x}{a}}|^{\frac{1}{6}}$.

CAPUT SEPTIMUM.

Designet A *quantitatis alicujus partem majorem,* B *partem minorem: Et erit* $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}$ *quadratum majoris partis radicis;* & $\frac{A-\sqrt{AA-BB}}{2}$ *quadratum partis minoris, quæ quidem majori adnectenda est cum signo ipsius* B.

Ut si quantitas sit $3+\sqrt{8}$, scribendo 3 pro A, & $\sqrt{8}$ pro B, erit $\sqrt{AA-BB}=1$; indeque quadratum majoris partis radicis, $\frac{3+1}{2}$, id est 2; & quadratum minoris partis $\frac{3-1}{2}$, id est 1. Ergo radix est $1+\sqrt{2}$. Rursus si ex $\sqrt{32}-\sqrt{24}$ radix extrahenda sit, ponendo $\sqrt{32}$ pro A, & $\sqrt{24}$ pro B, erit $\sqrt{AA-BB}=\sqrt{8}$; & inde $\frac{\sqrt{32}+\sqrt{8}}{2}$, & $\frac{\sqrt{32}-\sqrt{8}}{2}$, hoc est $3\sqrt{2}$, & $\sqrt{2}$, quadrata partium radicis. Radix itaque est $\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}$. Eodem modo; si de $aa+2x\sqrt{aa-xx}$ radix extrahi debet, pro A scribe aa; & pro B, $2x\sqrt{aa-xx}$, & erit $AA-BB=a^4-4aaxx+4x^4$. Cujus radix est $aa-2xx$. Unde quadratum unius partis radicis erit $aa-xx$, illud alterius xx; adeoque radix, $x+\sqrt{aa-xx}$. Rursus si habeatur $aa+5ax-2a\sqrt{ax+4xx}$, scribendo $aa+5ax$ pro A, & $2a\sqrt{ax+4xx}$ pro B, fiet $AA-BB=a^4+6a^3x+9aaxx$; cujus radix est $aa+3ax$. Unde quadratum majoris partis radicis erit $aa+4ax$, illud minoris ax; & radix, $\sqrt{aa+4ax}-\sqrt{ax}$. Denique si habeatur $6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}$, ponendo $6+\sqrt{8}=A$, & $-\sqrt{12}-\sqrt{24}=B$, fiet $AA-BB=8$. Unde radicis pars major $\sqrt{3+\sqrt{8}}$; hoc est (ut suprà) $1+\sqrt{2}$; & pars minor $\sqrt{3}$; atque adeo radix ipsa $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Cæterùm ubi plures sunt hujusmodi termini radicales, possunt partes radicis citiùs inveniri, dividendo factum quarumvis duarum radicalium per tertiam aliquam radicalem, quæ producit quotum rationalem & integrum. Nam dupli quoti istius radix erit duplum partis radicis quæsitæ. Ut in exemplo novissimo $\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{12}}{\sqrt{24}}=2$, $\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{24}}{\sqrt{12}}=4$, $\frac{\sqrt{12}\times\sqrt{24}}{\sqrt{8}}=6$. Ergo partes radicis sunt 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ut suprà.

Est & regula extrahendi altiores radices ex quantitatibus numeralibus duarum potentiâ commensurabilium partium.

Sit

Sit quantitas $A \pm B$. *Ejus pars major* A. *Index radicis extrahendæ* c. *Quære minimum numerum* n, *cujus poteſtas* n^c *dividitur per* $AA - BB$ *ſine reſiduo, & ſit quotus* Q. *Computa* $\sqrt[c]{\overline{A+B} \times \sqrt{Q}}$ *in numeris integris proximis. Sit illud* r. *Divide* $A\sqrt{Q}$ *per maximum diviſorem rationalem: Sit quotus* s, *ſitque* $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$ *in numeris integris proximis* t. *Et erit* $\frac{ts \pm \sqrt{ttss - n}}{\sqrt[2c]{Q}}$ *radix quæſita, ſi modò radix extrahi poteſt.* REDUCTIO RADICALIUM.

Ut ſi radix cubica extrahenda ſit ex $\sqrt{968} + 25$; erit $AA - BB = 343$; ejus diviſores $7, 7, 7$; ergo $n = 7$, & $Q = 1$. Porro $\overline{A+B} \times \sqrt{Q}$, ſeu $\sqrt{968} + 25$, extractâ prioris partis radice, ſit paulo major quam 56; ejus radix cubica in numeris proximis eſt 4. Ergo $r = 4$. Inſuper $A\sqrt{Q}$, ſeu $\sqrt{968}$, extrahendo quicquid rationale eſt, fit $22\sqrt{2}$. Ergo $\sqrt{2}$, ejus pars radicalis, eſt s; & $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$, ſeu $\frac{5\frac{3}{4}}{2\sqrt{2}}$, in numeris integris proximis eſt 2. Ergo $t = 2$. Denique ts eſt $2\sqrt{2}$, $\sqrt{ttss - n}$ eſt 1, & $\sqrt[6]{Q}$, ſeu $\sqrt[6]{1}$, eſt 1. Ergo $2\sqrt{2} + 1$ eſt radix quæſita, ſi modò radix extrahi queat. Tento itaque per multiplicationem ſi cubus ipſius $2\sqrt{2} + 1$ ſit $\sqrt{968} + 25$, & res ſuccedit.

Rurſus ſi radix cubica extrahenda ſit ex $68 - \sqrt{4374}$; erit $AA - BB = 250$, cujus diviſores ſunt $5, 5, 5, 2$. Ergo $n = 5 \times 2 = 10$, & $Q = 4$. Et $\sqrt[c]{\overline{A+B} \times \sqrt{Q}}$, ſeu $\sqrt[c]{\overline{68 + \sqrt{4374}} \times 2}$, in numeris proximis integris, eſt $7 = r$. Inſuper $A\sqrt{Q}$, ſeu $68\sqrt{4}$, extrahendo quicquid rationale eſt, fit $136\sqrt{1}$. Ergo $s = 1$, & $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$, ſeu $\frac{7 + \frac{10}{7}}{2}$, in numeris integris proximis eſt $4 = t$: ergo $ts = 4$, $\sqrt{ttss - n} = \sqrt{6}$, & $\sqrt[6]{Q} = \sqrt[6]{4}$, ſeu $\sqrt[3]{2}$; atque adeo radix tentanda $\frac{4 - \sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Iterum ſi radix quadrato-cubica extrahenda ſit ex $29\sqrt{6} + 41\sqrt{3}$; erit $AA - BB = 3$, adeoque $n = 3$, $Q = 81$, $r = 5$, $s = \sqrt{6}$, $t = 1$, $ts = \sqrt{6}$, $\sqrt{ttss - n} = \sqrt{3}$ & $\sqrt[10]{Q} = \sqrt[10]{81}$ ſeu $\sqrt[5]{9}$; atque adeo radix tentanda $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$.

Cæterùm

Cæterùm in hujuſmodi operationibus ſi quantitas fractio ſit, vel partes ejus communem habent diviſorem; radices denominatoris & factorum ſeorſim extrahe. Ut ſi ex $\sqrt{242} - 12\frac{1}{2}$ radix cubica extrahenda ſit; hoc, reductis partibus ad communem denominatorem, fiet $\frac{\sqrt{968} - 25}{2}$. Dein, extractâ ſeorſim numeratoris ac denominatoris radice cubicâ, orietur $\frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$. Rurſus ſi ex $\sqrt[3]{3993} + \sqrt[6]{17578125}$ radix aliqua extrahenda ſit; divide partes per communem diviſorem $\sqrt[3]{3}$, & emerget $11 + \sqrt{125}$. Unde quantitas propoſita valet $\sqrt[3]{3}$ in $\overline{11 + \sqrt{125}}$; cujus radix invenietur, extrahendo ſeorſim radicem factoris utriuſque, $\sqrt[3]{3}$, & $11 + \sqrt{125}$.

CAPUT OCTAVUM.

De formâ ÆQUATIONIS.

ÆQuationes, quæ ſunt quantitatum aut ſibi mutuò æqualium, aut ſimul nihilo æquipollentium, congeries, duobus præcipuè modis conſiderandæ veniunt; vel ut ultimæ concluſiones ad quas in Problematis ſolvendis deventum eſt, vel ut media, quorum ope finales æquationes acquirendæ ſunt. Prioris generis æquatio ex unicâ tantum incognitâ quantitate cognitis involutâ conflatur, modò Problema ſit definitum, & aliquid certi quærendum innuat. Sed eæ poſterioris generis involvunt plures quantitates incognitas, quæ ideo debent inter ſe comparari, & ita connecti, ut ex omnibus una tandem emerget æquatio nova, cui ineſt unica, quam quærimus, incognita quantitas admiſta cognitis. Quæ quantitas ut exinde faciliùs eliciatur, æquatio iſta variis plerumque modis transformanda eſt, donec evadat ea ſimpliciſſima quæ poteſt, atque etiam ſimilis alicui ex ſequentibus earum gradibus; in quibus x deſignat quantitatem quæſitam, ad cujus dimenſiones termini, ut vides, ordinantur; & p, q, r, s, alias quaſcunque quantitates, ex quibus determinatis & cognitis etiam x determinatur, &, per methodos explicandas, inveſtigari poteſt.

$x = p.$		$x - p = 0.$
$xx = px + q$	Vel	$xx - px - q = 0.$
$x^3 = pxx + qx + r.$		$x^3 - pxx - qx - r = 0.$
$x^4 = px^3 + qxx + rx + s.$		$x^4 - px^3 - qxx - rx - s = 0.$
&c.		&c.

Ad

Ad horum normam itaque termini æquationum, fecundùm dimenfiones incognitæ quantitatis, in ordinem femper redigendi funt; ita ut primum locum occupent in quibus incognita quantitas eft plurimarum dimenfionum, inftar x, xx, x^3, x^4; & fecundum locum, in quibus ea eft unâ dimenfione minor, inftar p, px, pxx, px^3, & fic præterea. Et quod figna terminorum attinet, poffunt ea omnibus modis fe habere: Imò & unus vel plures ex intermediis terminis aliquando deeffe. Sic $x^3 \quad * - bbx + b^3 = 0$ vel $x^3 = bbx - b^3$, eft æquatio tertii gradûs; $Z^4 \begin{smallmatrix} +a \\ -b \end{smallmatrix} Z^3 \quad * \begin{smallmatrix} +ab^3 \\ -b^4 \end{smallmatrix} = 0$ æquatio quarti. Nam gradus æquationum æftimantur ex maximâ dimenfione quantitatis incognitæ, nullo refpectu ad quantitates cognitas habito, nec ad intermedios terminos. Attamen ex defectu intermediorum terminorum æquatio plerumque fit multò fimplicior, & nonnunquam ad gradum inferiorum quodammodo deprimitur. Sic enim $x^4 = qxx + s$ æquatio fecundi gradûs cenfenda eft, fiquidem ea in duas fecundi gradûs æquationes refolvi poteft. Nam fuppofito $xx = y$, & y pro xx in æquatione illâ perinde fcripto, ejus vice prodibit $yy = qy + s$, æquatio fecundi gradûs; cujus ope, cum y inventa fuerit, æquatio $xx = y$, fecundi etiam gradûs, dabit x.

De Forma Æquationis.

Atque hæ funt conclufiones ad quas Problemata deduci debent. Sed antequam eorum refolutionem aggrediar, opus erit ut modos transformandi & in ordinem redigendi æquationes, & ex mediis eliciendi finales æquationes abftractè doceam. Æquationis autem folitariæ reductionem in fequentibus regulis complectar.

CAPUT NONUM.

De concinnandâ Æquatione folitariâ.

REGULA PRIMA.

Siquæ funt quantitates quæ fe mutuo deftruere, vel per Additionem aut Subductionem coalefcere poffunt, termini perinde minuendi funt.

Veluti fi habeatur $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$, aufer utrinque $2x$, & adde $3a$, proditque $5b = 8a + x$. Atque ita $\frac{2ab + bx}{a} - b = a + b$, delendo æquipollentes $\frac{2ab}{a} - b = b$, evadit $\frac{bx}{a} = a$.

Ad

Ad hanc Regulam referri debet etiam ordinatio terminorum æquationis, quæ fieri solet per translationem ad contrarias partes cum signo contrario. Ut si habitâ æquatione $5b = 8a + x$ desideretur x; aufer utrinque $8a$, vel, quod eodem recidit, transfer $8a$ ad contrarias partes cum signo mutato, & prodibit $5b - 8a = x$. Eodem modo si habeatur $aa - 3ay = ab - bb + by$, ac desideretur y, transpone $-3ay$, & $ab - bb$, eò ut ex unâ parte consistant termini multiplicati per y, & ex alterâ reliqui termini, & prodibit $aa - ab + bb = 3ay + by$; unde y elicietur per Reg. 5. sequentem, dividendo scilicet utramque partem per $3a + b$, prodibit enim $\frac{aa - ab + bb}{3a + b} = y$. Atque ita æquatio $abx + a^3 - aax = abb - 2abx - x^3$, per debitam transpositionem & ordinationem, evadit $x^3 = \begin{smallmatrix} aa \\ -3ab \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} -a^3 \\ +abb \end{smallmatrix}$ vel $x^3 \begin{smallmatrix} -aa \\ +3ab \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} +a^3 \\ -abb \end{smallmatrix} = 0$.

REGULA SECUNDA.

Siqua compareat quantitas per quam omnes æquationis termini multiplicantur, debent omnes per illam quantitatem dividi; vel si per eandem quantitatem omnes dividantur, debent omnes per illam multiplicari.

Sic habito $15bb = 24ab + 3bx$, divide terminos omnes per b, & fit $15b = 24a + 3x$: deinde per 3, & fit $5b = 8a + x$. Vel habito $\frac{b^3}{ac} - \frac{bbx}{cc} = \frac{xx}{c}$, multiplica omnes per c, & prodit $\frac{b^3}{a} - \frac{bbx}{c} = xx$.

REG.

(p) Hanc quidem operationem Franciscus Vieta *Symmetricam Climactismum* vocavit: eandem Juniores *involutionem* dixerunt. Haud verò in omni casu sufficiet ad irrationalium expurgationem, ne quidem si omnia subquadratica sint, quod genus est simplicissimum. Puta enim æquationem proponi ex quatuor subquadraticis compositam, $\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{d} = 0$. Hujusce æquationis nomina si ita distribuas, ut ex utrâque parte bina sint, veluti hoc modo $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{d}$, partibus quadratis, veniet utrinque nomen unum irrationale; hinc enim orietur $a - 2\sqrt{ab} + b$, illinc $c + 2\sqrt{cd} + d$. Novæ hujus æquationis nomina sic disponito, ut ab unâ parte nomina omnia rationalia sint, ab alterâ irrationalia, nempe $a + b - c - d = 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd}$. Pro nominum rationalium summâ ponatur litera g, ut sit $g = 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd}$. Partibus rursum quadratis, à binomio irrationali veniet unum tantùm nomen irrationale; è multiplicatione enim quadraticâ fiet $g^2 = 4 \times ab + 2\sqrt{abcd} + cd$: collectisque nominibus quæ utrinque rationalia sunt, $g^2 - 4ab - 4cd = 8\sqrt{abcd}$. Pro $\frac{g^2 - 4ab - 4cd}{8}$ ponatur litera h, & ex tertiâ demum multiplicatione quadraticâ veniet æquatio irrationalibus libera, $h^2 = abcd$. Atque idem semper fiet, quoties æquationis propositæ nomina non plura sint numero quàm quatuor; tolletur sanè id omne quod irrationale est per symmetricam climactismum Vietæ, idque etiamsi omnia nomina irrationalia sint, dummodo subquadratici tantùm generis. Pro uno autem nomine irrationali in hoc negotio haberi volo

De Æquatione Concinnanda.

Regula Tertia.

Siqua sit fractio irreducibilis, in cujus denominatore reperiatur litera illa ad cujus dimensiones æquatio ordinanda est, omnes æquationis termini per istum denominatorem, aut per aliquem divisorem ejus, multiplicandi sunt.

Ut si æquatio $\frac{ax}{a-x}+b=x$ secundum x ordinanda sit, multiplicentur omnes ejus termini per $a-x$, denominatorem fractionis $\frac{ax}{a-x}$, siquidem x inibi reperiatur; & prodit $ax+ab-bx=ax-xx$, seu $ab-bx=-xx$, &, factâ utriusque partis translatione, $xx=bx-ab$. Atque ita si habeatur $\frac{a^3-abb}{2cy-cc}=y-c$, terminique juxta y ordinandi sint, multiplicentur per denominatorem $2cy-cc$, vel saltem per divisorem $2y-c$, quo y tollatur è denominatore, & exurget $\frac{a^3-abb}{c}=2yy-3cy+cc$; & ordinando $\frac{a^3-abb}{c}-cc+3cy=2yy$. Ad eundem modum $\frac{aa}{x}-a=x$, multiplicando per x, evadit $aa-ax=xx$; & $\frac{aabb}{cxx}=\frac{xx}{a+b-x}$, multiplicando primò per xx, dein per $a+b-x$, evadit $\frac{a^2bb+aab^3-aabbx}{c}=x^4$.

Regula Quarta.

Sicut surdæ quantitati irreducibili litera illa involvatur, ad cujus dimensiones æquatio ordinanda est, cæteri omnes termini ad contrarias partes cum signis mutatis transferendi sunt, & utraque pars æquationis in se semel *multiplicanda, si radix* quadratica *sit, vel* bis *si sit* cubica, *&c.* P

quicquid simul signo radicali subsit, licet ex pluribus conflatum sit. Exempli gratiâ, æquationis $\sqrt{a^2-bx}+\sqrt{cx-g^2+d^2}=\sqrt{gd}$, tria sunt nomina irrationalia, quorum unum est $\sqrt{gd}$, alterum $\sqrt{a^2-bx}$, tertium $\sqrt{cx-g^2+d^2}$. At si æquationis propositæ nominibus quatuor subquadraticè irrationalibus nomen quintum accedat, sive rationale, sive subquadraticè etiam irrationale, nomina quidem irrationalia multiplicatione quadraticâ nunquam sustuleris. Quum enim quinque nomina aliter distribui nequeant, quin vel ex alterâ parte trinomium consistat, binomium ex alterâ; vel ex alterâ quidem parte quadrinomium, ex alterâ nomen singulare; vel denique ex unâ parte quinquenomium; quadratica verò trinomii multiplicatio tria nomina irrationalia semper pariat, binomii nomen irrationale unum, quadrinomii autem sex, quinquenomii decem, non ex ulla quidem dati quinquenomii distributione obtinebis, quin nomina irrationalia, ex quadraticis partium multiplicationibus facta, vel plura sint numero quàm quatuor, vel saltem non pauciora, accedente etiam nomine rationali. Factâque quovis modo partium translatione, partibusque iterum quadratis, iterum provenient nomina irrationalia numero haud pauciora quàm quatuor, quibus etiam accedet nomen unum rationale: idque toties fiet quoties multiplicatio quadratica iterata fuerit. Quoties igitur æquationis propositæ, ex quinque pluribusve nominibus conflatæ, quatuor plurave nomina irrationalia sint, Climactismi opera ad irrationalitatem tollendam, licet illa in infimo quidem subsistat subquadraticorum gradu, nihil prorsus juvabit: sed confugiendum erit ad viam generalem Fermatii, Newtono sub fine hujusce capitis traditam, quæ sanè nullam non asymmetriam exulare cogit.

CAPUT NONUM.

Sic ad ordinandum juxta x æquationem $\sqrt{aa-xx}+a=x$, transferatur a ad alteras partes, fitque $\sqrt{aa-ax}=x-a$; & quadratis partibus, $aa-ax=xx-2ax+aa$, seu $0=xx-ax$; hoc est $x=a$. Sic etiam $\sqrt{3:\overline{aax+2axx-x^3}}-a+x=0$, transponendo $-a+x$, evadit $\sqrt{3:\overline{aax+2axx-x^3}}=a-x$; & partibus cubicè multiplicatis, $aax+2axx-x^3=a^3-3aax+3axx-x^3$; seu $xx=4ax-aa$. Et sic $y=\sqrt{ay+yy-a\sqrt{ay-yy}}$, quadratis partibus, evadit $yy=ay+yy-a\sqrt{ay-yy}$: &, terminis debitè transpositis, $ay=a\sqrt{ay-yy}$, seu $y=\sqrt{ay-yy}$; & partibus iterum quadratis, $yy=ay-yy$; & transponendo denuo, $2yy=ay$, sive $2y=a$.

REGULA QUINTA.

Terminis secundùm Dimensiones literæ alicujus, ope præcedentium regularum, dispositis, si maxima ejusdem literæ dimensio per cognitam quamlibet quantitatem multiplicetur, debet tota æquatio per eandem dividi.

Sic $2y=a$, dividendo per 2, evadit $y=\frac{1}{2}a$. Et $\frac{bx}{a}=a$, dividendo per $\frac{b}{a}$, evadat $x=\frac{aa}{b}$. Et $\begin{matrix}2ac\\-cc\end{matrix}x \begin{matrix}+a^3\\+aac\end{matrix}xx \begin{matrix}-2a^3c\\+aacc\end{matrix}x-a^3cc=0$, dividendo per $2ac-cc$, evadit $x^3+\dfrac{\begin{matrix}a^3\\aac\end{matrix}xx\begin{matrix}-2a^3c\\+aacc\end{matrix}x-a^3cc}{2ac-cc}=0$, sive $x^3+\frac{a^3+aac}{2ac-cc}xx-aax-\frac{a^3c}{2a-c}=0$.

REGULA SEXTA.

Aliquando reductio institui potest dividendo æquationem per compositam aliquam quantitatem.

Sic enim $y^3=\begin{matrix}-2c\\+b\end{matrix}yy+3bcy-bbc$, ad hanc, $yy=-2cy+bc$, reducitur, transferendo terminos omnes ad easdem partes, hoc modo, $y^3\begin{matrix}+2c\\-b\end{matrix}yy-3bcy+bbc=0$, & dividendo per $y-b$; ut in capite de divisione ostensum est: prodibit enim $yy+2cy-bc=0$. Ast hujusmodi divisorum inventio difficilis est, & eam priùs docuimus.

REGULA SEPTIMA.

Aliquandò etiam reductio per extractionem radicis ex utrâque æquationis parte instituitur.

Quemadmodum si habeatur $xx=\frac{1}{4}aa-bb$, extractâ utrobique radice, prodit $x=\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$. Quòd si habeatur $xx+aa=2ax+bb$, transfer

transfer $2ax$, & exurget $xx-2ax+aa=bb$; extractisque partium radicibus, $x-a=+$ vel $-b$, seu $x=a\pm b$. Sic etiam habito $xx=ax-bb$, adde utrinque $-ax+\frac{1}{4}aa$, & prodit $xx-ax+\frac{1}{4}aa=\frac{1}{4}aa-bb$; & extractâ utrobique radice $x-\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$, seu $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$. De Æquatione Concinnanda.

Et sic universaliter: Si sit $xx=.\,px.\,q$, erit $x=.\,\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp.\,q}$. Ubi $\frac{1}{2}p$ & q iisdem signis, ac p & q in æquatione priori, afficienda sunt; sed $\frac{1}{4}pp$ semper affirmativè ponendum. Estque hoc exemplum Regula, ad cujus similitudinem æquationes omnes quadraticæ ad formam simplicium reduci possunt. *E. g.* Propositâ æquatione $yy=\frac{2xxy}{a}+xx$, ad extrahendam radicem y, confer $\frac{2xx}{a}$ cum p, & xx cum q; hoc est, scribe $\frac{xx}{a}$ pro $\frac{1}{2}p$, & $\frac{x^4}{aa}+xx$ pro $\frac{1}{4}pp.\,q$, atque orietur $y=\frac{xx}{a}+\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}$, vel $y=\frac{xx}{a}-\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}$. Eodem modo æquatio $yy=ay-2cy+aa-cc$, conferendo $a-2c$ cum p, & $aa-cc$ cum q, dabit $y=\frac{1}{2}a-c+\sqrt{\frac{5}{4}aa-ac}$. Quinetiam æquatio quadrato-quadratica $x^4=-aaxx+ab^3$, cujus termini impares desunt, ope hujus regulæ evadit $xx=-\frac{1}{2}aa+\sqrt{\frac{1}{4}a^4+ab^3}$, & extractâ iterum radice, $x=\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\sqrt{\frac{1}{4}a^4+ab^3}}$. Et sic in aliis.

Suntque hæ regulæ pro concinnandâ æquatione solitariâ; quarum usum cùm Analysta satis perspexerit, ita ut æquationem quamcunque propositam secundum quamlibet literarum in eâ complexarum disponere noverit, & ejusdem literæ, si ea unius sit dimensionis, aut maximæ potestatis ejus si plurium, valorem elicere; haud difficilem sentiet comparationem plurium æquationum inter se: quam pergo jam docere.

Caput Decimum.

CAPUT DECIMUM.

De duabus pluribusve æquationibus in unum transformandis, ut incognitæ quantitates exterminentur.

CUM in alicujus problematis solutionem plures habentur æquationes statum quæstionis comprehendentes, quarum unicuique plures etiam incognitæ quantitates involvuntur; æquationes istæ (duæ per vices si modò sint plures duabus) sunt ita connectendæ, ut una ex incognitis quantitatibus per singulas operationes tollatur, & emergat æquatio nova. Sic habitis æquationibus $2x = y + 5$, & $x = y + 2$, demendo æqualia ex æqualibus, prodibit $x = 3$. Et sciendum est, quòd per quamlibet æquationem una quantitas incognita potest tolli; atque adeo cùm tot sunt æquationes quot quantitates incognitæ, omnes possunt ad unam denique reduci, in quâ unica manebit quantitas incognita. Sin quantitates incognitæ sint unà plures quàm æquationes habentur, tum in æquatione ultimò resultante duæ manebunt quantitates incognitæ; & si sint duabus plures quàm æquationes habentur, tum in æquatione ultimò resultante manebunt tres, & sic præterea.

Possunt etiam duæ vel plures quantitates incognitæ per duas tantùm æquationes fortasse tolli. Ut si sit $ax - by = ab - az$, & $bx + by = bb + az$: tum, æqualibus ad æqualia additis, prodibit $ax + bx = ab + bb$, exterminatis utrisque y & z. Sed ejusmodi casus vel arguunt vitium aliquod in statu quæstionis latere, vel calculum erroneum esse, aut non satis artificiosum. Modus autem quo una quantitas incognita per singulas æquationes tollatur, ex sequentibus patebit.

SECT. II.

Exterminatio quantitatis incognitæ per æqualitatem valorum ejus.

CUM quantitas tollenda unius est tantùm dimensionis in utrâque æquatione, valor ejus uterque per regulas jam ante traditas quærendus est, & alter valor statuendus æqualis alteri.

Sic

Sic positis $a+x=b+y$, & $2x+y=3b$; ut exterminetur y, æquatio prima dabit $a+x-b=y$; & secunda dabit $3b-2x=y$. Est ergo $a+x-b=3b-2x$, sive ordinando $x=\frac{4b-a}{3}$. De Quantitatibus Exterminandis.

Atque ita $2x=y$, & $5+x=y$ dant $2x=5+x$, seu $x=5$.

Et $ax-2by=ab$, & $xy=bb$ dant $\frac{ax-ab}{2b}$ $(=y)$ $=\frac{bb}{x}$; sive ordinando, $xx-bx-\frac{2b^3}{a}=0$.

Item $\frac{bbx-aby}{a}=ab+xy$, & $bx+\frac{ayy}{c}=2aa$, tollendo x, dant $\frac{aby+aab}{bb-ay}$ $(=x)=\frac{2aac-ayy}{bc}$: Et reducendo, $y^3-\frac{bb}{a}yy-\frac{2aac-bbc}{a}y+bbc=0$.

Denique $x+y-z=0$, & $ay=xz$, tollendo z, dant $x+y$ $(=z)$ $=\frac{ay}{x}$, sive $xx+xy=ay$.

Hoc idem quoque perficitur, subducendo alterutrum valorem quantitatis incognitæ ab altero, & ponendo residuum æquale nihilo. Sic in exemplorum primo, tolle $3b-2x$ ab $a+x-b$, & manebit $a+3x-4b=0$, sive $x=\frac{4b-a}{3}$.

SECT. III.

Exterminatio quantitatis incognitæ substituendo pro eâ valorem suum.

CUM in alterâ saltem æquatione, tollenda quantitas unius tantùm dimensionis existit, valor ejus in eâ quærendus est; & pro se in æquationem alteram substituendus. Sic propositis $xyy=b^3$, & $xx+yy=by-ax$; ut exterminetur x, prima dabit $\frac{b^3}{yy}=x$: Quare in secundam substituo $\frac{b^3}{yy}$ pro x, & prodit $\frac{b^6}{y^4}+yy=by-\frac{ab^3}{yy}$, ac reducendo $y^6-by^5+ab^3yy+b^6=0$.

Propositis autem $ayy+aay=z^3$; & $yz-ay=az$, ut y tollatur, secunda dabit $y=\frac{az}{z-a}$. Quare pro y substituo $\frac{az}{z-a}$ in primam, proditque $\frac{a^3zz}{zz-2az+aa}+\frac{a^3z}{z-a}=z^3$. Et reducendo, $z^4-2az^3+aazz-2a^3z+a^4=0$.

Pari modo propositis $\frac{xy}{c}=z$, & $cy+zx=cc$, ad z tollendum, pro eo substituo $\frac{xy}{c}$ in æquationem secundam, & prodit $cy+\frac{xxy}{c}=cc$.

Cæterùm,

Cæterùm qui in hujusmodi computationibus exercitatus fuerit, sæpenumero contractiores modos percipiet, quibus incognita quantitas exterminari possit. Sic habitis $ax = \frac{bbx - b^3}{z}$, & $x = \frac{az}{x - b}$, si æqualia multiplicentur æqualibus, prodibunt æqualia $axx = abb$, sive $x = b$. Sed casus ejusmodi particulares studiosis proprio marte, cùm res tulerit, investigandos linquo.

S E C T. IV.

Exterminatio quantitatis incognitæ quæ plurium in utrâque æquatione dimensionum existit.

CUM in neutrâ æquatione tollenda quantitas unius tantùm dimensionis existit, valor maximæ potestatis ejus in utrâque quærendus est; deinde, si potestates istæ non sint eædem, æquatio potestatis minoris multiplicanda est per tollendam quantitatem, aut per ejus quadratum aut cubum, *&c.* ut ea evadat ejusdem potestatis cum æquatione alterâ. Tum valores illarum potestatum ponendæ sunt æquales, & æquatio nova prodibit, ubi maxima potestas, sive dimensio, tollendæ quantitatis diminuitur. Et hanc operationem iterando quantitas illa tandem auferetur.

Quemadmodum sit $xx + 5x = 3yy$, & $2xy - 3xx = 4$; ut x tollatur, prima dabit $xx = -5x + 3yy$, & secunda $xx = \frac{2xy - 4}{3}$. Pono itaque $3yy - 5x = \frac{2xy - 4}{3}$, & sic x ad unicam tantùm dimensionem reducitur, adeoque tolli potest per ea quæ paulo ante ostendi. Scilicet æquationem novissimam debitè reducendo prodit $9yy - 15x = 2xy - 4$, sive $x = \frac{9yy + 4}{2y + 15}$. Hunc itaque valorem pro x in aliquam ex æquationibus primo propositis (velut in $xx + 5x = 3yy$) substituo, & oritur $\frac{81y^4 + 72yy + 16}{4yy + 60y + 225} + \frac{45yy + 20}{2y + 15} = 3yy$. Quam, ut in ordinem redigatur, multiplico per $4yy + 60y + 225$, & prodit $81y^4 + 72yy + 16 + 90y^3 + 40y + 675yy + 300 = 12y^4 + 180y^3 + 675yy$; sive $69y^4 - 90y^3 + 72yy + 40y + 316 = 0$.

Præterea si sit $y^3 = xyy + 3x$, & $yy = xx - xy - 3$; ut y tollatur, multiplico posteriorem æquationem per y, & fit $y^3 = xxy - xyy - 3y$,

totidem dimenſionum quot prior. Jam ponendo valores ipſius y ſibimet æquales, habeo $xyy + 3x = xxy - xyy - 3y$, ubi y deprimitur ad duas dimenſiones. Per hanc itaque, & ſimpliciorem ex æquationibus primo propoſitis, $yy = xx - xy - 3$, quantitas y prorſus tolli poteſt, inſiſtendo veſtigiis prioris exempli.

De Quantitatibus Exterminandis.

Sunt & alii modi quibus hæc eadem abſolvi poſſunt; idque ſæpenumero contractiùs. Quemadmodum ex $yy = \frac{2xxy}{a} + xx$, & $yy = 2xy + \frac{x^4}{aa}$; ut y deleatur, extrahe in utrâque radicem y, ſicut in Reg. 7. oſtenſum eſt; & prodibunt $y = \frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, & $= x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$. Jam hos ipſius y valores ponendo æquales, habebitur $\frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx} = x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, & rejiciendo æqualia $\sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$, reſtabit $\frac{xx}{a} = x$, vel $xx = ax$, & $x = a$.

Porro ut ex æquationibus $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$, tollatur x; aufer y de partibus æquationis primæ, & reſtabit $x + \frac{yy}{x} = 20 - y$; & partibus quadratis fit $xx + 2yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y + yy$; tollendoque utrinque yy, reſtat $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y$. Quare cum $400 - 40y$ & 140 iiſdem quantitatibus æquentur, erit $400 - 40y = 140$, ſive $y = 6\frac{1}{2}$. Et ſic opus in pleriſque aliis æquationibus contrahere liceat.

Cæterùm cùm quantitas exterminanda multarum dimenſionum exiſtit, ad eam ex æquationibus tollendam calculus maximè laborioſus nonnunquam requiritur: Sed labor tunc plurimum minuetur per exempla ſequentia tanquam regulas adhibita.

Regula Prima.

Ex $axx + bx + c = 0$, & $fxx + gx + h = 0$,

Exterminato x prodit

$$\overline{ah - bg - 2cf} \times ah : + \overline{bh - cg} \times bf : + \overline{agg + cff} \times c = 0.$$

Regula

Regula Secunda.

Ex $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, & $fxx + gx + h = 0$,

Exterminato x prodit

$$\overline{ah - bg - 2cf} \times abb : + \overline{bh - cg - 2df} \times bfh : + \overline{ch - dg} \times \overline{agg + cff} : + \overline{3agh + bgg + dff} \times df = 0.$$

Regula Tertia.

Ex $ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$, & $fxx + gx + h = 0$,

Exterminato x prodit

$$\overline{ah - bg - 2cf} \times ah^3 : + \overline{bh - cg - 2df} \times bfhh : + \overline{agg + cff} \times \overline{chh - dgh + egg - 2efh} + \overline{3agh + bgg + dff} \times dfh : + \overline{2ahh + 3bgh - dfg + eff} \times eff : - \overline{bg - 2ah} \times efgg = 0.$$

Regula Quarta.

Ex $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, & $fx^3 + gxx + hx + k = 0$,

Exterminato x prodit

$$\overline{ah - bg - 2cf} \times \overline{adhh - achk} : + \overline{ak + bh - cg - 2df} \times bdfh : - \overline{ak + bh + 2cg + 3df} \times aakk : + \overline{cdh - ddg - cck + 2bdk} \times \overline{agg + cff} : + \overline{3agh + bgg + dff - 3afk} \times ddf : - \overline{3ak - bh + cg + df} \times bcfk : + \overline{bk - 2dg} \times \overline{bbfk - bbk - 3adh - cdf} \times agk = 0.$$

Verbi gratiâ, ut ex æquationibus $xx + 5x - 3yy = 0$, & $3xx - 2xy + 4 = 0$, exterminetur x: in regulam primam pro a, b, c; f, g, & h reſpectivè ſubſtituo 1, 5, $-3yy$; 3, $-2y$, & 4. Et ſignis $+$ & $-$ probè obſervatis, oritur $\overline{4 + 10y + 18yy} \times 4 : + \overline{20 - 6y^3} \times 15 : + \overline{4yy - 27yy} \times -3yy = 0$. Sive $16 + 40y + 72yy + 300 - 90y^3 + 69y^4 = 0$.

Simili ratione, ut y deleatur ex æquationibus $y^3 - xyy - 3x = 0$ & $yy + xy - xx + 3 = 0$, in regulam ſecundam pro a, b, c, d; f, g, h, & x ſubſtituo, 1, $-x$, 0, $-3x$; 1, x, $-xx + 3$, & y, reſpectivè; proditque $\overline{3 - xx + xx} \times \overline{9 - 6xx + x^4} : - \overline{3x + x^3 + 6x} \times \overline{-3x + x^3} : + 3xx \times xx : + \overline{9x - 3x^3 - x^3 - 3x} \times -3x = 0$. Tum delendo ſuperflua & multiplicando, fit $27 - 18xx + 3x^4$, $-9xx + x^6$, $+ 3x^4 - 18x^2 + 12x^4 = 0$. Et ordinando, $x^6 + 18x^4 - 45xx + 27 = 0$.

Hactenus

Hactenus de unicâ incognitâ quantitate è duabus æquationibus tollendâ. Quòd ſi plures è pluribus tollendæ ſunt, opus per gradus peragetur. Ex æquationibus $ax=yz$, $x+y=z$, & $5x=y+3z$, ſi quantitas y elicienda ſit, imprimis tolle alteram quantitatem x, aut z, puta x; ſubſtituendo pro eâ valorem ejus $\frac{yz}{a}$ (per æquationem primam inventum) in æquationem ſecundam ac tertiam. Quo pacto obtinebuntur $\frac{yz}{a}+y=z$, & $\frac{5yz}{a}=y+3z$: è quibus deinde tolle z ut ſuprà. De Quantitatibus Exterminandis.

S E C T. IV.

De modo tollendi quantitates quotcunque ſurdas ex æquationibus.

HUC referre licet quantitatum ſurdarum exterminationem, fingendo eas literis quibuſlibet æquales [q]. Quemadmodum ſi ſit $\sqrt{ay}-\sqrt{aa-ay}=2a+\sqrt{^3:ayy}$, ſcribendo t, pro $\sqrt{ay}$, v pro $\sqrt{aa-ay}$, & x pro $\sqrt{^3:ayy}$, habebuntur æquationes $t-v=2a+x$, $tt=ay$, $vv=aa-ay$, & $x^3=ayy$: ex quibus tollendo gradatim t, v, & x, reſultabit tandem æquatio libera ab omni Aſymmetriâ.

C A P U T U N D E C I M U M.

Quomodo Quæſtio aliqua ad æquationem redigatur.

POſtquam Tiro in æquationibus pro arbitrio transformandis & concinnandis aliquamdiu exercitatus fuerit, ordo exigit, ut ingenii vires in quæſtionibus ad æquationem redigendis tentet. Propoſitâ autem aliquâ Queſtione, Artificis ingenium in eo præſertim requiritur, ut omnes ejus conditiones totidem æquationibus deſignet. Ad quod faciendum perpendet imprimis, an propoſitiones ſive ſententiæ, quibus enunciatur, ſint omnes aptæ quæ terminis algebraicis deſignari poſſint, haud ſecùs quàm conceptus noſtri characteribus græcis vel latinis. Et ſi ita (ut ſolet in quæſtionibus quæ circa numeros vel abſtractas quantitates ver-

[q] Vide Fermatii diſſertationem de Novo ſecundarum, et ulterioris ordinis, radicum in analyticis uſu, inter opera ejus mathematica, p. 58.

 ſantur), tunc nomina quantitatibus ignotis, atque etiam notis, ſi opus fuerit, imponat; & ſenſum quæſtionis ſermone, ut ita loquar, analytico deſignet. Et conditiones ejus, ad algebraicos terminos ſic tranſlatæ, tot dabunt æquationes, quot ei ſolvendæ ſufficiunt.

Quemadmodum ſi quærantur tres numeri continuè proportionales, quorum ſumma ſit 20, & quadratorum ſumma 140; poſitis x, y, & z nominibus numerorum trium quæſitorum, quæſtio è latinis literis in algebraicas vertetur, ut ſequitur.

Quæſtio Latinè enunciata.	Eadem Algebraicè.
Quæruntur tres numeri his conditionibus,	$x. y. z$?
Ut ſint continue proportionales,	$x.y::y.z.$ ſive $xz=yy$
Ut omnium ſumma ſit 20,	$x+y+z=20.$
Et ut quadratorum ſumma ſit 140.	$xx+yy+zz=140.$

Atque ita quæſtio deducitur ad æquationes $xz=yy$; $x+y+z=20$; & $xx+yy+zz=140$; quarum ope x, y & z per regulas ſuprà traditas inveſtigandi ſunt.

Cæterùm notandum eſt ſolutiones quæſtionum eo magis expeditas & artificioſas ut plurimùm evadere, quo pauciores incognitæ quantitates ſub initio ponuntur. Sic in hâc quæſtione poſito x pro primo numero & y pro ſecundo, erit $\frac{yy}{x}$ tertius continuè proportionalis; quem proinde ponens pro tertio numero quæſtionem ad æquationes ſic reduco.

Quæſtio Latinè enunciata.	Eadem Algebraicè.
Quæruntur tres numeri continue proportionales,	$x. y. \frac{yy}{x}$?
Quorum ſumma ſit 20,	$x+y+\frac{yy}{x}=20.$
Et quadratorum ſumma 140.	$xx+yy+\frac{y^4}{xx}=140.$

Habentur itaque æquationes $x+y+\frac{yy}{x}=20$; & $xx+yy+\frac{y^4}{xx}=140$; quarum reductione x & y determinandi ſunt.

Aliud exemplum accipe. Mercator quidam nummos ejus triente quotannis adauget, demptis 100 lb. quas annuatim impendit in familiam; & poſt tres annos fit duplo ditior. Quæruntur nummi. De Quæst. ad æquat. redigend.

Ad hoc autem reſolvendum ſciendum eſt, quòd plures latent propoſitiones, quæ omnes ſic eruuntur & enunciantur.

Latinè.	Algebraicè.
Mercator habet nummos quoſdam.	x.
Ex quibus anno primo expendit 100 lb.	$x-100$.
Et reliquum adauget triente.	$x-100+\frac{x-100}{3}$, ſive $\frac{4x-400}{3}$.
Annoque ſecundo expendit 100 lb.	$\frac{4x-400}{3}-100$, ſive $\frac{4x-700}{3}$.
Et reliquum adauget triente.	$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}$, ſive $\frac{16x-2800}{9}$.
Et ſic anno tertio expendit 100 lb.	$\frac{16x-2800}{9}-100$, ſive $\frac{16x-3700}{9}$.
Et reliquo trientem ſimiliter lucratus eſt.	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}$, ſive $\frac{64x-14800}{27}$.
Fitque duplo ditior quam ſub initio.	$\frac{64x-14800}{27}=2x$.

Quæſtio itaque ad æquationem $\frac{64x-14800}{27}=2x$ redigitur; cujus reductione eruendus eſt x. Nempe duc eam in 27, & fit $64x-14800=54x$: ſubduc $54x$, & reſtat $10x-14800=0$, ſeu $10x=14800$, & dividendo per 10 fit $x=1480$. Quare 1480 lb. ſunt nummi ſub initio, ut & lucrum.

Vides itaque quòd ad ſolutiones quæſtionum, quæ circa numeros vel abſtractas quantitatum relationes ſolummodo verſantur, nihil aliud fere requiritur, quàm ut è ſermone Latino, vel alio quovis in quo Problema proponitur, tranſlatio fiat in ſermonem (ſi ita loquar) Algebraicum; hoc eſt, in Characteres qui apti ſunt ut noſtros de quantitatum relationibus conceptus deſignent. Nonnunquam verò poteſt accidere, quòd ſermo, quocum ſtatus quæſtionis exprimitur, ineptus videatur qui in Algebraicum poſſit verti; ſed paucis mutationibus adhibitis, & ad ſenſum potiùs quàm verborum ſonos attendendo, verſio reddetur facilis. Sic

CAPUT XII. enim quælibet apud Gentes loquendi formæ propria habent Idiomata: Quæ ubi obvenerint, translatio ex unis in alias non verbo tenus instituenda est, sed ex sensu determinanda. Cæterùm ut hujusmodi problemata hâc methodo ad æquationes redigendi familiaritatem convincam & illustrem, & cùm Artes exemplis faciliùs quàm præceptis addiscantur, placuit sequentium problematum solutiones adjungere.

CAPUT DUODECIMUM.

PROB. I.

Datâ duorum numerorum summâ a, & differentia quadratorum b, invenire numeros?

Sit eorum minor x, & erit alter $a-x$, eorumque quadrata xx & $aa-2ax+xx$: Quorum differentia $aa-2ax$ supponitur b. Est itaque $aa-2ax=b$, indeque per reductionem $aa-b=2ax$ seu $\frac{aa-b}{2a}$ $(=\frac{1}{2}a-\frac{b}{2a})=x$.

EXEMPLI GR. Si summa numerorum, seu a, sit 8, & quadratorum differentia seu b 16; erit $\frac{1}{2}a-\frac{b}{2a}$ $(=4-1)=3=x$ & $a-x=5$. Quare numeri sunt 3 & 5.

PROB. II.

Invenire tres quantitates, x, y & z, quarum paris cujusque summa datur.

Si summa paris x & y sit a; paris x & z, b; ac paris y & z, c: Pro determinandis tribus quæsitis x, y & z, tres habebuntur æquationes, $x+y=a$; $x+z=b$; & $y+z=c$. Jam ut incognitarum duæ, puta y & z, exterminentur, aufer x utrinque in primâ & secundâ æquatione, & emergent $y=a-x$, & $z=b-x$; quos valores pro y & z substitue in tertiâ, & orietur $a-x+b-x=c$; & per reductionem $x=\frac{a+b-c}{2}$. Invento x, æquationes superiores, $y=a-x$, & $z=b-x$, dabunt y & z.

2 EXEMP.

EXEMP. Si summa paris x & y sit 9; paris x & z, 10; & paris y & z, 13; tum in valoribus x, y & z scribe 9 pro a, 10 pro b, & 13 pro c; & evadet $a+b-c=6$, adeoque $x\ (=\frac{a+b-c}{2})=3$, $y(=a-x)=6$, & $z(=b-x)=7$. Quæstiones Arithmeticæ.

PROB. III.

Quantitatem datam ita in partes quotcunque dividere, ut majores partes superent minimam per datas differentias.

Sit a quantitas in quatuor ejusmodi partes dividenda; ejusque prima atque minima pars, x; & super hanc excessus secundæ partis, b; tertia partis, c; & quartæ partis, d; & erit $x+b$ secunda pars, $x+c$ tertia pars, & $x+d$ quarta pars; quarum omnium aggregatum, $4x+b+c+d$, æquatur toti lineæ a. Aufer jam utrinque $b+c+d$, & restat $4x=a-b-c-d$, sive $x=\frac{a-b-c-d}{4}$.

EXEMP. Proponatur linea 20 pedum, sic in 4 partes distribuenda, ut super primam partem excessus secundæ sit 2 pedum, tertiæ 3 ped. & quartæ 7 ped. Et quatuor partes erunt $x\ (=\frac{a-b-c-d}{4}$ sive $\frac{20-2-3-7}{4})=2$, $x+b=4$, $x+c=5$, & $x+d=9$.

Eodem modo quantitas in plures partes iisdem conditionibus dividitur.

PROB. IV.

Viro cuidam nummos inter mendicantes distribuere volenti, desunt octo denarii quo minùs det singulis tres denarios. Dat itaque singulis duos denarios, & tres denarii supersunt. Quæritur numerus mendicantium.

Esto numerus mendicantium x, & deerunt 8 denarii quo minùs det omnibus $3x$ denarios; habet itaque $3x-8$ denarios. Ex his autem dat $2x$ denarios, & reliqui denarii $x-8$ sunt tres. Hoc est $x-8=3$, seu $x=11$.

CAPUT XII.

PROB. V.

Si Tabellarii duo, A & B, 59 milliaribus distantes, tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B 8 mill. in 3 horis, ac B unâ horâ seriùs iter instituit quàm A: Quæritur longitudo itineris quod A conficiet antequam conveniet B.

Dic longitudinem illam x; & erit $59-x$ longitudo itineris B: Et cùm A pertranseat 7 mill. in 2 hor. pertransibit spatium x in $\frac{2x}{7}$ horis, eo quòd sit 7 mill. x mill. : : 2 hor. . $\frac{2x}{7}$ hor. Atque ita cùm B pertranseat 8 mill. in 3 hor. pertransibit spatium suum $59-x$ in $\frac{177-3x}{8}$ horis. Jam cùm horum temporum differentia sit 1 hor.; ut evadant æqualia, adde differentiam illam breviori tempori, nempe tempori $\frac{177-3x}{8}$, & emerget $1+\frac{177-3x}{8}=\frac{2x}{7}$. Et per reductionem $35=x$. Nam, multiplicando per 8, fit $185-3x=\frac{16x}{7}$. Dein, multiplicando etiam per 7, fit $1295-21x=16x$, seu $1295=37x$. Et, dividendo denique per 37, exoritur $35=x$. Sunt itaque 35 mill. iter quod A conficiet antequam conveniet B.

Idem generaliùs.

Datis duorum mobilium A & B eodem cursu pergentium celeritatibus, unà cum intervallo locorum ac temporum à quibus incipiunt moveri: Determinare metam in quâ convenient.

Pone mobilis A eam esse celeritatem quâ spatium c pertransire possit in tempore f, & mobilis B eam esse quâ spacium d pertransire possit in tempore g; & locorum intervallum esse e; ac h, temporum in quibus moveri incipiunt.

CASUS I.

Deinde si ambo ad easdem plagas tendant, & A sit mobile quod sub initio motûs longius distat à metâ: Pone distantiam illam esse x, indeque aufer intervallum e, & restabit $x-e$ pro distantiâ B à metâ. Et cùm A pertranseat spatium c in tempore f, tempus in quo pertransibit spatium x erit $\frac{fx}{c}$, eo quòd sit spatium c ad spatium

tium x, ut tempus f ad tempus $\frac{fx}{e}$. Atque ita cùm B pertranseat spatium d in g, tempus, in quo pertransibit spatium $x - e$, erit $\frac{gx-ge}{d}$. Jam cùm horum temporum differentia supponatur b, ut ea evadant æqualia, adde b breviori tempori, nempe tempori $\frac{fx}{e}$ (si modò B priùs incipiat moveri) & evadet $\frac{fx}{e} + b = \frac{gx-ge}{d}$. Et per reductionem $\frac{cge+cdb}{cg-df}$, vel $\frac{ge+db}{g-\frac{d}{c}f}$, $= x$. Sin A priùs moveri incipiat, adde b tempori $\frac{gx-ge}{d}$, & evadet $\frac{fx}{e} = b + \frac{gx-ge}{d}$, & per reductionem $\frac{cge-cdb}{cg-df} = x$.

QUÆSTIONES ARITHMETICÆ.

CASUS II.

Quòd si mobilia obviam eant, & x ut antè ponatur initialis distantia mobilis A à metâ, tum $e - x$ erit initialis distantia ipsius B ab eâdem metâ; & $\frac{fx}{e}$ tempus in quo A conficiet distantiam x, atque $\frac{ge-gx}{d}$ tempus in quo B conficiet distantiam suam $e - x$. Quorum temporum minori, ut suprà, adde differentiam b, nempe tempori $\frac{fx}{e}$, si B priùs incipiat moveri, & sic habebitur $\frac{fx}{e} + b = \frac{ge-gx}{d}$, & per reductionem $\frac{cge-cdb}{cg+df} = x$. Sin A priùs incipiat moveri, adde b tempori $\frac{ge-gx}{d}$, & evadet $\frac{fx}{e} = b + \frac{ge-gx}{d}$, & per reductionem $\frac{cge+cdb}{cg+df} = x$.

EXEMPL. I. Si quotidie Sol unum gradum conficit, & Luna tredecim; & ad tempus aliquod, Sol sit in principio Cancri, atque post tres dies Luna in principio Arietis: Quæritur locus conjunctionis proximè futuræ. Resp. in $10\frac{3}{4}$ gr. Cancri. Nam cùm ambo ad easdem plagas eant, & serior sit Epocha motûs Lunæ, quæ longius distat à metâ: erit A Luna, B Sol, & $\frac{cge+cdb}{cg-df}$ longitudo itineris lunaris; quæ, si scribatur 13 pro c, 1 pro f, d, ac g, 90 pro e, & 3 pro b, evadet $\frac{13\times1\times90+13\times1\times3}{13\times1-1\times1}$; hoc est $\frac{1209}{12}$, sive $100\frac{3}{4}$. Hos itaque gradus adjice principio Arietis, & prodibit $10\frac{3}{4}$ gr. Cancri.

EXEMPL.

Exempl. Tres mercenarii opus aliquod certis temporibus perficere possunt, *viz.* A semel in tribus septimanis, B ter in octo septimanis, & C quinquies in duodecim septimanis. Quæritur quanto tempore simul absolvent? Sunt itaque Agentium A, B, C, vires, quæ temporibus 3, 8, 12 producant effectus 1, 3, 5 respective: et quæritur tempus quo absolvent effectum 1. Quare pro $a, b, c; d; e, f, g;$ scribe 1, 3, 5; 1; 3, 8, 12, & proveniet $x = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}}$, sive $\frac{8}{9}$ sept. hoc est 6 dies $5\frac{1}{3}$ horæ, tempus quo simul absolvent.

PROB. VIII.

Dissimiles duarum pluriumve rerum misturas ita componere, ut res illæ commistæ datam inter se rationem acquirant.

Sit unius misturæ data quantitas $dA + eB + fC$, alterius eadem quantitas $gA + bB + kC$, & eadem tertiæ $lA + mB + nC$ ubi A, B, & C denotent res mistas, & $d, e, f, g, b,$ &c. Proportiones earundem in misturis. Et sit $pA + qB + rC$ mistura, quam ex his tribus oportet componere; fingeque x, y & z numeros esse, per quos si tres datæ misturæ respective multiplicentur, earum summa evadet $pA + qB + rC$.

$$\text{Est itaque}\quad \left.\begin{array}{l} dxA + exB + fxC \\ + gyA + byB + kyC \\ + lxA + mzB + nzC \end{array}\right\} = pA + qB + rC,$$

Adeoque, collatis terminis, $dx + gy + lz = p$; $ex + by + mz = q$; & $fx + ky + nz = r$; & per reductionem $x = \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{q - by - mz}{e} = \frac{r - ky - nz}{f}$. Et rursus æquationes $\frac{p - gy - lz}{d} = \frac{q - by - mz}{e}$, & $\frac{q - by - mz}{e} = \frac{r - ky - nz}{f}$ per reductionem dant $\frac{ep - dq + dmz - elz}{eg - db} (= y) = \frac{fq - er + enz - fmz}{fb - ek}$: Quæ, si abbrevietur scribendo α pro $ep - dq$, β pro $dm - el$, γ pro $eg - db$, δ pro $fq - er$, ζ pro $en - fm$, & θ pro $fb - ek$, evadet $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{\delta + \zeta z}{\theta}$; & per reductionem $\frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = x$. Invento z, pone $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = y$, & $\frac{p - gy - lz}{d} = x$.

Exempl. Si tres sint metallorum colliquefactorum misturæ, quarum primæ pondo continet argenti ℥ 12, æris ℥ 1, & stanni ℥ 3, secundæ pondo continet argenti ℥ 1, æris ℥ 12, & stanni ℥ 3, & tertiæ pondo continet æris ℥ 14, stanni ℥ 2, & argenti nihil; sintque hæ misturæ ita componendæ, ut pondo compositionis contineat argenti ℥ 4, æris ℥ 9, & stanni ℥ 3: pro d, e, f; g, h, k; l, m, n; p, q, r scribe 12, 1, 3; 1, 12, 3; 0, 14, 2; 4, 9, 3 respectivè, & erit $\alpha\ (= ep - dq = 1 \times 4 - 12 \times 9) = -104$, & $\beta\ (= dm - el = 12 \times 14 - 1 \times 0) = 168$, & sic $\gamma = -143$, $\delta = 24$, $\zeta = -40$, & $\theta = 33$. Adeoque $z\ \left(= \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{-3432 + 3432}{5720 - 5544}\right) = 0$, $y\ \left(= \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-104 + 0}{-143}\right) = \frac{8}{11}$, & $x\ \left(= \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{4 - \frac{8}{11}}{12}\right) = \frac{3}{11}$. Quare si misceantur $\frac{8}{11}$ partes pondo misturæ secundæ, $\frac{3}{11}$ partes pondo primæ, & nihil tertiæ, aggregatum erit pondo continens quatuor uncias argenti, novem æris, & tres stanni.

PROB. IX.

Datis plurium ex iisdem rebus misturarum pretiis, & proportionibus mistorum inter se, pretium cujusvis è mistis determinare.

Cujusvis rerum A, B, C, misturæ, $dA + gB + lC$, pretium esto p; misturæ $eA + hB + mC$ pretium q; & misturæ $fA + kB + nC$ pretium r; & rerum illarum A, B, C quærantur pretia x, y & z. Utpote pro rebus A, B, & C substitue earum pretia x, y & z, & exurgent æquationes $dx + gy + lz = p$, $ex + hy + mz = q$, & $fx + ky + nz = r$, ex quibus pergendo ut in præcedente Problemate, elicientur itidem $\frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = z$; $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = y$; & $\frac{p - gy - lz}{d} = x$.

Exempl. Emit quidam 40 modios tritici, 24 modios hordei, & 20 modios avenæ simul 15 libris 12 solidis; Deinde consimilis grani emit 26 modios tritici, 30 modios hordei, & 50 modios avenæ simul 16 libris: ac tertiò consimilis etiam grani emit 24 modios tritici, 120 modios hordei, & 100 modios avenæ simul 34 lib. Quæritur quanti æstimandus sit modius cujusque grani? Resp. Modius tritici 5 solidis, hordei 3 solidis, & avenæ 2 solidis. Nam pro d, g, l; e, h, m; f, k, n; p, q, & r scribendo respectivè 40, 24, 20; 26, 30, 50; 24, 120, 100; $15\frac{3}{5}$, 16, & 34; prodit

prodit $\alpha\,(=ep-dq=26\times15\tfrac{3}{5}-40\times16)=-234\tfrac{2}{5}$; & $\beta\,(=dm-el=40\times50-26\times20)=1480$. Atque ita $\gamma=-576$, $\delta=-500$, $\zeta=1400$, & $\theta=-2400$. Adeoque $z\,(=\frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}=\frac{562560-288000}{-806400+3552000}=\frac{274560}{2745600})=\frac{1}{10}$, $y\,(=\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=\frac{-234\frac{2}{5}+148}{-576})=\frac{3}{20}$. Et $x\,(=\frac{p-qy-iz}{d}=\frac{15\frac{3}{5}-\frac{12}{5}-2}{40})=\frac{1}{4}$. Constitit itaque modius tritici $\frac{1}{4}$ lb seu 5 solidis, modius hordei $\frac{3}{20}$ lb seu 3 solidis, & modius avenæ $\frac{1}{10}$ lb seu 2 solidis. QUÆSTIONES ARITHMETICÆ.

PROB. X.

Datis & misturæ & mistorum gravitatibus specificis invenire proportionem mistorum inter se.

Sit e gravitas specifica misturæ A+B, cujus A gravitas specifica est a, & B gravitas b; & cùm gravitas absoluta, seu pondus, componatur ex mole corporis & gravitate specificâ, erit a A pondus ipsius A, b B pondus ipsius B, & e A + e B pondus aggregati A + B; adeoque $a\text{A}+b\text{B}=e\text{A}+e\text{B}$, indeque $a\text{A}-e\text{A}=e\text{B}-b\text{B}$, seu $e-b.\ a-e :: \text{A}.\ \text{B}$.

EXEMPL. Sit auri gravitas ut 19, argenti ut $10\frac{1}{3}$, & Coronæ Hieronis ut 17; eritque 10. 3 (:: $e-b.\ a-e :: \text{A}.\ \text{B}$) :: moles auri in coronâ, ad molem argenti: vel 190. 31 (:: $19\times10.\ 10\frac{1}{3}\times3 :: a\times\overline{e-b}.\ b\times\overline{a-e}$) :: pondus auri in coronâ, ad pondus argenti: & 221. 31 :: pondus coronæ, ad pondus argenti.

PROB. XI.

Si boves a depascant pratum b in tempore c; & boves d depascant pratum æquè bonum e in tempore f, & gramen uniformiter crescat: Quæritur quot boves depascent pratum simile g in tempore h.

Si boves a in tempore c depascant pratum b; tum, per analogiam, boves $\frac{e}{b}a$ in eodem tempore c, vel boves $\frac{ec}{bf}a$ in tempore f, vel boves $\frac{ec}{bh}a$ in tempore h, depascent pratum e: puta si

 gramen

CAPUT XII. gramen post tempus c non cresceret. Sed cùm propter graminis incrementum boves d in tempore f, depascant sollummodo pratum e, ideo graminis in prato e incrementum illud per tempus $f - c$ tantum erit, quantum per se sufficit pascendis bobus $d - \frac{eca}{bf}$ per tempus f, hoc est, quantum sufficit pascendis bobus $\frac{df}{h} - \frac{eca}{bh}$ per tempus h. Et in tempore $h - c$, per analogiam, tantum erit incrementum, quantum per se sufficit pascendis bobus $\frac{h-c}{f-c}$ in $\frac{df}{h} - \frac{eca}{bh}$, sive $\frac{bdfh - ecah - bdcf + aecc}{bfh - bch}$. Hoc incrementum adjice bobus $\frac{aec}{bh}$, & prodibit $\frac{bdfh - ecah - bdcf + ecfa}{bfh - bch}$ numerus boum quibus pascendis sufficit pratum e per tempus h. Adeoque per analogiam pratum g bobus $\frac{bdfgh - ecagh - bdcgf + ecfga}{befh - bceh}$ per idem tempus h pascendis sufficiet.

EXEMPL. Si 12 boves depascant $3\frac{1}{3}$ jugera prati in 4 septimanis; & 21 boves depascant 10 jugera consimilis prati in 9 septimanis; quæritur quot boves depascant 24 jugera in 18 septimanis? Resp. 36. Iste enim numerus invenietur substituendo in $\frac{bdfgh - ecagh - bdcgf + ecfga}{befh - bceh}$ numeros 12, $3\frac{1}{3}$, 4, 21, 10, 9, 24, & 18 pro literis a, b, c, d, e, f, g & h respectivè. Sed solutio fortè haud minùs expedita erit, si è primis principiis ad formam solutionis præcedentis literalis eruatur. Utpote si 12 boves in 4 septimanis depascant $3\frac{1}{3}$ jugera, tum, per analogiam, 36 boves in 4 septimanis, vel 16 boves in 9 septimanis, vel 8 boves in 18 septimanis depascent 10 jugera: puta si gramen non cresceret. Sed cùm propter graminis incrementum 21 boves in 9 septimanis depascant solummodo 10 jugera, illud graminis in 10 jugeris per posteriores 5 septimanas incrementum tantum erit, quantum per se sufficit excessui boum 21 supra 16, hoc est 5 bobus per 9 septimanas, vel quod perinde est $\frac{5}{2}$ bobus per 18 septimanas pascendis. Et in 14 septimanis (excessu 18 supra 4 primas) incrementum illud graminis, per analogiam, tantum erit quantum sufficiat 7 bobus per 18 septimanas pascendis; est enim 5 sept. 14 sept. $\frac{5}{2}$ boves 7 boves. Quare 8 bobus, quos 10 jugera sine incremento graminis pascere possunt per 18 septimanas,

timanas, adde hosce 7 boves, quibus pascendis solum incrementum graminis sufficit, & summa erit 15 boves. Ac denique si 10 jugera 15 bobus per 18 septimanas pascendis sufficiant, tum, per analogiam, 24 jugera per idem tempus sufficient 36 bobus.

PROB. XII.

Datis sphæricorum corporum in eâdem rectâ motorum, sibique occurrentium, magnitudinibus & motibus, determinare motus eorundem post reflexionem.

Hujus resolutio ex his dependet conditionibus, ut corpus utrumque tantum reactione patiatur quantum agit in alterum, & ut eâdem celeritate post reflexionem recedant ab invicem, quâ ante accedebant. His positis sint corporum A & B celeritates a & b respectivè; & motus (siquidem componantur ex mole & celeritate corporum) erunt aA & bB. Et si corpora ad easdem plagas tendant, & A celerius movens insequatur B, pone x decrementum motûs aA, & incrementum motûs bB, percussione exortum; & post reflectionem motus erunt $aA-x$, & $bB+x$; & celeritates $\frac{aA-x}{A}$ ac $\frac{bB+x}{B}$; quarum differentia æquatur $a-b$ differentiæ celeritatum ante reflexionem. Habetur itaque æquatio $\frac{bB+x}{B} - \frac{aA-x}{A} = a-b$, & inde per reductionem fit $x = \frac{2aAB-2bAB}{A+B}$; quo pro x in celeritatibus, $\frac{aA-x}{A}$, & $\frac{bB+x}{B}$, substituto, prodeunt $\frac{aA-aB+2bB}{A+B}$ celeritas ipsius A, & $\frac{2aA-bA+bB}{A+B}$ celeritas ipsius B, post reflexionem.

Quòd si corpora obviam eant, tum signo ipsius b ubique mutato, celeritates post reflectionem erunt $\frac{aA-aB-2bB}{A+B}$ & $\frac{2aA+bA-bB}{A+B}$: Quarum alterutra si fortè negativa obvenerit, id arguit motum illum post reflexionem ad plagam dirigi ei contrariam, ad quam A tendebat ante reflexionem. Id quod etiam de motu ipsius A in casu priori intelligendum est.

EXEMPL.

CAPUT XII. EXEMPL. Si corpora homogenea A trium librarum cum celeritatis gradibus 8, & B novem librarum cum celeritatis gradibus 2 ad easdem plagas tendant: tunc pro A, a, B & b scribe 3, 8, 9 & 2; & $\left(\frac{aA - aB + 2bB}{A + B}\right)$ evadit -1, ac $\left(\frac{2aA - bA + bB}{A + B}\right)$ 5. Recedet itaque A cum uno gradu celeritatis post reflexionem, & B cum quinque gradibus progredietur.

PROB. XIII.

Invenire tres numeros continuè proportionales quorum summa sit 20, *& quadratorum summa* 140.

Pone numerorum primum x, & secundum y; eritque tertius $\frac{yy}{x}$, adeoque $x + y + \frac{yy}{x} = 20$; & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$. Et per reductionem $xx \begin{smallmatrix}+y\\-20\end{smallmatrix} x + yy = 0$, & $x^4 \begin{smallmatrix}+yy\\-140\end{smallmatrix} xx + y^4 = 0$. Jam ut exterminetur x, pro a, b, c, d, e, f, g & h, in Reg. 3. substitue respectivè $1,\ 0,\ yy - 140,\ 0,\ y^4;\ 1,\ y - 20,$ & yy; et emerget $-yy + 280 \times y^6 : + 2yy - 40y + 260 \times 260y^4 - 40y^5 : + 3y^4 \times y^4 : - 2yy \times y^6 - 40y^5 + 400y^4 : = 0$. Et, per multiplicationem, $1600y^6 + 20800y^5 - 67600y^4 = 0$. Ac reducendo, $4yy - 52y + 169 = 0$. Sive (radice extractâ) $2y - 13 = 0$, seu $y = 6\frac{1}{2}$. Id quod etiam breviùs aliâ methodo sed minùs obviâ suprà inventum est. Porro, ut inveniatur x, substitue $6\frac{1}{2}$ pro y in æquatione $xx \begin{smallmatrix}+y\\-20\end{smallmatrix} x + yy = 0$. Et exurget $xx - 13\frac{1}{2}x + 42\frac{1}{4} = 0$, seu $xx = 13\frac{1}{2}x + 42\frac{1}{4}$. Et, extractâ radice, $x = 6\frac{3}{4} +$ vel $- \sqrt{3\frac{5}{16}}$. Nempe $6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$ est maximus quæsitorum trium numerorum, & $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$ minimus. Nam x alterutrum extremorum numerorum ambiguè designat, indeque gemini prodeunt valores, quorum alteruter potest esse x, existente altero $\frac{yy}{x}$.

Idem aliter. Positis numeris x, y & $\frac{yy}{x}$, ut antè, erit $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, seu $xx = \begin{smallmatrix}20\\-y\end{smallmatrix} x - yy$; & extractâ radice, $x = 10 - \frac{1}{2}y + \sqrt{100 - 10y - \frac{3}{4}yy}$ primus numerus: Hunc & y aufer de 20, & restat $\frac{yy}{x} = 10 - \frac{1}{2}y - \sqrt{100 - 10y - \frac{3}{4}yy}$ tertius numerus. Estque summa quadratorum a tribus hisce numeris $400 - 40y$, adeoque $400 - 40y$

$= 140$, five $y = 6\frac{1}{2}$. Invento medio numero $6\frac{1}{2}$, fubftitue eum pro y in primo ac tertio numero fuprà invento; & evadet primus $6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{1}{16}}$, ac tertius $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{1}{16}}$, ut antè. QUÆSTIONES ARITHMETICÆ.

PROB. XIV.

Invenire quatuor numeros continuè proportionales quorum duo medii fimul conftituant 12, *& duo extremi* 20.

Sit x fecundus numerus; & erit $12 - x$ tertius; $\frac{xx}{12-x}$ primus; & $\frac{144-24x+xx}{x}$ quartus; adeoque $\frac{xx}{12-x} + \frac{144-24x+xx}{x} = 20$. Et, per reductionem, $xx = 12x - 30\frac{6}{7}$, feu $x = 6 + \sqrt{5\frac{1}{7}}$. Quo invento cæteri numeri è fuperioribus dantur.

PROB. XV.

Invenire quatuor numeros continuè proportionales, quorum datur fumma a, & fumma quadratorum b.

Etfi defideratas quantitates ut plurimùm immediatè quærere folemus, fiquando tamen duæ obvenerint ambiguæ, hoc eft, quæ conditionibus omnino fimilibus præditæ funt, (ut hîc duo medii & duo extremi numerorum quatuor proportionalium) præftat alias quantitates non ambiguas quærere, per quas hæ determinantur: quemadmodum harum fummam, vel differentiam, vel rectangulum. Ponamus ergo fummam duorum mediorum numerorum effe s, & rectangulum r; & erit fumma extremorum $a-s$, & rectangulum etiam r, propter proportionalitatem. Jam ut ex his eruantur quatuor illi numeri, pone x primum & y fecundum; eritque $s-y$ tertius; & $a-s-x$ quartus; & rectangulum fub mediis $sy - yy = r$; indeque medii, $y = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}ss - r}$, & $s-y = \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - r}$. Item rectangulum fub extremis $ax - sx - xx = r$; indeq; extremi, $x = \frac{a-s}{2} + \sqrt{\frac{ss-2as+aa}{4} - r}$, & $a-s-x = \frac{a-s}{2} - \sqrt{\frac{ss-2as+aa}{4} - r}$.

Summa.

CAPUT XII. Summa quadratorum ex hisce quatuor numeris est $2ss - 2as + aa - 4r$, quæ est $= b$. Ergo $r = \frac{1}{2}ss - \frac{1}{2}as + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}b$, quo substituto pro r prodeunt quatuor numeri ut sequitur.

$$\text{Duo medii} \begin{cases} \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}. \\ \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}. \end{cases}$$

$$\text{Duo extremi} \begin{cases} \frac{a-s}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}. \\ \frac{a-s}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}. \end{cases}$$

Restat tamen etiamnum inquirendus valor ipsius s. Quare ad abbreviandos terminos pro numeris hisce substitue.

$$\frac{1}{2}s + p. \qquad \frac{1}{2}s - p. \qquad \& \qquad \frac{a-s}{2} + q. \qquad \frac{a-s}{2} - q.$$

Et pone rectangulum sub secundo & quarto æquale quadrato tertii, siquidem hæc problematis conditio nondum impleatur; eritque $\frac{as-ss}{4} - \frac{1}{2}qs + \frac{pa-ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss - ps + pp$. Pone etiam rectangulum sub primo & tertio æquale quadrato secundi; & erit $\frac{as-ss}{4} + \frac{1}{2}qs \frac{-pa+ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss + ps + pp$. Harum æquationum priorem aufer è posteriori, & restabit $qs - pa + ps = 2ps$, seu $qs = pa + ps$. Restitue jam $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}$ in locum p, & $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}$ in locum q, & habebitur $s\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss} = \overline{a+s} \times \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}$. Et quadrando $ss = -\frac{b}{a}s + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b$, seu $s = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{bb}{4aa} + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b}$; quo invento, dantur quatuor numeri quæsiti è superioribus.

PROB. XVI.

Si pensio annua librarum a per quinque annos proximè sequentes solvenda, ematur paratâ pecuniâ c, quæritur quanti æstimanda sit usura usuræ centum librarum per annum.

Pone $1 - x$ usuram usuræ pecuniæ x in anno, hoc est quod pecunia 1 post annum solvenda valeat x paratæ pecuniæ; &, per analogiam, pecunia a post annum solvenda valebit ax paratæ pecu-

niæ, poſt duos annos, axx; poſt tres, ax^3; poſt quatuor, ax^4; & poſt quinque, ax^5. Adde jam hos quinque terminos, & erit $ax^5 + ax^4 + ax^3 + axx + ax = c$, ſeu $x^5 + x^4 + x^3 + xx + x = \frac{c}{a}$, æquatio quinque dimenſionum; cujus ope cùm x, per regulas poſt docendas, inventum fuerit *, pone $x . 1 :: 100 . y$. Et erit $y - 100$ uſura uſuræ centum librarum per annum. QUÆSTIONES ARITHMETICÆ.

*Nempe inveniendo figuras primas radicis per conſtructionem quamvis mechanicam & reliquas per methodum Vietæ.

Atque has, in quæſtionibus ubi ſolæ quantitatum proportiones abſque poſitionibus linearum conſiderandæ veniunt, inſtantias dediſſe ſufficiat: Pergamus jam ad Problematum Geometricorum ſolutiones.

CAPUT DECIMUM TERTIUM.

Quomodo Quæſtiones Geometricæ ad æquationem redigantur.

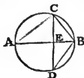
Quæſtiones *Geometricæ* eâdem facilitate iiſdemque legibus ad æquationes nonnunquam redigi poſſunt, ac quæ de abſtractis quantitatibus proponuntur. Ut ſi recta AB in extremâ & mediâ proportione ſecanda ſit in C, hoc eſt, ita ut BE, quadratum maximæ partis, ſit æquale rectangulo, BD, ſub totâ & minore parte contento: poſito $AB = a$, & $BC = x$, erit $AC = a - x$, & $xx = a$ in $a - x$; æquatio quæ per reductionem dat $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$.

E D A C B

Sed in rebus Geometricis quæ frequentiùs occurrunt, à variis linearum poſitionibus & relationibus complexis ita dependere ſolent, ut egeant ulteriori inventione & artificio, quo ad Algebraicos terminos deduci poſſint. Et licet in hujuſmodi caſibus difficile ſit aliquid præſcribere, & cujuſque ingenium ſibi debeat eſſe operandi norma: conabor tamen diſcentibus viam præſternere. Sciendum eſt itaque, quòd quæſtiones circa eaſdem lineas, definito quolibet modo ſibi invicem relatas, poſſint variè proponi, ponendo alias atque alias quærendas eſſe ex aliis atque aliis datis. Sed de quibuſcunque tamen datis vel quæſitis inſtituitur quæſtio, ſolutio ejus eâdem planè methodo ex Analyſeos ſerie perficietur, nullâ omninò circumſtantiâ variatâ præter fictas linearum ſpecies,

 ſive

CAPUT XIII. sive nomina, quibus datas à quæsitis solemus distinguere. Quemadmodum si quæstio sit de Isoscele CBD in circulum inscripto,



cujus latera BC, BD, & basis CD cum diametro circuli AB conferenda sunt: ea vel proponi potest de investigatione *diametri* ex datis lateribus & basi, vel de investigatione *basis* ex datis lateribus & diametro, vel denique de investigatione *laterum* ex datis basi & diametro: Sed utcunque proponitur, redigetur ad æquationem per eandem seriem Analyseos. Nempe si quæratur *Diameter* pono $AB = x$, $CD = a$, & BC vel $BD = b$. Tum, ductâ AC, propter similia triangula ABC & CBE, est AB. BC : : BC. BE, sive $x. b : : b.$ BE. Quare $BE = \frac{bb}{x}$. Est & $CE = \frac{1}{2}CD$, sive $\frac{1}{2}a$: et, propter angulum CEB rectum, $CEq + BEq = BCq$; hoc est, $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{xx} = bb$. Quæ æquatio, per reductionem, dabit quæsitum x.

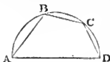
Sin quæratur *Basis*, pono $AB = c$, $CD = x$, & BC vel $BD = b$. Tum (ductâ AC) propter similia triangula ABC & CBE, est AB. BC : : BC. BE, sive $c.b :: b.$BE. Quare $BE = \frac{bb}{c}$. Est & $CE = \frac{1}{2}CD$, sive $\frac{1}{2}x$: &, propter angulum CEB rectum, $CEq + BEq = BCq$; hoc est, $\frac{1}{4}xx + \frac{b^4}{cc} = bb$; æquatio quæ per reductionem dabit quæsitum x.

Atque ita si *Latus* BC vel BD quæratur, pono $AB = c$, $CD = a$, & BC vel $BD = x$. Et (AC ut antè ductâ) propter similia triangula ABC & CBE, est AB. BC : : BC. BE; sive $c. x : : x.$ BE. Quare $BE = \frac{xx}{c}$. Est & $CE = \frac{1}{2}$ CD, sive $\frac{1}{2}a$; &, propter angulum CEB rectum, est $CEq + BEq = BCq$; hoc est, $\frac{1}{4}aa + \frac{x^4}{cc} = xx$; æquatio quæ per reductionem dabit quæsitum x.

Vides itaque quòd in unoquoque casu calculus, quo pervenitur ad æquationem, per omnia similis sit, & eandem æquationem pariat, excepto tantùm quòd lineas aliis atque aliis literis designavi, prout datæ vel quæsitæ ponuntur. Ex diversis quidem datis & quæsitis oritur diversitas in reductione æquationis inventæ: Nam æquationis, $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{xx} = bb$, alia est reductio, ut obtineatur $x = \frac{2bb}{\sqrt{4bb - aa}}$, valor de AB; & æquationis, $\frac{1}{4}xx + \frac{b^4}{cc} = bb$, alia reductio,

ductio, ut obtineatur $x = \frac{ab}{c}\sqrt{cc-bb}$, valor de CD; & æqua- tionis, $\frac{1}{4}aa + \frac{x^4}{cc} = xx$, reductio longè alia, ut obtineatur $x = \sqrt{\frac{1}{2}cc \pm \frac{1}{2}c\sqrt{cc-aa}}$, valor de BC vel BD: perinde ut hæc $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{cc} = bb$, ad eliciendum c, a, vel b diversis modis reduci debet: sed in harum æquationum inventione nulla fuit diversitas. Et hinc est quod jubent, ut nullum inter datas & quæsitas quantitates habeatur discrimen. Nam cùm eadem computatio cuique casui datorum & quæsitorum competat, convenit, ut sine discrimine concipiantur & conferantur, quo rectiùs judicetur de modis computandi: vel potiùs convenit, ut fingas quæstionem de ejusmodi datis & quæsitis propositam esse, per quas arbitreris te posse ad æquationem facillimè pervenire.

Proposito igitur aliquo Problemate, quantitates quas involvit confer, & nullo inter datas & quæsitas habito discrimine, perpende quomodo aliæ ex aliis dependeant, ut cognoscas, quænam, si assumantur, syntheticè gradiendo dabunt cæteras. Ad quod faciendum, non opus est, ut primâ fronte de modo cogites, quo aliæ ex aliis per calculum Algebraicum deduci possint; sed sufficit animadversio generalis, quòd possint directo nexu quomodocunque deduci. Verbi gratiâ; si quæstio sit de circuli diametro AD, tribusque lineis AB, BC, & CD in semicirculo inscriptis, & ex reliquis datis quæratur BC; primo intuitu manifestum est diametrum AD determinare semicirculum; dein lineas AB & CD per inscriptionem determinare puncta B & C, atque adeo quæsitum BC, idque nexu maximè directo; & quo pacto tamen BC ex his datis per Analysin eruatur, non ita manifestum est. Hoc idem quoque de AB vel CD, si ex reliquis datis quærerentur, intelligendum est. Quòd si AD ex datis AB, BC & CD quæreretur, æquè patet id non fieri posse Syntheticè; siquidem punctorum A ac D distantia dependet ex angulis B & C; & illi anguli ex circulo cui datæ lineæ sunt inscribendæ; & ille circulus non datur, ignotâ AD diametro. Rei igitur natura postulat, ut AD non Syntheticè, sed ex ejus assumptione, quæratur, ut ad data fiat regressus.



CAPUT XIII. Cùm varios ordines, quibus termini quæstionis sic evolvi possint, perspexeris, *E syntheticis quoslibet adhibe, assumendo lineas tanquam datas à quibus ad alias facillimus videtur progressus, & ad ipsas vicissim difficillimus.* Nam computatio, ut per varia media possit incedere, tamen ab istis lineis initium sumet; ac promptiùs perficietur, fingendo quæstionem ejusmodi esse, ac si de istis datis & quæsito aliquo, ab istis facillimè prodituro, institueretur, quàm de quæstione, prout reverâ, proponitur cogitando. Sic in exemplo jam allato, si ex reliquis datis quæritur AD; cùm id synthetice fieri non posse percipiam, sed ab ipso tamen, si modò daretur, discursum ad alia directo nexu incedere, assumo AD tanquam datum; & abinde computationem non secùs incipio, quàm si reverâ daretur, & aliqua ex datis, AB, BC & CD, quæreretur. Atque hâc methodo, computationem ab assumptis ad cæteras quantitates eo more promovendo quo linearum relationes dirigunt, æquatio tandem inter duos ejusdem alicujus quantitatis valores semper obtinebitur; sive ex valoribus unus sit litera, sub initio operis, quantitati pro nomine imposita, & alter per computationem inventus; sive uterque per computationem diversimodè institutam inveniatur.

Cæterùm ubi terminos quæstionis sic in genere comparaveris, plus artis & inventionis in eo requiritur, ut advertas particulares istos nexus, sive linearum relationes, quæ computationi accommodantur. Nam quæ laxiùs perpendenti videantur immediatè & relatione proximâ connecti, cùm illam relationem algebraicè designare volumus, circuitum plerumque, quoad constructiones Schematum de novo moliendas & computationem per gradus promovendam, exigunt: Quemadmodum de BC ex AD, AB & CD colligendo constare potest. Per ejusmodi enim propositiones vel enunciationes solummodò gradiendum est, quæ aptæ sunt ut terminis algebraicis designentur, quales præsertim ab Axiom. 19, Prop. 4, lib. 6, & Prop. 47, lib. 1. Elem. proveniunt.

Imprimis itaque promovetur calculus per additionem vel subductionem linearum, eò ut ex valoribus partium obtineatur valor totius, vel ex valoribus totius & unius partis obtineatur valor alterius.

Secundò promovetur ex linearum proportionalitate: ponimus enim,

enim, ut suprà, factum à mediis terminis divisum per alterutrum extremorum esse valorem alterius. Vel quod perinde est, si valores omnium quatuor proportionalium priùs habeantur, ponimus æqualitatem inter factos extremorum & factos mediorum. Linearum verò proportionalitas ex triangulorum similitudine maximè se prodit; quæ cùm ex æqualitate angulorum dignoscatur, in iis comparandis Analysta debet esse perspicax, atque adeo non ignorabit Prop. 5, 13, 15, 29, & 32. lib. 1. Prop. 4, 5, 6, 7, & 8, lib. 6. Et Prop. 20, 21, 22, 27 ac 31, lib. 3. Elementorum. Quibus etiam referri potest Prop. 3, lib. 6, ubi ex proportionalitate linearum colligitur angulorum æqualitas, & contrà. Atque idem aliquandò præstant Prop. 35 & 36, lib. 3.

Tertiò promovetur per additionem vel subductionem quadratorum. In triangulis nempe rectangulis addimus quadrata minorum laterum, ut obtineatur quadratum maximi; vel à quadrato maximi lateris subducimus quadratum unius è minoribus, ut obtineatur quadratum alterius.

Atque his paucis fundamentis (si adnumeretur Prop. 1, lib. 6, Elem. cùm de superficiebus agitur, ut & aliquæ propositiones ex lib. 11 & 12, desumptæ cùm agitur de solidis) tota Ars Analytica, quoad Geometriam rectilineam, innititur. Quin etiam ad solas linearum ex partibus compositiones & similitudines triangulorum possunt omnes Problematum difficultates reduci; adeo ut non opus sit alia Theoremata adhibere: quippe quæ omnia in hæc duo resolvi possunt, & proinde solutiones etiam quæ ex istis depromuntur. Inque hujus rei instantiam subjunxi Problema de perpendiculo in basem obliquanguli trianguli demittendo sine adjumento Prop. 47. lib. 1. solutum. Etsi verò juvet simplicissima principia à quibus problematum solutiones dependet non ignorâsse, & istis solis adhibitis posse quælibet solvere; expeditionis tamen gratià convenit, ut non solùm Prop. 47. lib. 1. Elem. cujus usus est frequentissimus; sed & alia etiam *Theoremata* nonnunquam adhibeantur.

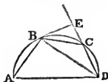
Quemadmodum si, perpendiculo in basem obliquanguli trianguli demisso, de segmentis basis ad calculum promovendum agatur; ex usu erit scire, quòd Differentia quadratorum è lateribus æquetur duplo rectangulo sub basi & distantià perpendiculi à medio basis.

CAPUT XIII. Si trianguli alicujus verticalis angulus bifecetur, computationi non folum inferviet, quòd bafis fecetur in ratione laterum, fed etiam quòd differentia factorum à lateribus & à fegmentis bafis æquetur quadrato lineæ bifecantis angulum.

Si de figuris in circulo infcriptis res eft, Theorema non rarò fubveniet, quòd Infcripti cujuflibet quadrilateri factus à diagoniis æquetur fummæ factorum à lateribus oppofitis.

Et hujufmodi plura inter exercendum obfervet Analyfta, & in penum fortè refervet; fed parciùs utatur, fi pari facilitate, aut non multo difficiliùs, poffit folutionem è fimplicioribus computandi principiis extruere. Quamobrem ad tria primò propofita tanquam notiora, fimpliciora, magis generalia, pauca, & omnibus tamen fufficientia animum præfertim advertat, & omnes difficultates ad ea præ cæteris reducere conetur.

Sed ut hujufmodi Theoremata ad folvenda Problemata accommodari poffint, *Schemata* plerumquè funt ultrà *conftruenda*, idque fæpiffimè producendo aliquas ex lineis donec fecent alias, aut fint affignatæ longitudinis; vel ab infigniori quolibet puncto ducendo lineas aliis parallelas aut perpendiculares, vel infigniora puncta conjungendo, ut & aliter nonnunquam conftruendo, prout exigunt ftatus Problematis, & Theoremata quæ ad ejus folutionem adhibentur. Quemadmodum fi duæ non concurrentes lineæ datos angulos cum tertiâ quâdam efficiant, producimus fortè, ut concurrentes conftituant triangulum, cujus anguli, & proinde laterum rationes, dantur. Vel fi quilibet angulus detur, aut fit alicui æqualis, in triangulum fæpè complemus fpecie datum, aut alicui fimile, idque vel producendo aliquas ex lineis in fchemate, vel fubtenfam aliter ducendo. Si triangulum fit obliquangulum, in duo rectangula fæpè refolvimus, demittendo perpendiculum. Si de figuris multilateris agatur, refolvimus in triangula, ducendo lineas diagonales: et fic in cæteris; ad hanc metam femper collimando, *ut fchema in triangula vel data, vel fimilia, vel rectangula, refolvatur*. Sic in exemplo propofito duco diagonium BD, ut Trapezium ABCD in duo triangula, ABD rectangulum, & BDC obliquangulum, refolvatur. Deinde refolvo triangulum obliquangulum in duo rectangula, demittendo perpendiculum à quolibet ejus



ejus angulo, B, C, vel D, in latus oppositum: quemadmodum à B in CD, productam ad E, ut huic perpendiculo BE occurrat. Interea verò cùm anguli BAD & BCD duos rectos (per 22. 3. Elem.) perindè ac BCE & BCD constituant; percipio angulos BAD & BCE æquales esse, adeoque triangula BCE ac DAB similia. Atque ita video computationem, assumendo AD, AB & BC tanquam si CD quæreretur, ad hunc modum institui posse; viz. AD & AB (propter tri. ABD rect.) dant BD. AD, AB, BD & BC, propter sim. tri. ABD & CEB, dant BE & CE. BD & BE, propter triang. BED rect. dant ED; & ED − EC dat CD. Unde continebitur æquatio inter valorem de CD sic inventum & literam pro eâ suffectam. Possumus etiam (& maximam partem satiùs est quàm opus in serie continuatâ nimis prosequi,) à diversis principiis computationem incipere, aut saltem diversis modis ad eandem quamlibet conclusionem promovere; ut duo tandem obtineantur ejusdem cujusvis quantitatis valores, qui æquales ponantur. Sic AD, AB & BC dant BD, BE & CE, ut priùs; deinde CD + CE dat ED; ac denique BD & ED, propter triang. rect. BED, dant BE. Potest etiam computatio hâc lege optimè institui, ut valores quantitatum investigentur, quibus alia quæpiam relatio cognita intercedit, & illa deinde relatio æquationem dabit. Sic cùm relatio inter lineas BD, DC, BC & CE ex Prop. 12, lib. 2, Elem. constet; nempe quòd sit $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$: Quæro BDq ex assumptis AD & AB; ac CE ex assumptis AD, AB & BC. Et, assumendo denique CD, facio $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$. Ad hos modos & hujusmodi consiliis ductus, de serie Analyseos, deque schemate propter eam construendo, semper debes unà prospicere.

De Quæst. Geometr.

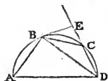
Ex his, credo, manifestum est, quid sibi velint Geometræ, cùm jubent, putes factum esse quod quæris. Nullo enim inter cognitas & incognitas quantitates habito discrimine, quaslibet ad ineundum calculum assumere potes, quasi omnes ex præviâ solutione fuissent notæ, & non ampliùs de solutione Problematis, sed de probatione solutionis ageretur. Sic in primo ex tribus jam descriptis computandi modis, etsi fortè AD reverâ quæratur, fingo tamen CD quærendum esse, quasi vellem probare an valor ejus ab

AD

CAPUT XIII. AD derivatus quadret cum ejus quantitate prius cognitâ. Sic etiam in duobus posterioribus modis, pro metâ non propono quantitatem aliquam quærendam esse, sed æquationem è relationibus linearum utcunque eruendam: et in ejus rei gratiam assumo omnes, AD, AB, BC & CD, tanquam notas; perinde ac si, quæstione priùs solutâ, de tentamine jam ageretur, an conditionibus ejus hæ probè satisfaciant, quadrando cum quibuslibet æquationibus quas linearum relationes produnt. Opus quidem hâc ratione & consiliis primâ fronte aggressus sum; sed, cùm ad æquationem deventum est, sententiam muto, & quantitatem desideratam per istius æquationis reductionem & solutionem quæro. Sic denique plures quantitates tanquam cognitas sæpenumerò assumimus, quàm in statu quæstionis exprimuntur. Hujusque rei insignem in 55° sequentium problematum instantiam videre est, ubi a, b & c in æquatione $aa + bx + cxx = yy$, pro determinatione Sectionis Conicæ assumpsi, ut & alias etiam lineas r, s, t, v de quibus Problema, prout proponitur, nihil innuit. Nam quaslibet quantitates assumere licet, quarum ope possibile sit ad æquationes pervenire: hoc solum cavendo, ut ex illis tot æquationes obtineri possint, quot assumptæ sunt quantitates reverâ incognitæ.

Postquam de computandi methodo constat, & ornatur schema, quantitatibus, quæ computationem ingredientur (hoc est ex quibus assumptis aliarum valores derivandi sunt, donec tandem ad æquationem perveniatur) nomina impone; delegendo quæ problematis omnes conditiones involvunt, & operi præ cæteris accommodatæ videntur, & conclusionem, quantum possis conjicere, simpliciorem reddent, sed non plures tamen quàm proposito sufficiunt. Itaque pro quantitatibus, quæ ex aliarum vocabulis facilè deduci possint, propria vocabula vix tribuas. Sic ex totâ lineâ & ejus partibus, ex tribus lateribus trianguli rectanguli, & ex tribus vel quatuor proportionalibus, unum aliquod minimùm sine nomine permittere solemus; eo quòd valor ejus è reliquorum nominibus facilè derivari possit. Quemadmodum in exemplo jam allato, si dicam $AD = x$ & $AB = a$, ipsum BD nullâ literâ designo; quòd sit tertium latus trianguli rectanguli ABD, & proinde valeat $\sqrt{xx-aa}$. Dein si dicam $BC = b$; cùm triangula DAB & BCE sint similia, & inde lineæ AD, AB, BC, CE proportionales, quarum tribus, AD,

AB,



AB, & EC, impofita funt nomina; ea propter quartam CE fine nomine permitto, & ejus vice valorem $\frac{ab}{x}$, ex hâc proportionalitate detectum, ufurpo. Atque ita fi DC vocetur c, ipfi DE nomen non affigno; quòd ex partibus ejus DC & CE, five c & $\frac{ab}{x}$, valor $c + \frac{ab}{x}$ prodeat.

Cæterùm dum de his moneo, Problema ad æquationem penè redactum eft. Nam poftquam literæ pro fpeciebus principalium linearum præfcriptæ funt, nihil aliud agendum reftat, quàm ut ex iftis fpeciebus valores aliarum linearum, juxta methodum præconceptam, eruantur, donec modo quovis provifo in æquationem coeant. Et in hoc cafu nihil reftare video, nifi ut per triangula rectangula BCE & BDE dupliciter eliciam BE. Nempe eft $BCq - CEq$ (five $bb - \frac{aabb}{xx}$) $= BEq$, ut & $BDq - DEq$) five $xx - aa - cc - \frac{2abc}{x} - \frac{aabb}{xx}$) $= BEq$. Et hinc, utrobique deleto $\frac{aabb}{xx}$, æquationem habebo $bb = xx - aa - cc - \frac{2abc}{x}$: quæ reducta fit

$$x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix}\, x + 2abc.$$

Cùm verò de folutione Problematis hujus plures modos, etfi non multum diffimiles, in præcedentibus recenfuerim, quorum ifte, de Prop. 12, Lib. 2, Elem. defumptus, fit cæteris quodammodo concinnior; eundem placet etiam fubjungere. Sit itaque $AD = x$, $AB = a$, $BC = b$, & $CD = c$, eritque $BDq = xx - aa$, & $CE = \frac{ab}{x}$, ut priùs. Hifce dein fpeciebus in Theorema $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$ fubftitutis, orietur $xx - aa - bb - cc = \frac{2abc}{x}$; & factâ reductione, $x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix}\, x + 2abc$; ut antè.

Sed ut pateat quanta fit in folutionum inventione varietas, & proinde quòd in eas incidere prudenti Geometræ non fit admodum difficile: vifum fuit plures adhuc modos hoc idem perficiendi docere. Atque equidem, du[illegible]iagonio BD, fi, vice perpendiculi BE à puncto B in latus DC [illegible] à demiffi, demittatur per-

 pendiculum

CAPUT XIII. pendiculum à puncto D in latus BC, vel à puncto C in latus BD, quo obliquangulum triangulum BCD in duo rectangula utcunque resolvatur, iisdem fermè, quas jam descripsi, methodis ad æquationem pervenire licet. Sunt & alii modi ab istis satis differentes.

Quemadmodum si diagonii duo AC & BD ducantur, dabitur BD ex assumptis AD & AB; ut & AC ex assumptis AD & CD; deinde, per notum Theorema de figuris quadrilateris in circulo inscriptis, nempe quòd sit AD × BC + AB × CD = AC × BD obtinebitur æquatio. Stantibus itaque linearum AD, AB, BC, CD vocabulis x, a, b, c; erit BD = $\sqrt{xx-aa}$, & AC = $\sqrt{xx-cc}$ per 47. 1. Elem. Et his linearum speciebus in Theorema jam recensitum substitutis, exibit $xb+ac=\sqrt{xx-cc}\times\sqrt{xx-aa}$. Cujus æquationis partibus denique quadratis & reductis, obtinebitur

$$\text{iterum } x^3 = \begin{matrix}+aa\\+bb\\+cc\end{matrix}\,x + 2abc.$$

Cæterùm ut pateat etiam quo pacto solutiones, ex isto Theoremate petitæ, possint inde ad solas triangulorum similitudines redigi; erigatur BH ipsi BC perpendicularis & occurrens AC in H, & fient triangula BCH, BDA similia, propter angulos ad B rectos, & ad C ac D (per 21. 3. Elem.) æquales; ut & triangula BCD, BHA similia, propter æquales angulos tum ad B (ut pateat demendo communem angulum DBH à duobus rectis,) tum ad D ac A (per 21. 3. Elem.) Videre est itaque, quòd ex proportionalitate, BD. AD :: BC. HC, detur HC; ut & AH ex proportionalitate BD. CD :: AB. AH. Unde cùm sit AH + AC = AC, habebitur æquatio. Stantibus ergo præfatis linearum vocabulis x, a, b, c, nec non ipsarum AC & BD valoribus, $\sqrt{xx-cc}$, & $\sqrt{xx-aa}$; prima proportionalitas dabit HC = $\frac{bx}{\sqrt{xx-aa}}$; & secunda dabit AH = $\frac{ac}{\sqrt{xx-aa}}$. Unde propter AA + HC = AC erit $\frac{bx+ac}{\sqrt{xx-aa}}=\sqrt{xx-cc}$; æquatio quæ, multiplicando per $\sqrt{xx-aa}$, & quadrando, reducetur ad formam in præcedentibus sæpiùs descriptam.

Adhæc ut magis pateat quanta sit solvendi copia; producantur BC & AD donec conveniant in F, & fient triangula ABF & CDF similia,

ſimilia, quippe quorum angulus ad F communis eſt, & anguli ABF & CDF (dum complent ang. CDA ad duos rectos per 13. 1 & 22. 3. Elem.) æquales. Quamobrem, ſi præter quatuor terminos de quibus inſtituitur quæſtio, daretur AF, proportio, AB. AF : : CD. CF, daret CF. Item AF − AD daret DF; & proportio, CD. DF : : AB. BF, daret BF; unde, cùm ſit BF − CF = BC, emergeret æquatio. Sed cùm duæ quantitates incognitæ, AD ac DF, tanquam datæ aſſumantur, reſtat alia æquatio invenienda. Demitto ergo BG in AF ad rectos angulos, & proportio, AD. AB : : AB. AG, dabit AG; quo habito, Theorema è 13. 2. Elem. petitum, nempe quòd ſit BFq + 2FAG = ABq + AFq, dabit æquationem alteram. Stantibus ergo a, b, c, x ut priùs, & dicto AF $= y$: erit, inſiſtendo veſtigiis Theoriæ jam excogitatæ, $\frac{cy}{a}$ = CF. $y - x$ = DF. $\frac{\overline{y-x} \times a}{c}$ = BF. Indeque $\frac{\overline{y-x} \times a}{c} - \frac{cy}{a} = b$, æquatio prima. Erit etiam $\frac{aa}{x}$ = AG, adeoque $\frac{aayy - 2aaxy + aaxx}{cc} + \frac{2aay}{x} = aa + yy$, æquatio ſecunda. Quæ duæ, per reductionem, dabunt æquationem deſideratam. Nempe valor ipſius y, per æquationem priorem, inventus eſt $\frac{abc + aax}{aa - cc}$; qui in ſecundam ſubſtitutus, dabit æquationem ex quâ rectè diſpoſitâ fiet

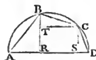
$$x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix} x + 2abc,$$ ut antè.

Atque ita ſi AB ac DC producantur donec ſibi mutuò occurrant, ſolutio haud aliter ſe habebit, niſi fortè futura ſit paulò facilior. Quare aliud hujus rei ſpecimen, è fonte multum diſſimili petitum, potiùs ſubjungam, quærendo nempe aream quadrilateri propoſiti, idque dupliciter. Duco igitur diagonium BD, ut in duo triangula quadrilaterum reſolvatur. Dein, uſurpatis linearum vocabulis x, a, b, c ut antè, invenio BD $= \sqrt{xx - aa}$; indeque $\frac{1}{2}a\sqrt{xx - aa}$ ($= \frac{1}{2}$ AB × BD) aream trianguli ABD. Porro, demiſſo BE perpendiculariter in CD, erit (propter ſimilia triangula ABD, BCE) AD. BD : : BC. BE, & proinde BE $= \frac{b}{x}\sqrt{xx - aa}$. Quare

 etiam

CAPUT XIII. etiam $\frac{bc}{2x}\sqrt{xx-aa}$ ($=\frac{1}{2}$ CD × BE) erit area trianguli BCD. Hasce jam areas addendo, orietur $\frac{ax+bc}{2x}\sqrt{xx-aa}$ area totius quadrilateri. Non secùs, ducendo diagonium AC, & quærendo areas triangulorum ACD & ACB, easque addendo, rursus obtinebitur area quadrilateri $\frac{cx+ba}{2x}\sqrt{xx-cc}$. Quare, ponendo hasce areas æquales & utrasque multiplicando per $2x$, habebitur $\overline{ax+bc}\sqrt{xx-aa} = \overline{cx+ba}\times\sqrt{xx-cc}$; æquatio quæ, quadrando ac dividendo per $aax-ccx$, redigetur ad formam sæpiùs inventam $x^3 = \begin{matrix}+aa\\+bb\\+cc\end{matrix}\,x + 2abc$.

Ex his constare potest quanta sit solvendi copia; & obiter quòd alii modi sint aliis multo concinniores. Quapropter si in primas de solutione Problematis alicujus cogitationes modus computationi malè accommodatus inciderit, relationes linearum iterùm evolvendæ sunt, donec modum quàm poteris idoneum & elegantem machinatus fueris. Nam quæ leviori curæ se offerunt laborem satis molestum plerumque parient, si ad opus adhibeantur. Sic in Problemate de quo agitur, nil difficilius foret in sequentem modum quàm in aliquem è præcedentibus incidere.



Demissis nempe BR & CS ad AD nomalibus, ut & CT ad BR, figura resolvetur in triangula rectangula. Et videre est, quòd AD & AB dant AR; AD & CD dant SD; AD − AR − SD dat RS, vel TC. Item AB & AR dant BR; CD & SD dant CS, vel TR; & BR − TR dat BT. Denique BT ac TC dant BC, unde obtinebitur æquatio. Siquis autem hoc modo computationem aggressus fuerit, is in terminos Algebraicos profusiores, quàm sunt ulli præcedentium, incidet, & ad finalem æquationem ægriùs reducibiles.

Et hæc de solutione problematum in rectilineâ Geometriâ; nisi fortè operæ pretium fuerit annotâsse præterea, quòd cùm anguli, sive positiones linearum per angulos expressæ, statum quæstionis ingrediuntur, angulorum vice debent adhiberi lineæ aut linearum proportiones; tales nempe quæ ab angulis datis possunt, per calculum Trigonometricum, derivari; aut à quibus inventis anguli quæsiti, per eundem calculum, prodeunt; hoc est, quæ se mutuò

mutuò determinant: cujus rei plures inſtantias videre eſt in ſequentibus.

Quod ad Geometriam circa lineas curvas attinet, illæ deſignari ſolent vel deſcribendo eas per motum localem rectarum, vel adhibendo æquationes indefinitè exprimentes relationem rectarum certâ aliquâ lege diſpoſitarum, & ad curvas deſinentium. Idem fecerunt Veteres per ſectiones Solidorum, ſed minùs commodè. Computationes verò, quæ curvas primo modo deſcriptas reſpiciunt, haud ſecùs quàm in præcedentibus peraguntur. Quemadmodum ſi AKC ſit curva linea deſcripta per K, verticale punctum normæ AKφ, cujus unum crus, AK, per punctum A, poſitione datum, liberè dilabitur, dum alterum, Kφ, datæ longitudinis, ſuper rectam AD poſitione datam promovetur; & quæratur punctum C, in quo recta quævis CD, poſitione data, hanc curvam ſecabit: duco rectas ACF, quæ normam in poſitione quæſitâ referant, & relatione linearum (ſine aliquo dati & quæſiti diſcrimine aut reſpectu ad curvam) conſideratâ, percipio dependentiam cæterarum à CF, et quâlibet harum quatuor BC, BF, AF & AC, Syntheticam eſſe; quarum duas itaque, ut $CF = a$ & $CB = x$, aſſumo; & inde computum ordiendo ſtatim lucratus ſum $BF = \sqrt{aa - xx}$, & $AB = \frac{xx}{\sqrt{aa - xx}}$; propter ang. rectum CBF, lineaſque BF, BC, BC, AB continuè proportionales. Porro ex datâ poſitione CD, datur AD; quam itaque dico b; datur etiam ratio BC ad BD, quam pono d ad e; & fit $BD = \frac{ex}{d}$, & $AB = b - \frac{ex}{d}$. Eſt ergo $b - \frac{ex}{d} = \frac{xx}{\sqrt{xx - aa}}$; æquatio quæ, quadrando partes & multiplicando per $aa - xx$ &c. reducetur ad hanc formam $x^4 = \frac{2bdex^3 \begin{smallmatrix} -bbdd \\ +aaee \end{smallmatrix} xx - 2aabdex + aabbdd}{dd + ee}$; unde demum, è datis a, b, d & e, erui debet x, per regulas poſt tradendas; & intervallo iſto x, ſive BC, acta ipſi AD parallela recta ſecabit CD in quæſito puncto C.

Quòd ſi non deſcriptiones Geometricæ, ſed æquationes, pro curvis lineis deſignandis adhibeantur, computationes eo pacto faciliores & breviores evadent, in quantum ejuſmodi æquationes ipſis lucro

CAPUT XIII. lucro cedunt. Quemadmodum si datæ Ellipseos, ACE, interfectio c cum rectâ CD positione datâ quæratur; pro Ellipsi designandâ sumo notam aliquam æquationem ei propriam, ut $rx - \frac{r}{q}xx = yy$, ubi x indefinitè ponitur pro quâlibet axis parte Ab vel AB, & y pro perpendiculo bc, vel BC, ad curvam terminato; r vero & q dantur ex datâ specie Ellipsis. Cùm itaque CD positione detur, dabitur & AD, quam dic a, & erit BD $a - x$; dabitur etiam angulus ADC, & inde ratio BD ad BC, quam dic 1 ad e; & erit BC (y) $= ea - ex$; cujus quadratum $ccaa - 2eeax + eexx$ æquabitur $rx - \frac{r}{q}xx$. Indeque, per reductionem, orietur $xx = \frac{2aeex + rx - aaee}{ee + \frac{r}{q}}$, seu $x = \frac{aee + \frac{1}{2}r \pm e\sqrt{ar + \frac{rr}{4ee} - \frac{aar}{q}}}{ee + \frac{r}{q}}$.

Quinetiam etsi Curva per descriptionem Geometricam, vel per sectionem solidi, designetur, potest tamen inde æquatio obtineri, quæ naturam Curvæ definiet, adeoque huc omnes Problematum, quæ circa eam proponuntur, difficultates reduci.

Sic in exemplo priori, si AB dicatur x, & BC, y, tertia proportionalis BF erit $\frac{yy}{x}$; cujus quadratum unà cum quadrato BC æquatur CF q, hoc est $\frac{y^4}{xx} + yy = aa$; sive $y^4 + xxyy = aaxx$. Estque hæc æquatio, quâ Curvæ AKC unumquodque punctum C unicuique basis longitudini AB congruens, adeoque ipsa Curva, definitur; & è quâ proinde solutiones Problematum, quæ de hâc curvâ proponuntur, petere liceat.

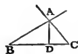
Ad eundem ferè modum, cùm curva non datur specie, sed determinanda proponitur, possis pro arbitrio æquationem fingere, quæ naturam ejus generaliter contineat; & hanc pro eâ designandâ, tanquam si daretur, assumere; ut ex ejus assumptione quomodocunque preveniatur ad æquationes, ex quibus assumpta tandem determinentur: Cujus rei exempla habes in nonnullis sequentium problematum, quæ, in pleniorem illustrationem hujus doctrinæ & exercitium discentium, congessi, quæque jam pergo tradere.

CAPUT

CAPUT DECIMUM QUARTUM.

PROB. I.

Datâ rectâ terminatâ, BC, *a cujus extremitatibus duæ rectæ,* BA, CA, *ducuntur in datis angulis,* ABC, ACB*: Invenire* AD *altitudinem concursûs* A *supra datam* BC.



SIT $BC=a$, & $AD=y$; & cùm angulus ABD detur, dabitur, ex tabulâ sinuum vel tangentium, ratio inter lineas AD & BD, quam pone ut d ad e. Est ergo $d.e::AD\,(y)\,BD$. Quare $BD = \frac{ey}{d}$. Similiter, propter datum angulum ACD, dabitur ratio inter AD ac DC, quam pone ut d ad f, & erit $DC = \frac{fy}{d}$. At $BD+DC = BC$, hoc est $\frac{ey}{d} + \frac{fy}{d} = a$. Quæ reducta, multiplicando utramque partem æquationis per d, ac dividendo per $e+f$, evadit $y = \frac{ad}{e+f}$.

PROB. II.

Cujuslibet Trianguli, ABC, *datis lateribus,* AB, AC, *&* *Basi,* BC, *quam perpendiculum,* AD, *ab angulo verticali, secat in* D: *Invenire segmenta* BD *ac* DC.

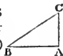
SIT $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, & $BD = x$, eritque $DC = c-x$. Jam cùm $ABq - BDq\ (aa-xx) = ADq$; & $ACq - DCq\ (bb-cc+2cx-xx) = ADq$: Erit $aa-xx = bb-cc+2cx-xx$; quæ per reductionem fit $\frac{aa-bb+cc}{2c} = x$.

Cæterùm ut pateat omnes omnium Problematum difficultates, per solam linearum proportionalitatem, sine adminiculo Prop. 47. primi Elementorum, licet non absque circuitu, enodari posse; placuit sequentem hujus solutionem, ex abundanti, subjungere. A puncto D in latus AB demitte DE normalem, &, stantibus jam positis

 positis linearum nominibus, erit AB. BD :: BD. BE. $a. x :: x. \frac{xx}{a}$. Et BA − BE $(a - \frac{xx}{a})$ = EA. Nec non EA. AD :: AD. AB, adeoque EA × AB $(aa - xx)$ = ADq. Et sic ratiocinando circa triangulum ACD, invenietur iterùm AD$q = bb - cc + 2cx - xx$. Unde obtinebitur, ut antè, $x = \frac{aa - bb + cc}{2c}$.

PROB. III.

Trianguli rectanguli, ABC, *perimetro & areâ datis, invenire hypotenusam* BC.



ESTO perimeter a, area bb, BC $= x$, & AC $= y$; eritque AB $= \sqrt{xx-yy}$; unde rursus perimeter (BC + AC + AB) est $x + y + \sqrt{xx-yy}$, & area ($\frac{1}{2}$AC × AB) est $\frac{1}{2}y\sqrt{xx-yy}$. Adeoque $x + y + \sqrt{xx-yy} = a$, & $\frac{1}{2}y\sqrt{xx-yy} = bb$.

Harum æquationum posterior dat $\sqrt{xx-yy} = \frac{2bb}{y}$; quare scribo $\frac{2bb}{y}$ pro $\sqrt{xx-yy}$ in æquatione priori, ut assymmetria tollatur; & prodit $x + y + \frac{2bb}{y} = a$; sive multiplicando per y, & ordinando, $yy = ay - xy - 2bb$. Porro ex partibus æquationis prioris aufero $x+y$, & restat $\sqrt{xx-yy} = a-x-y$, cujus partes quadrando, ut assymmetria rursus tollatur, prodit $xx-yy = aa-2ax-2ay+xx+2xy+yy$, quæ in ordinem redactâ & per 2 divisa fit $yy = ay-xy+ax-\frac{1}{2}aa$. Denique ponendo æqualitatem inter duos valores ipsius yy, habeo $ay-xy-2bb = ay-xy+ax-\frac{1}{2}aa$, quæ reducta fit $\frac{1}{2}a - \frac{2bb}{a} = x$.

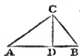
Idem aliter.

Esto $\frac{1}{2}$ perimeter $= a$, area $= bb$, & BC $= x$, eritque AC + AB $= 2a-x$. Jam cùm sit xx (BCq) = ACq + ABq, & $4bb$ = 2AC × AB, erit $xx + 4bb$ = ACq + ABq + 2AC × AB = quadrato ex AC + AB = quadrato ex $2a-x = 4aa-4ax+xx$. Hoc est $xx+4bb = 4aa-4ax+xx$; quæ reducta fit $a - \frac{bb}{a} = x$.

PROB. IV.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

Dato trianguli rectanguli perimetro & perpendiculo, invenire triangulum.



TRianguli ABC sit C rectus angulus, & CD perpendiculum inde ad basem AB demissum. Detur $AB+BC+AC=a$, & $CD=b$. Pone basem $AB=x$, & erit laterum summa $a-x$. Pone laterum differentiam y, & erit majus latus $AC=\frac{a-x+y}{2}$; minus $BC=\frac{a-x-y}{2}$. Jam ex naturâ trianguli rectanguli est $ACq+BCq=ABq$, hoc est $\frac{aa-2ax+xx+yy}{2}=xx$. Est & AB.AC::BC.DC, adeoque $AB\times DC=AC\times BC$, hoc est $bx=\frac{aa-2ax+xx-yy}{4}$. Per priorem æquationem est $yy=xx+2ax-aa$. Per posteriorem $yy=xx-2ax+aa-4bx$. Adeoque $xx+2ax-aa=xx-2ax+aa-4bx$. Et per reductionem $4ax+4bx=2aa$, sive $x=\frac{aa}{2a+2b}$.

Geometricè sic. In omni triangulo rectangulo, ut est summa perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita dimidium perimetri ad basem.

Aufer $2x$ de a, & restabit $\frac{ab}{a+b}$ excessus laterum super basem. Unde rursus, Ut in omni triangulo rectangulo summa perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita perpendiculum ad excessum laterum super basem.

PROB. V.

Datis trianguli rectanguli basi, AB, *& summâ perpendiculi & laterum,* $CA+CB+CD$, *invenire triangulum.*

ESTO $CA+CB+CD=a$, $AB=b$, $CD=x$, & erit $AC+CB=a-x$. Pone $AC-CB=y$, & erit $AC=\frac{a-x+y}{2}$, & $CB=\frac{a-x-y}{2}$. Est autem $ACq+CBq=ABq$, hoc est $\frac{aa-2ax+xx+yy}{2}=bb$. Est & $AC\times CB=AB\times CD$, hoc est $\frac{aa-2ax+xx-yy}{4}=bx$. Quibus comparatis, fit $2bb-aa+2ax-xx=yy=aa-2ax+xx-4bx$. Et, per reductionem, $xx=2ax+2bx-aa+bb$, & $x=a+b-\sqrt{2ab+2bb}$.

 Geometricè

 Geometricè sic. In omni triangulo rectangulo de summâ perimetri & perpendiculi aufer mediam proportionalem inter eandem summam & duplum basis, & restabit perpendiculum.

Idem aliter.

Sit CA+CB+CD$=a$, AB$=b$, & AC$=x$, & erit BC$=\sqrt{bb-xx}$; CD$=\frac{x\sqrt{bb-xx}}{b}$. Et $x+$ CB $+$ CD $=a$, sive CB $+$ CD $=a-x$, atque adeo $\frac{b+x}{b}\sqrt{bb-xx}=a-x$. Et, quadratis partibus atque multiplicatis per bb, fiet $-x^4-2bx^3+2b^3x+b^4=aabb-2abbx+bbxx$. Quâ æquatione per transpositionem partium ad hunc modum ordinatâ, $x^4+2bx^3 \begin{smallmatrix}+3bb\\+2ab\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}+2abb\\+2b^3\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}+b^4\\+2ab^3\\+aabb\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}+2ab\\2bb\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}+4abb\\+4b^3\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}+2ab^3\\+2b^4\end{smallmatrix}$, & extractâ utrobique radice, orietur $xx+bx+bb+ab=\overline{x+b}\sqrt{2ab+2bb}$. Et extractâ iterum radice $x=-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{2}bb+\frac{1}{2}ab}\pm\sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}bb+\frac{1}{2}ab}-\frac{1}{4}bb-\frac{1}{2}ab}$.

Constructio Geometrica.

A B F D E C F

Cape igitur AB $=\frac{1}{2}b$, BC $=\frac{1}{2}a$, CD $=\frac{1}{2}$AB, AE mediam proportionalem inter b & AC, & EF hinc inde mediam proportionalem inter b & DE, & erunt BF, BF duo latera trianguli.

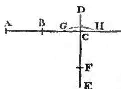
P R O B. VI.

Datis in triangulo rectangulo, ABC, *summâ laterum,* AC+BC, *&* *perpendiculo* CD, *invenire triangulum. (Vide fig.* Prob. VII.)

SIT AC + BC $=a$, CD $=b$, AC $=x$, & erit BC $=a-x$, AB $=\sqrt{aa-2ax+2xx}$. Est & CD. AC :: BC. AB. Ergo rursus AB $=\frac{ax-xx}{b}$. Quare $ax-xx=b\sqrt{aa-2ax+2xx}$; & partibus quadratis & ordinatis, $x^4-2ax^3 \begin{smallmatrix}+aa\\-2bb\end{smallmatrix} xx+2abbx-aabb=0$. Adde ad utramque partem $aabb+b^4$, & fiet $x^4-2ax^3 \begin{smallmatrix}+aa\\-2bb\end{smallmatrix} xx+2abbx+b^4=aabb+b^4$. Et, extractâ utrobique radice, $xx-ax-bb=-b\times\sqrt{aa+bb}$; &, radice iterum extractâ, $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb-b\sqrt{aa+bb}}$.

Constructio

Constructio Geometrica.



Problemata Geometrica.

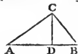
Cape AB = BC = $\frac{1}{2}a$. Ad C erige perpendiculum CD = b. Produc DC ad E ut fit DE = DA. Et inter CD & CE cape medium proportionale CF. Centroque F, radio BC defcriptus circulus GH fecet rectam BC in G & H, & erunt BG & BH latera duo trianguli.

Idem aliter.

Sit AC + BC = a, AC − BC = y, AB = x, ac DC = b, & erit $\frac{a+y}{2}$ = AC; $\frac{a-y}{2}$ = BC; $\frac{aa+yy}{2}$ = ACq + BCq = ABq = xx. $\frac{aa-yy}{4b} = \frac{AC \times BC}{DC}$ = AB = x. Ergo $2xx - aa = \overline{yy = aa} - 4bx$, & $xx = aa - 2bx$; &, extractâ radice, $x = -b + \sqrt{bb + aa}$. Unde in fuperiori constructione eft CE Hypotenufa trianguli quæfiti. Datâ autem bafi & perpendiculo, tam in hoc quàm in fuperiore Problemate, triangulum fic expeditè conftruitur. Fac parallelogrammum, CG, cujus latus, CE, erit bafis trianguli, latus alterum, CF, perpendiculum Et fuper CE defcribe femicirculum fecantem latus oppofitum, FG, in H. Age CH, EH, & erit CHE triangulum quæfitum.

PROB. VII.

In triangulo rectangulo, datis fummâ laterum, & fummâ perpendiculi & bafis, invenire triangulum.



SIT laterum AC & BC fumma a; bafis AB & perpendiculi CD fumma b; latus AC = x; bafis AB = y; & erit BC = $a-x$; CD = $b-y$; $aa - 2ax + 2xx$ = ACq + BCq = ABq = yy; $ax - xx$ = AC × BC = AB × CD = $by - yy = by - aa + 2ax - 2xx$; & $by = aa - ax + xx$. Hujus quadratum $a^4 - 2a^3x + 3aaxx - 2ax^3 + x^4$, pone æquale yy in bb, hoc eft æquale $aabb - 2abbx + 2bbxx$. Et, ordinatâ æquatione, fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix}+3aa\\-2bb\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}-2a^3\\+2abb\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}+a^4\\-aabb\end{smallmatrix} = 0$. Ad utramque partem æquationis adde $b^4 - aabb$, & fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix}+3aa\\-2bb\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}-2a^3\\+2abb\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}+a^4\\-2aabb\\+b^4\end{smallmatrix} =$

 $b^4 -$

CAPUT XIV. $b^4 - aabb$. Et, extractâ utrobique radice, $xx - ax + aa - bb = -b\sqrt{bb - aa}$; &, radice iterum extractâ, $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{bb - \frac{3}{4}aa - b\sqrt{bb - aa}}$.

Constructio Geometrica.

Cape R mediam proportionalem inter $b + a$ & $b - a$; & S mediam proportionalem inter R & $b - $R; & T mediam proportionalem inter $\frac{1}{2}a + $S & $\frac{1}{2}a - $S; & erunt $\frac{1}{2}a + $T & $\frac{1}{2}a - $T, latera trianguli.

P R O B. VIII.

Trianguli cujuscunque, ABC, *datis areâ, perimetro, & uno angulorum,* A, *cætera determinare.*

ESTO perimeter $= a$, & area $= bb$, & ab ignotorum angulorum alterutro, C, ad latus oppositum AB demitte perpendiculum CD; & propter angulum A datum, erit AC ad CD in datâ ratione, puta d ad e. Dic ergo AC $= x$, & erit CD $= \frac{ex}{d}$; per quam divide duplam aream, & prodibit $\frac{2bbd}{ex} = $ AB. Adde AD (nempe $\sqrt{ACq - CDq}$, sive $\frac{x}{d}\sqrt{dd - ee}$) & emerget BD $= \frac{2bbd}{ex} + \frac{x}{d}\sqrt{dd - ee}$; cujus quadrato adde CD$q$, & orietur $\frac{4b^4dd}{eexx} + xx + \frac{4bb}{e} \times \sqrt{dd - ee} = $ BCq. Adhæc à perimetro aufer AC & AB, & restabit $a - x - \frac{2bbd}{ex} = $ BC; cujus quadratum $aa - 2ax + xx - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e} + \frac{4b^4dd}{eexx}$ pone æquale quadrato prius invento; &, neglectis æquipollentibus, erit $\frac{4bb}{e}\sqrt{dd - ee} = aa - 2ax - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e}$. Et hæc, assumendo $4af$ pro datis terminis $aa + \frac{4bbd}{e} - \frac{4bb}{e} \times \sqrt{dd - ee}$, & reducendo, evadit $xx = 2fx - \frac{2bbd}{e}$, sive $x = f \pm \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$.

Eadem æquatio prodiisset etiam quærendo crus AB; nam crura AB & AC similiter se habent ad omnes conditiones problematis. Quare si AC ponatur $f - \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$, erit AB $= f + \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$, & vicissim; atque horum summa $2f$ subducta de perimetro relinquit tertium latus BC $= a - 2f$.

PROB.

PROB. IX.

Datis altitudine, basi, & summâ laterum invenire triangulum.

SIT altitudo CD $= a$, basis AB dimidium $= b$, laterum semisumma $= c$, & semidifferentia $= z$; eritque majus latus, puta BC $= c + z$, & minus AC $= c - z$. Subduc CDq de BCq & ACq, & exibit hinc BD $= \sqrt{cc + 2cz + zz - aa}$, & inde AD $= \sqrt{cc - 2cz + zz - aa}$. Subduc etiam AB de BD, & exibit iterum AD $= \sqrt{cc + 2cz + zz - aa} - 2b$. Quadratis jam valoribus AD, & ordinatis terminis, orietur $bb + cz = b\sqrt{cc + 2cz + zz - aa}$. Rursusque quadrando & redigendo in ordinem, obtinebitur $cczz - bbzz = bbcc - bbaa - b^4$. Et $z = b\sqrt{1 - \frac{aa}{cc - bb}}$. Unde dantur latera.

PROB. X.

Datis basi, AB, *summâ laterum,* AC + BC, *& angulo verticali* C, *determinare latera.*

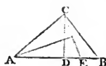
SIT basis $= a$, semisumma laterum $= b$, & semidifferentia $= x$, eritque majus latus BC $= b + x$, & minus AC $= b - x$. Ab alterutro ignotorum angulorum A ad latus oppositum BC demitte perpendiculum AD; &, propter angulum C datum, dabitur ratio AC ad CD, puta d ad e, & proinde erit CD $= \frac{eb - ex}{d}$. Est etiam, per 13. II. Elementorum, $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC}$, hoc est $\frac{2bb + 2xx - aa}{2b + 2x}$, $=$ CD; adeoque habetur æquatio inter valores CD. Et hæc reducta fit $x = \sqrt{\frac{aad + 2abe - 2bbd}{2d + 2e}}$. Unde dantur latera.

Si anguli ad basin quærerentur, conclusio foret concinnior; utpote ducatur EC datum angulum bisecans & basi occurrens in E; & erit AB. AC + BC (: : AE. AC) : : sin. ang. ACE. sin. ang. AEC. Et ab angulo AEC, ejusque complemento BEC, si subducatur dimidium anguli C, relinquentur anguli ABC, & BAC.

PROB.

PROB. XI.

Datis Trianguli lateribus invenire angulos.



Dentur latera AB $= a$, AC $= b$, BC $= c$, quæratur angulus A. Demiſſo ad AB perpendiculo CD, quod angulo iſti opponitur, erit imprimis $bb - cc =$ ACq $-$ BCq $=$ ADq $-$ BDq $= \overline{\text{AD}+\text{BD}} \times \overline{\text{AD}-\text{BD}} = \text{AB} \times \overline{2\text{AD}-\text{AB}} = 2\text{AD} \times a - aa$. Adeoque $\frac{1}{2}a + \frac{bb-cc}{2a} =$ AD. Unde prodit hocce *primum Theorema.*

I. Ut AB, ad AC + BC, ita AC − BC, ad quartam proportionalem N. $\frac{\text{AB}+\text{N}}{2} =$ AD. Ut AC ad AD, ia radius ad Coſinum anguli A.

Adhæc DCq $=$ ACq $-$ ADq $= \frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4}{4aa} = \frac{\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c} \times \overline{a-b+c} \times \overline{-a+b+c}}{4aa}$. Unde, multiplicatis numeratoris & denominatoris radicibus per b, conflatur hocce *Theorema ſecundum.*

II. Ut $2ab$ ad medium proportionale inter $\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c}$, & $\overline{a-b+c} \times \overline{-a+b+c}$, ita radius ad ſinum anguli A.

Inſuper in AB cape AE $=$ AC, & age CE, & erit angulus ECD æqualis dimidio anguli A. Aufer AD de AE, & reſtabit DE $= b - \frac{1}{2}a - \frac{bb-cc}{2a} = \frac{cc - aa + 2ab - bb}{2a} = \frac{\overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}}{2a}$. Unde DE$q$ $= \frac{\overline{c+a-b} \times \overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b} \times \overline{c-a+b}}{4aa}$. Et hinc conſit *Theorema tertium quartumque*, viz.

III. Ut $2ab$ ad $\overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}$ (ita AC ad DE) ita radius ad ſinum verſum anguli A

IV. Et, ut medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$ (ita CD ad DE) ita radius ad tangentem dimidii anguli A, vel dimidii cotangens ad radium.

Præterea eſt CEq $=$ CDq $+$ DEq $= \frac{2abb + bcc - baa - b^3}{a} = \frac{b}{a} \times \overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}$. Unde *Theorema quintum & ſextum.*

V. Ut

V. Ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$, vel ut 1 ad medi. proportionale inter $\frac{c+a-b}{2a}$, & $\frac{c-a+b}{2b}$ (ita AC ad $\frac{1}{2}$CE vel CE ad DE) ita radius ad ſinum dimidii anguli A. PROBLEMATA GEOMETRICA.

VI. Et ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ (ita CE ad CD) ita radius ad coſinum dimidii anguli A.

Si præter angulos deſideretur etiam area trianguli, duc CDq in $\frac{1}{4}$ABq, & radix *viz.* $\frac{1}{4}\sqrt{\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c} \times \overline{a-b+c} \times \overline{-a+b+c}}$, erit area illa quæſita.

P R O B. XII.

Trianguli cujuſvis rectilinei datis lateribus & baſi, invenire ſegmenta baſis, perpendiculum, aream & angulos.

TRianguli ABC dentur latera AC, BC & baſis AB. Biſeca AB in I, & in eâ utrinque productâ cape AF & AE æquales AC, atque BG & BH æquales BC. Junge CE, CF; & à C ad baſem demitte perpendiculum CD. Et erit $ACq - BCq = ADq + CDq - CDq - BDq = ADq - BDq = \overline{AD+BD} \times \overline{AD-BD} = AB \times 2DI$. Ergo $\frac{ACq - BCq}{2AB} = DI$. Et $2AB.\ AC + BC :: AC - BC.\ DI$. Quod eſt Theorema pro determinandis ſegmentis baſis.

C

F A H I D E B G

De IE, hoc eſt de $AC - \frac{1}{2}AB$, aufer DI, & reſtabit $DE = \frac{BCq - ACq + 2AC \times AB - ABq}{2AB}$, hoc eſt $= \frac{\overline{BC + AC - AB} \times \overline{BC - AC + AB}}{2AB}$, ſive $= \frac{HE \times EG}{2AB}$. Aufer DE de FE ſive 2AC, & reſtabit $FD = \frac{ACq + 2AC \times AB + ABq - BCq}{2AB}$, hoc eſt $= \frac{\overline{AC + AB + BC} \times \overline{AC + AB - BC}}{2AB}$, ſive $= \frac{FG \times FH}{2AB}$. Et cùm ſit CD medium proportionale inter DE ac DF, CE medium proportionale inter DE et EF, ac CF medium proportionale inter DF & EF: erit $CD = \frac{\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}}{2AB}$, $CE = \sqrt{\frac{AC \times HE \times FG}{AB}}$; & $CF = \sqrt{\frac{AC \times FG \times FH}{AB}}$. Duc CD in $\frac{1}{2}$AB, & habebitur area =

$\frac{1}{4}\sqrt{}$

Caput XIV. $\frac{1}{4}\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$. Pro angulo verò A determinando prodeunt Theoremata multiplicia, *viz.*

1. $2AB \times AC : HE \times EG$ (:: AC. DE) :: radius ad finum versum anguli A.

2. $2AB \times AC. FG \times FG$ (:: AC. FD) :: radius ad cófin verf. A.

3. $2AB \times AC. \sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$ (:: AC. CD) :: rad. ad fin. A.

4. $\sqrt{FG \times FH}. \sqrt{HE \times EG}$ (:: CF. CE) :: rad. ad tang. $\frac{1}{2}$A.

5. $\sqrt{HE \times EG}. \sqrt{FG \times FH}$ (:: CE. FC) :: rad. ad cotang. $\frac{1}{2}$A.

6. $2\sqrt{AB \times AC}. \sqrt{HE \times EG}$ (:: FE. CE) :: rad. ad fin. $\frac{1}{2}$A.

7. $2\sqrt{AB \times AC}. \sqrt{FG \times FH}$ (:: FE. FC) :: rad. ad cofin. $\frac{1}{2}$A.

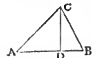
PROB. XIII.

Datum angulum, CBD, *rectâ datâ,* CD, *fubtendere; ita ut fi à termino iftius rectæ,* D, *ad punctum* A *in rectâ* CB *productâ datum agatur* AD, *fuerit angulus* ADC *æqualis angulo* ABD.

Dicatur $CD = a$, $AB = b$, $BD = x$, & erit BD. BA :: CD. $DA = \frac{ab}{x}$. Demitte perpendiculum DE, erit $BE = \frac{BDq - ADq + BAq}{2BA} = \frac{xx - \frac{aabb}{xx} + bb}{2b}$. Ob datum angulum DBA, pone BD. BE :: $b. e$, & habebitur iterum $BE = \frac{ex}{b}$: ergo $xx - \frac{aabb}{xx} + bb = 2ex$. Et $x^4 - 2ex^3 + bbxx - aabb = 0$.

PROB. XIV.

Invenire Triangulum, ABC, *cujus tria latera,* AB, AC, BC, *& perpendiculum* DC, *funt in Arithmeticâ progreffione.*



Dic $AC = a$, $BC = x$; & erunt $DC = 2x - a$, & $AB = 2a - x$. Erunt etiam AD $(= \sqrt{ACq - DCq}) = \sqrt{4ax - 4xx}$, & BD $(= \sqrt{BCq - DCq}) = \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Atque adeo rurfus $AB = \sqrt{4ax - 4xx} + \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Quare $2a - x = \sqrt{4ax - 4xx} + \sqrt{4ax - 3xx - aa}$, five

ſive $2a-x-\sqrt{4ax-4xx}=\sqrt{4ax-3xx-aa}$. Et partibus quadratis $4aa-3xx-\overline{4a+2x}\times\sqrt{4ax-4xx}=4ax-3xx-aa$; ſive $5aa-4ax=\overline{4a-2x}\sqrt{4ax-4xx}$. Et, partibus iterum quadratis, ac terminis rite diſpoſitis, $16x^4-80ax^3+144aaxx-104a^3x+25a^4=0$. Hanc æquationem divide per $2x-a$, & orietur $8x^3-36axx+54aax-25a^3=0$, æquatio cujus reſolutione dabitur x ex aſſumpto utcunque a. Habitis a & x, conſtitue triangulum, cujus latera erunt $2a-x$, a, & x; & perpendiculum, in latus $2a-x$ demiſſum, erit $2x-a$.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

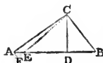
Si poſuiſſem differentiam laterum trianguli eſſe d, & perpendiculum eſſe x; opus evaſiſſet aliquanto concinnius, prodeunte tandem æquatione $x^3=24ddx+48d^3$.

PROB. XV.

Invenire Triangulum, ABC, *cujus tria latera*, AB, AC, BC, *& perpendiculum*, CD, *ſunt in Geometricâ progreſſione.*

DIC AC$=x$, & BC$=a$; & erit AB $=\frac{xx}{a}$; et CD $=\frac{aa}{x}$. Eſt & AD $(=\sqrt{ACq-CDq})=\sqrt{xx-\frac{a^4}{xx}}$; & BD $(=\sqrt{BCq-DCq})=\sqrt{aa-\frac{a^4}{xx}}$; adeoque $\frac{xx}{a}$ (= AB) $=\sqrt{xx-\frac{a^4}{xx}}+\sqrt{aa-\frac{a^4}{xx}}$; ſive $\frac{xx}{a}-\sqrt{aa-\frac{a^4}{xx}}=\sqrt{xx-\frac{a^4}{xx}}$. Et, partibus æquationis quadratis, $\frac{x^4}{aa}-\frac{2xx}{a}\times\sqrt{aa-\frac{a^4}{xx}}+aa-\frac{a^4}{xx}=xx-\frac{a^4}{xx}$; hoc eſt, $x^4-aaxx+a^4=2aax\sqrt{xx-aa}$. Et, partibus iterum quadratis, $x^8-2aax^6+3a^4x^4-2a^6xx+a^8=4a^4x^4-4a^6xx$. Hoc eſt $x^8-2aax^6-a^4x^4+2a^6xx+a^8=0$. Divide hanc æquationem per $x^4-aaxx-a^4$, & orietur $x^4-aaxx-a^4$. Quare eſt $x^4=aaxx+a^4$. Et, extractâ radice, $xx=\frac{1}{2}aa+\sqrt{\frac{5}{4}a^4}$, ſive $x=a\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}$. Cape ergo a, ſive BC, cujuſvis longitudinis; & fac BC. AC :: AC. AB :: 1. $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}$; & trianguli ABC, ex his lateribus conſtituti, perpendiculum DC erit ad latus BC in eâdem ratione.

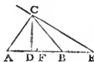
Idem aliter.



Cùm sit AB. AC :: BC. DC dico angulum ACB rectum esse. Nam si negas, age CE constituentem angulum ECB rectum. Sunt ergo triangula BCE, DBC similia, per 8. VI. Elem. adeoque EB. EC :: BC. DC. hoc est EB. EC :: AB. AC. Age AF perpendicularem CE, & propter parallelas AF, BC, erit EB. EC :: AE. FE :: AB. BC. Ergo, per 9. V. Elem. est AC=FC, hoc est Hypotenusa trianguli rectanguli æqualis lateri, contra 19. I. Elem. Non est ergo angulus ECB rectus, & proinde ipsum ACB rectum esse oportet. Est itaque $ACq+BCq=ABq$. Sed est $ACq=AB \times BC$, ergo $AB \times BC + BCq = ABq$; &, extractâ radice, $AB=\frac{1}{2}BC+\sqrt{\frac{5}{4}BCq}$. Quamobrem cape BC. AB :: 1. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, & AC mediam proportionalem inter BC & AB, & triangulo ex his lateribus constituto, erunt AB, AC, BC, DC continuè proportionales.

PROB. XVI.

Super datâ basi, AB, *triangulum,* ABC, *constituere, cujus vertex* C *erit ad rectam,* EC, *positione datam, basis autem medium existet Arithmeticum inter latera.*



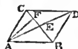
Basis AB bisecetur in F, & producatur donec rectæ EC positione datæ occurrat in E, & ad ipsam demittatur perpendicularis CD; dictisque $AB=a$, $FE=b$, & $BC-AB=x$, erit $BC=a+x$, $AC=a-x$. Et per 13. II. Elem. BD $\left(=\frac{BCq-ACq+ABq}{2AB}\right)=2x+\frac{1}{2}a$. Adeoque $FD=2x$, $DE=b+2x$, & CD $\left(=\sqrt{CBq-BDq}\right)=\sqrt{\frac{3}{4}aa-3xx}$. Sed, propter datas positiones rectarum CE & AB, datur angulus CED; adeoque & ratio DE ad CD; quæ si ponatur d ad e dabit analogiam $d.\ e :: b+2x.\ \sqrt{\frac{3}{4}aa-3xx}$. Unde, multiplicatis extremis & mediis in se, oritur æquatio $eb+2ex=d\sqrt{\frac{3}{4}aa-3xx}$; cuius partibus quadratis & ritè dispositis, fit $xx=\frac{\frac{3}{4}ddaa-eebb-4eebx}{4ee+3dd}$. Et, radice extractâ, $x=$

$-2eeb$

$\frac{-2eeb + d\sqrt{3eeaa - 3eebb + 3ddaa}}{4ee + 3dd}$. Dato autem x, datur BC $= a + x$, & AC $= a - x$. Problemata Geometrica.

PROB. XVII.

Datis Parallelogrammi cujuscunque lateribus, AB, BD, DC, *&* AC, *& unâ lineâ diagonali,* BC, *invenire alteram diagonalem,* AD.



SIT E concursus diagonalium, & ad diagonalem BC demitte normalem AF, &, per 13. II. Elementorum, erit $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC} = CF$; atque etiam $\frac{ACq - AEq + ECq}{2EC} = CF$. Quare cùm sit EC $= \frac{1}{2}$BC, & AE $= \frac{1}{2}$AD, erit $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC} = \frac{ACq - \frac{1}{4}ADq + \frac{1}{4}BCq}{BC}$; &, factâ reductione, AD $= \sqrt{2ACq + 2ABq - BCq}$.

Unde obiter, in quolibet parallelogrammo summa quadratorum laterum æquatur summæ quadratorum diagonalium.

PROB. XVIII.

Datis Trapezii, ABCD, *angulis, perimetro, & areâ, determinare latera.*

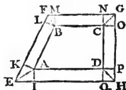
LAtera duo quælibet AB ac DC produc donec concurrant in E, sitque AB $= x$, & BC$=y$; &, propter angulos omnes datos, dantur rationes BC ad CE & BE; quas pone d ad e & f; & erit CE $= \frac{ey}{d}$; & BE$= \frac{fy}{d}$; adeoque AE$= x + \frac{fy}{d}$. Dantur etiam rationes AE ad AD ac DE; quas pone g & h ad d; & erit AD $= \frac{dx + fy}{g}$; & ED $= \frac{dx + fy}{h}$; adeoque CD $= \frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d}$; & summa omnium laterum $x + y + \frac{dx + fy}{g} + \frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d}$; quæ, cùm detur, esto a; & abbrevientur etiam termini scribendo $\frac{p}{r}$ pro dato $1 + \frac{d}{g} + \frac{d}{h}$, & $\frac{q}{r}$ pro dato $1 + \frac{f}{g} + \frac{f}{h} - \frac{e}{d}$, & habebitur æquatio $\frac{px + qy}{r} = a$.

Adhæc, propter datos omnes angulos, datur ratio BCq ad triangulum BCE; quam pone m ad n, & erit triang. BCE$= \frac{n}{m}yy$. Datur etiam ratio AEq ad triangulum ADE; quam pone m ad d, &

CAPUT XIV. & erit triang. ADE $= \frac{ddxx + 2dfxy + ffyy}{dm}$. Quare cùm area AC, quæ eſt horum triangulorum differentia, detur, eſto bb, & erit $\frac{ddxx + 2dfxy + ffyy - deyy}{dm} = bb$. Atque ita habentur duæ æquationes, ex quarum reductione omnia determinantur. Nempe ſuperior æquatio dat $\frac{ra - qy}{p} = x$; ſcribendo $\frac{ra - qy}{p}$ pro x in inferiori, provenit $\frac{drraa - 2dqray + dqqyy}{ppm} + \frac{2afry - 2fqyy}{pm} + \frac{ffyy - deyy}{dm} = bb$. Et, abbreviatis terminis ſcribendo s pro dato $\frac{dqq}{pp} - \frac{2fq}{p} - \frac{ff}{d} - n$, & st pro dato $+\frac{adqr}{pp} - \frac{afr}{q}$, ac stv pro dato $bbm - \frac{drraa}{pp}$, oritur $yy = 2ty + tv$, ſeu $y = t + \sqrt{tt + tv}$.

PROB. XIX.

Piſcinam, ABCD, *perambulatorio,* ABCD EFGH, *datæ areæ, & ejuſdem ubique latitudinis circumdare.*



ESTO perambulatorii latitudo x, & ejus area aa. Et à punctis A, B, C, D, ad lineas EF, FG, GH & HE demiſſis perpendicularibus AK, BL, BM, CN, CO, DP, DQ, AI, perambulatorium dividetur in quatuor trapezia, IK, LM, NO, PQ, & in quatuor parallelogramma, AL, BN, CP, DI, latitudinis x, & ejuſdem longitudinis cum lateribus dati trapezii. Sit ergo ſumma laterum (AB+BC+CD+DA)$=b$, & erit ſumma parallelogrammorum $= bx$.

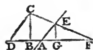
Porro ductis AE, BF, CG, DH, cùm ſit AI = AK, erit ang. AEI = ang. AEK$=\frac{1}{2}$IEK, ſive $\frac{1}{2}$DAB. Datur ergo ang. AEI, & proinde ratio ipſius AI ad IE, quam pone d ad e; & erit IE $= \frac{ex}{d}$. Hanc duc in $\frac{1}{2}$AI, ſive $\frac{1}{2}x$, & fiet area trianguli AEI $= \frac{exx}{2d}$. Sed, propter æquales angulos & latera, triangula AEI & AEK ſunt æqualia; adeoque trapezium IK (= 2 triang. AEI) $= \frac{exx}{d}$. Simili modo ponendo BL. LF :: $d.f$, & CN. NG :: $d.g$, & DP. PH :: d h, (nam illæ etiam rationes dantur ex datis angulis B, C, ac D) habebitur trapezium LM $= \frac{fxx}{d}$; NO $= \frac{gxx}{d}$; & PQ $= \frac{hxx}{d}$. Quamobrem $\frac{exx}{d}$ +

fxx

$\frac{fxx}{d} + \frac{gxx}{d} + \frac{bxx}{d}$, five $\frac{pxx}{d}$, fcribendo p pro $e+f+g+b$, erit æquale trapeziis quatuor IK + LM + NO + PQ; & proinde $\frac{pxx}{d} + bx$, æquabitur toti perambulatorio aa. Quæ æquatio, dividendo omnes terminos per $\frac{p}{d}$ & extrahendo radicem ejus, evadet $x = \frac{-db + \sqrt{bbdd + 4aapd}}{2p}$. Latitudine Perambulatorii fic inventâ, facile eft ipfum defcribere. PROBLEMATA GEOMETRICA.

PROB. XX.

A dato puncto, C, *rectam lineam,* CF, *ducere, quæ cum aliis duabus pofitione datis rectis,* AE & AF, *triangulum datæ magnitudinis,* AEF, *comprehendet.*

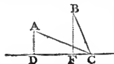


AGE CD parallelam AE, & CB ac EG perpendiculares in AF, fitque AD $=a$, CB $=b$, AF $=x$, & trianguli AEF area cc; &, propter proportionales DF. AF (: : DC. AE) : : CB. EG, hoc eft $a+x.\,x::b.\,\frac{bx}{a+x}$, erit $\frac{bx}{a+x}=$ EG. Hanc duc in $\frac{1}{2}$AF, & emerget $\frac{bxx}{2a+2x}$ quantitas areæ AEF, quæ proinde æquatur cc. Atque adeo, æquatione ordinatâ, eft $xx = \frac{2ccx + 2cca}{b}$, feu $x = \frac{cc + \sqrt{c^4 + 2ccab}}{b}$.

Nihil fecus recta per datum punctum ducitur, quæ triangulum, vel trapezium quodvis, in datâ ratione fecabit.

PROB. XXI.

Punctum C *in datâ rectâ lineâ,* DF, *determinare, à quo ad alia duo pofitione data puncta,* A & B, *ductæ rectæ,* AC & BC, *datam habeant differentiam.* Vide Prop. 45.



A Datis punctis ad datam rectam demitte perpendiculares AD & BF, & dic AD$=a$, BF$=b$, DF$=c$, DC$=x$; & erit AC$=\sqrt{aa+xx}$; FC$=x-c$; & BC$=\sqrt{bb+xx-2cx+cc}$. Sit jam data harum differentia d, exiftente AC majori quàm BC; erit $\sqrt{aa+xx}-d=\sqrt{bb+xx-2cx+cc}$. Et, quadratis partibus, $aa+xx+dd-2d\sqrt{aa+xx}=bb+xx-2cx+cc$. Factâque reductione, & abbreviandi causâ pro datis $aa+dd-bb-cc$

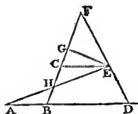
fcripto

Caput XIV. ſcripto $2ee$, emerget $ee + cx = d\sqrt{aa + xx}$. Iterumque quadratis partibus, $e^4 + 2ceex + cexx = ddaa + ddxx$. Et, æquatione reductâ, $xx = \frac{2eecx + e^4 - aadd}{dd - ee}$, ſeu $x = \frac{eec + \sqrt{e^4dd - aad^4 + aaddee}}{dd - ee}$.

Haud ſecùs problema reſolvitur, ſi linearum, AC & BC, ſumma vel quadratorum ſumma aut differentia, vel proportio, vel rectangulum, vel angulus ab ipſis comprehenſus detur; vel etiam ſi vice rectæ DC, circumferentia circuli, aut alia quævis curva linea adhibeatur, modò calculus, in hoc ultimo præſertim caſu, referatur ad lineam conjungentem puncta A & B.

P R O B. XXII.

Datis poſitione tribus rectis, AD, AE, BF, *quartam* DF *ducere, cujus partes,* DE, EF, *prioribus interceptæ, datarum erunt longitudinum.*



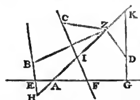
Ad BF demitte perpendicularem EG, ut & obliquam EC parallelam AD, & rectis tribus poſitione datis concurrentibus in A, B, & H, dic $AB = a$, $BH = b$, $AH = c$, $ED = d$, $EF = e$, & $HE = x$. Jam propter ſimilia triangula ABH, ECH, eſt AH. AB :: HE. EC $= \frac{ax}{c}$; & AH. HB :: HE. CH $= \frac{bx}{c}$. Adde HB, & fit CB $= \frac{bx + bc}{c}$. Inſuper, propter ſimilia triangula FEC, FDB, eſt ED.CB::EF.FC $= \frac{ebx + ebc}{dc}$. Denique (per 12 & 13 .II. Elem.) eſt $\frac{ECq - EFq}{2FC} + \frac{1}{2}FC\,(=CG) = \frac{HEq - ECq}{2CH} - \frac{1}{2}CH$; hoc eſt, $\frac{\frac{aaxx}{cc} - ee}{\frac{2ebx + 2ebc}{dc}} + \frac{ebx + ebc}{2dc} = \frac{xx - \frac{aaxx}{cc}}{\frac{2bx}{c}} - \frac{bx}{2c}$. Sive $\frac{aadxx - eedcc}{ebx + ebc} + \frac{ebx}{d} + \frac{ebc}{d} = \frac{ccx - aax - bbx}{b}$. Hic, abbreviandi cauſâ, pro $\frac{cc - aa - bb}{b} - \frac{eb}{d}$, ſcribe m; & erit $\frac{aadxx - eedcc}{ebx + ebc} + \frac{ebc}{d} = mx$; ac terminis omnibus multiplicatis per $x + c$, fiet $\frac{aadxx - eedcc}{eb} + \frac{ebcx}{d} + \frac{ebcc}{d} = mxx + mcx$. Iterum pro

aad

$\frac{aad}{eb} - m$ ſcribe p; pro $mc - \frac{ebc}{d}$ ſcribe $2pq$; & pro $-\frac{ebcc}{d} + \frac{eedcc}{eb}$ ſcribe prr; & evadet $xx = 2qx + rr$, & $x = q \pm \sqrt{qq+rr}$. Invento x, ſive HE, age EC parallelam AB, & cape FC.BC :: $e.d$, & acta FED conditionibus quæſtionis ſatisfaciet. PROBLEMATA GEOMETRICA.

PROB. XXIII.

Punctum Z *determinare, à quo ad quatuor poſitione datas rectas lineas,* FA, EB, FC, GD, *ſi aliæ quatuor lineæ,* ZA, ZB, ZC, *&* ZD, *in datis angulis ducantur, duarum è ductis,* ZA *&* ZB, *rectangulum, & aliarum duarum,* ZC *&* ZD, *ſumma detur.*



E lineis elige aliquam poſitione datam, FA; ut & poſitione non datam, ZA, quæ ad illam ducitur, ex quarum longitudinibus punctum Z determinetur; & cæteras poſitione datas lineas produc donec his, ſi opus eſt etiam productis, occurrant, ut vides. Dictiſque EA $= x$, & AZ $= y$, propter angulos trianguli AEH datos, dabitur ratio AE ad AH, quam pone p ad q, & erit AH $= \frac{qx}{p}$. Adde AZ, ſitque ZH $= y + \frac{qx}{p}$. Et inde cùm propter datos angulos trianguli HZB detur ratio HZ ad BZ, ſi ea ponatur n ad p, habebitur ZB $= \frac{py+qx}{n}$.

Præterea ſi data EF dicatur a, erit AF $= a - x$; indeque, ſi propter datos angulos trianguli AFI, ſtatuatur AF ad AI in ratione p ad r, evadet AI $= \frac{ra - rx}{p}$. Hanc aufer ab AZ, & reſtabit IZ $= y - \frac{ra-rx}{p}$. Et, propter datos angulos trianguli ICZ, ſi ponatur IZ ad ZC in ratione m ad p, evadet ZC $= \frac{py - ra + rx}{m}$.

Ad eundem modum, ſi ponatur EG$=b$. AG.AK :: $l:s$, & ZK.ZD :: $p.l$. obtinebitur ZD $= \frac{sb - sx - ly}{p}$.

Jam ex ſtatu quæſtionis ſi duarum ZC & ZD ſumma, $\frac{py-ra+rx}{m} + \frac{sb-sx-ly}{p}$, ponatur æqualis dato alicui f; & aliarum duarum rectangulum, $\frac{pyy+qxy}{n}$, æquale gg; habebuntur duæ æquationes

CAPUT XIV. tiones pro determinandis x & y. Per posteriorem fit $x = \frac{ngg - pry}{qy}$; & hunc ipsius x valorem scribendo pro eo in priori æquatione, evadet $\frac{py - ra}{m} + \frac{rngg - rpry}{mqy} + \frac{sb - ly}{p} - \frac{sngg - spry}{pqy} = f$. Et reducendo, $yy = \frac{apqry - bmqsy \pm fmpqy \pm ggmns - ggnpr}{ppq - ppr - mlq + mps}$. Et abbrevi. causâ scripto $2b$ pro $\frac{apqr - bmqs \pm fmpq}{ppq - ppr - mlq + mps}$, & kk pro $\frac{ggmns - ggpnr}{ppq - ppr - mlq + mps}$, fiet $yy = 2by + kk$, sive $y = b \pm \sqrt{bb + kk}$. Cujus æquationis ope cùm y innotescit, æquatio $\frac{ngg - pry}{qy} = x$ dabit x: quod sufficit ad determinandum punctum z.

Ad eundem ferè modum punctum determinatur, à quo ad plures vel pauciores positione datas rectas totidem aliæ rectæ ducantur, eâ ege ut aliquarum summa, vel differentia, vel contentum detur; aut æquetur cæterarum summæ, vel differentiæ, vel contento, vel ut alias quaslibet habeant assignatas conditiones.

PROB. XXIV.

Angulum rectum, EAF, *datâ rectâ*, EF, *subtendere, quæ transibit per datum punctum*, C, *a lineis rectum angulum comprehendentibus æquidistans.*

H K B A F E G C D

Quadratum ABCD compleatur, & linea EF bisecetur in G. Tum dic CB vel CD esse a, EG vel FG esse b, & CG esse x; eritque $CE = x - b$, & $CF = x + b$. Dein cùm $CFq - BCq = BFq$, erit $BF = \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Denique propter similia triangula CDE, FBC, est $CE . CD :: CF . BF$, sive $x - b . a :: x + b . \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Unde $ax + ab = \overline{x - b} \times \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Cujus æquationis utrâque parte quadratâ, & prodeuntibus terminis in ordinem redactis, prodit $x^4 = {}^{2aa}_{+2bb} xx \pm \frac{2aabb}{b^4}$. Et, extractâ radice, sicut fit in æquationibus quadraticis, prodit $xx = aa + bb + \sqrt{a^4 + 4aabb}$. Adeoque $x = \sqrt{aa + bb + \sqrt{a^4 + 4aabb}}$. CG sic inventa dat CE vel CF, quæ determinando punctum E vel F problemati satisfacit.

2 Idem

PROBLEMATA GEOMETRICA.

Idem aliter.

Sit CE $= x$, CD $= a$, & EF $= b$, eritque CF $= x + b$, & BF $= \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Et proinde, cùm ſit CE.CD::CF.BF, ſive $x.a::x+b.\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$, erit $ax + ab = x\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$. Hujus æquationis partibus quadratis, & terminis in ordinem redactis, prodibit $x^4 + 2bx^3 {+bb \atop -2aa} xx - 2aabx - aabb = 0$, æquatio biquadratica, cujus radicis inveſtigatio difficilior eſt quàm in priori caſu. Sic autem inveſtigari poteſt. Pone $x^4 + 2bx^3 {+bb \atop -2aa} xx - 2aabx + a^4 = aabb + a^4$; & extractâ utrobique radice, $xx + bx - aa = \pm a\sqrt{aa+bb}$.

Ex his occaſionem nactus ſum tradendi *Regulam de electione terminorum* ad ineundum calculum.

Scilicet cùm duorum terminorum talis obvenit affinitas, ſive ſimilitudo relationis, ad cæteros terminos quæſtionis, ut oporteret æquationes per omnia ſimiles ex utrovis adhibito produci; aut ambos, ſi ſimul adhiberentur, eaſdem in æquatione finali dimenſiones, & eandem omninò formam, ſignis fortè + & − exceptis, habituros eſſe; (id quod facile proſpicitur) tunc neutrum adhibere convenit; ſed eorum vice tertium quemvis eligere, qui ſimilem utrique relationem gerit; puta ſemiſummam vel ſemidifferentiam, vel medium proportionale forſan, aut quamvis aliam quantitatem utrique indifferenter & ſine compare relatam.

Sic in præcedente problemate, cùm viderim lineam EF pariter ad utramque AB & AD referri (quod patebit ſi ducas itidem EF in angulo BAH) atque adeo nullâ ratione ſuaderi poſſem, cur ED potiùs quàm BF, vel AE potiùs quàm AF, vel CE potiùs quàm CF, pro quærendâ quantitate adhiberentur; vice punctuorum E & F undè hæc ambiguitas proficiſcitur, ſumpſi, in ſolutione priori, intermedium G, quod parem relationem ad utramque linearum AB & AD obſervat. Deinde ab hoc G non demiſi perpendiculum ad AF, pro quærendâ quantitate, quia potui eâdem ratione demiſiſſe ad AD. Et eapropter in neutrum, CB vel CD, demiſi, ſed inſtitui CG quærendum eſſe, quod nullum admittit compar; & ſic æquationem biquadraticam obtinui ſine terminis imparibus.

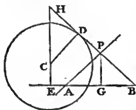
 Potui

CAPUT XIV. Potui etiam, animadverso quod punctum G jaceat in peripheriâ circuli centro A radio EG descripti, demisisse GK perpendiculum in diagonalem AC, & quæsivisse AK vel CK, quippe quæ similem etiam utrique, AB & AD, relationem gerunt; atque ita in æquationem quadraticam $yy = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}bb$ incidissem, posito AK $= y$, AC $= e$, & EG $= b$. Et AK sic invento, erigendum fuisset perpendiculum KG præfato circulo occurrens in G, per quod CF transiret.

Ad hanc regulam animum advertens, in Prob. 9 & 10. ubi trianguli latera germana, BC & AC, determinanda erant, quæsivi potiùs semidifferentiam quàm alterutrum eorum. Sed regulæ hujus utilitas ex vigesimo octavo Problemate magis elucescet.

PROB. XXV.

Ad Circulum, centro C *radio* CD *descriptum, ducere Tangentem* DB, *cujus pars,* PB, *inter rectas positione datas,* AP, AB, *sita, sit datæ longitudinis.*



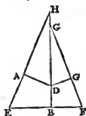
A Centro C ad alterutram rectarum positione datarum, puta AB, demitte normalem CE, eamque produc donec Tangenti DB occurrat in H. Ad eandem AB demitte etiam normalem PG, & dictis EA $= a$, EC $= b$, CD $= c$, BP $= d$, & PG $= x$, propter similia triangula PGB, CDH, erit GB $(\sqrt{dd-xx})$. PB :: CD. CH $= \frac{cd}{\sqrt{dd-xx}}$. Adde EC; & fiet EH $= b + \frac{cd}{\sqrt{dd-xx}}$. Porro est PG. GB :: EH. EB $= \frac{b}{x}\sqrt{dd-xx} + \frac{cd}{x}$. Adhæc, propter angulum PAG datum, datur ratio PG ad AG; quâ positâ e ad f, erit AG $= \frac{fx}{e}$. Adde EA & BG, & habebitur denuò EB $= a + \frac{fx}{e} + \sqrt{dd-xx}$. Est itaque $\frac{cd}{x} + \frac{b}{x}\sqrt{dd-xx} = a + \frac{fx}{e} + \sqrt{dd-xx}$: & per transpositionem terminorum $a + \frac{fx}{e} - \frac{cd}{x} = \frac{b-x}{x}\sqrt{dd-xx}$. Et partibus æquationis quadratis, $aa + \frac{2afx}{e} - \frac{2acd}{x} + \frac{ffxx}{ee} - \frac{2cdf}{e} + \frac{ccdd}{xx} = \frac{bbdd}{xx} - bb - \frac{2bdd}{x} + 2bx + dd - xx$. Et, per debitam reductionem,

$$\frac{x^4 \begin{smallmatrix} +2aef \\ -2bee \end{smallmatrix} x^3 \begin{smallmatrix} +aaee \\ +bbee \\ -ddee \\ -2cdef \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} +2bddee \\ -2acdee \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} +ccddee \\ -bbddee \end{smallmatrix}}{ee+ff} = 0.$$

PROB.

PROB. XXVI.

Invenire punctum D, *à quo tres rectæ*, DA, DB, DC, *ad totidem alias positione datas rectas*, AE, BF, CF, *perpendiculariter demissæ, datam inter se rationem obtineant.*



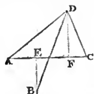
E Rectis positione datis producatur una, puta BF, ut & ejus perpendicularis, BD, donec reliquis, AE & CF, occurrant, BF quidem in E & F, BD autem in H & G. Jam sit $EB=x$ & $EF=a$; eritque $BF=a-x$. Cùm autem propter datam positionem rectarum EF, EA, & FC, anguli E & F, adeoque rationes laterum triangulorum EBH & FBG dentur; sit EB ad BH ut d ad e; & erit $BH=\frac{ex}{d}$, & EH $(=\sqrt{EBq+BHq})=\sqrt{xx+\frac{eexx}{dd}}$, hoc est $=\frac{x}{d}\sqrt{dd+ee}$. Sit etiam BF ad BG ut d ad f; & erit $BG=\frac{fa-fx}{d}$, & FG $(=\sqrt{BFq+BGq})$ $=\sqrt{aa-2ax+xx+\frac{ffaa-2ffax+ffxx}{dd}}$, hoc est $=\frac{a-x}{d}\sqrt{dd+ff}$. Præterea dicatur $BD=y$, & erit $HD=\frac{ex}{d}-y$, & $GD=\frac{fa-fx}{d}-y$; adeoque, cùm sit AD. HD (:: EB. EH) :: $d.\ \sqrt{dd+ee}$, & DC. GD (:: BF. FG) :: $d.\ \sqrt{dd+ff}$, erit $AD=\frac{ex-dy}{\sqrt{dd+ee}}$, & $DC=\frac{fa-fx-dy}{\sqrt{dd+ff}}$. Denique, ob datas rationes linearum BD, AD, DC, sit BD. AD :: $\sqrt{dd+ee}.\ b-d$; & erit $\frac{by-dy}{\sqrt{dd+ee}}$ (= AD) $=\frac{ex-dy}{\sqrt{dd+ee}}$, sive $by=ex$. Sit etiam BD. DC :: $\sqrt{dd+ff}.\ k-d$; & erit $\frac{ky-dy}{\sqrt{dd+ff}}$ (= DC =) $\frac{fa-fx-dy}{\sqrt{dd+ff}}$, sive $ky=fa-fx$. Est itaque $\frac{ex}{b}$ $(=y)=\frac{fa-fx}{k}$; &, per reductionem, $\frac{fba}{ek+fb}=x$. Quare cape EB. EF :: $b.\ \frac{ek}{f}+b$; dein BD. EB :: $e.\ b$; & habebitur punctum quæsitum D.

PROB. XXVII.

Invenire punctum D, *à quo tres rectæ*, DA, DB, DC, *ad data tria puncta* A, B, C, *ductæ, datam inter se rationem obtineant.*

E Datis tribus punctis junge duo quævis, puta A & C; & à tertio, B, ad lineam conjungentem, AC, demitte perpendiculum

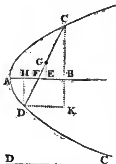
CAPUT XIV. BE, ut & perpendiculum DF à puncto quæsito D; dictisque $AE=a$, $AC=b$, $EB=c$, $AF=x$, & $FD=y$, erit $ADq=xx+yy$; $FC=b-x$; CDq $(=FCq+FDq)=bb-2bx+xx+yy$; $EF=x-a$, ac BDq $(=EFq+\overline{EB+FD}$ quad.$)=xx-2ax+aa+cc+2cy+yy$. Jam cùm sit AD ad CD in datâ ratione, sit ista ratio d ad e; & erit $CD=\frac{e}{d}\sqrt{xx+yy}$. Cùm etiam sit AD ad BD in datâ ratione, sit ista ratio d ad f, & erit $BD=\frac{f}{d}\sqrt{xx+yy}$. Adeoque est $\frac{eexx+eeyy}{dd}$ $(=CDq)=bb-2bx+xx+yy$; & $\frac{ffxx+ffyy}{dd}$ $(=BDq)=xx-2ax+aa+cc+2cy+yy$. In quibus si, abbreviandi causâ, pro $\frac{dd-ee}{d}$ scribatur p, & q pro $\frac{dd-ff}{d}$, emerget $bb-2bx+\frac{p}{d}xx+\frac{p}{d}yy=0$, & $aa+cc-2ax+2cy+\frac{q}{d}xx+\frac{q}{d}yy=0$. Per priorem est $\frac{2bqx-bbq}{p}=\frac{q}{d}xx+\frac{q}{d}yy$. Quare in posteriori pro $\frac{q}{d}xx+\frac{q}{d}yy$ scribe $\frac{2bqx-bbq}{p}$, & orietur $\frac{2bqx-bbq}{p}+aa+cc-2ax+2cy=0$. Iterum, abbreviandi causâ, scribe m pro $a-\frac{bq}{p}$, & $2cn$ pro $\frac{bbq}{p}-aa-cc$; & erit $2mx+2cn=2cy$; terminisque per $2c$ divisis, $\frac{mx}{c}+n=y$. Quamobrem in æquatione $bb-2bx+\frac{p}{d}xx+\frac{p}{d}yy=0$, pro yy scribe quadratum de $\frac{mx}{c}+n$, & habebitur $bb-2bx+\frac{p}{d}xx+\frac{pmm}{dc}xx+\frac{2pmn}{dc}x+\frac{pnn}{d}=0$. Ubi denuò si, abbreviandi causâ, $\frac{b}{r}$ scribatur pro $\frac{p}{d}+\frac{pmm}{dc}$, $\frac{sb}{r}$ pro $b-\frac{pmn}{dc}$, & $\frac{tbb}{r}$ pro $bb+\frac{pnn}{d}$, habebitur $xx=2sx-tb$. Et, extractâ radice, $x=s\pm\sqrt{ss-tb}$. Invento x, æquatio $\frac{mx}{c}+n=y$ dabit y; & ex datis x & y, hoc est AF & FD, determinatur punctum quæsitum D.



PROB. XXVIII.

Rectam, DC, *datæ longitudinis in datam Conicam sectionem,* DAC, *sic inscribere, ut ea per punctum,* G, *positione datum transeat.*

SIT AF axis Curvæ, & à punctis, D, G & C, ad hunc demitte normales DH, GE, & CB. Jam ad determinandam positionem



tionem rectæ DC, puncti D, aut C, inventio proponi poteſt; ſed cùm hæc ſint germana & adeo paria, ut ad alterutrum determinandum operatio ſimilis evaſura eſſet, ſive quærerem CG, CB, aut AB; ſive comparia DG, DH, aut AH; ea propter de tertio aliquo puncto proſpicio, quod utrumque D & C ſimiliter reſpectet, & unà determinet: et hujuſmodi video eſſe punctum F.

PROBLEMATICA GEOMETRICA.

Jam ſit $AE = a$, $EG = b$, $DC = c$, $EF = z$; & præterea cùm relatio inter AB & BC habeatur in æquatione, quam ſuppono pro Conicâ ſectione determinandâ datam eſſe, ſit $AB = x$, & $BC = y$; & erit $FB = x - a + z$. Et propter GE. EF :: CB. FB erit iterùm $FB = \frac{yz}{b}$. Ergo $x - a + z = \frac{yz}{b}$.

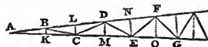
His ita præparatis, tolle x per æquationem quæ curvam deſignat. Quemadmodum ſi Curva ſit Parabola, per æquationem $rx = yy$ deſignata, ſcribe $\frac{yy}{r}$ pro x; & orietur $\frac{yy}{r} - a + x = \frac{yz}{b}$. Et, extractâ radice, $y = \frac{rz}{2b} \pm \sqrt{\frac{rrzz}{4bb} + ar - rz}$. Unde patet $\sqrt{\frac{rrzz}{bb} + 4ar - 4rz}$ eſſe differentiam gemini valoris y, id eſt linearum $+$ BC & $-$ DH, adeoque (demiſſo DK in CB normali) valere CK. Eſt autem FG. GE :: DC. CK, hoc eſt $\sqrt{bb + zz}.\ b :: c.\ \sqrt{\frac{rrzz}{bb} + 4ar - 4rz}$. Ducendoque quadrata extremorum & mediorum in invicem, & facta ordinando, orietur $z^4 = \frac{4bbrz^3 \begin{smallmatrix} -4abbr \\ -bbrr \end{smallmatrix} zz + 4b^4rz \begin{smallmatrix} -4ab^4r \\ +b^4cc \end{smallmatrix}}{rr}$, æquatio quatuor tantùm dimenſionum, quæ ad octo dimenſiones aſcendiſſet, ſi quæſiviſſem CG vel CB aut AB.

PROB. XXIX.

Datum angulum per datum numerum multiplicare vel dividere.

In angulo quovis FAG inſcribe lineas AB, BC, CD, DE, &c. ejuſdem cujuſvis longitudinis; & erunt triangula, ABC, BCD, CDE, DEF, &c. Iſoſcelia; adeoque per 32. I. Elem. erit ang. CBD = ang.

Caput XIV. ang. A+ACB=2 ang. A. Et ang. DCE =ang. A+ADC=3 ang. A. Et ang. EDF=A+AED=4 ang. A. Et ang. FEG=5 ang. A, & sic deinceps. Positis jam AB, BC, CD, &c. radiis æqualium circulorum, perpendicula BK, CL, DM, &c. demissa in AC, BD, CE, &c. erunt sinus istorum angulorum, & AK, BL, CM, DN, &c. sinus complementorum ad rectum. Vel positâ AB diametro, illæ AK, BL, CM, &c. erunt chordæ. Sit ergo AB = $2r$, & AK=x: dein sic operare.



$$AB . AK :: AC . AL.$$

$$2r . x :: 2x . \frac{xx}{r}.$$

$$\left.\begin{array}{r} AL - AB \\ \text{Et } \frac{xx}{r} - 2r \end{array}\right\} = BL, \text{ Duplicatio.}$$

$$AB . AK :: AD\ (2AL - AB) . AM.$$

$$2r . x :: \frac{3xx}{r} - 2r . \frac{x^3}{rr} - x.$$

$$\left.\begin{array}{r} AM - AC \\ \text{Et } \frac{x^3}{rr} - 3x \end{array}\right\} = CM, \text{ Triplicatio.}$$

$$AB . AK :: AE\ (2AM - AC) . AN.$$

$$2r . x :: \frac{2x^3}{rr} - 4x . \frac{x^4}{r^3} - \frac{2xx}{r}.$$

$$\left.\begin{array}{r} AN - AD \\ \text{Et } \frac{x^4}{r^3} - \frac{4xx}{r} + 2r \end{array}\right\} = DN, \text{ Quadruplicatio.}$$

$$AB . AK :: AF\ (2AN - AD) . AO.$$

$$2r . x :: \frac{2x^4}{r^3} - \frac{6xx}{r} + 2r . \frac{x^5}{r^4} - \frac{3x^3}{rr} + x.$$

$$\left.\begin{array}{r} AO - AE \\ \text{Et } \frac{x^5}{r^4} - \frac{5x^3}{rr} + 5x \end{array}\right\} = EO, \text{ Quintuplicatio.}$$

Et sic deinceps. Quòd si velis angulum in aliquot partes dividere, pone q pro BL, CM, DN, &c. Et habebis $xx - 2rr = qr$ ad bisectionem: $x^3 - 3rrx = qrr$ ad trisectionem: $x^4 - 4rrxx + 2r^4 = qr^3$ ad quadrisectionem: $x^5 - 5rrx^3 + 5r^4x = qr^4$ ad quinquisectionem, &c.

PROB.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

PROB. XXX.

Cometæ in lineâ rectâ, BD, *uniformiter progredientis positionem cursûs ex tribus observationibus determinare.*

SIT A oculus spectatoris, B locus Cometæ in primâ observatione, C in secundâ, ac D in tertiâ; quærenda erit inclinatio lineæ BD ad lineam AB. Ex observationibus itaque dantur anguli BAC, BAD; adeoque, si BH ducatur ad AB normalis & occurrens AC & AD in E & F, ex assumpto utcunque AB dabuntur BE & BF, tangentes nempe præfatorum angulorum respectu radii AB. Sit ergo $AB=r$, $BE=b$, & $BF=c$. Porrò ex datis observationum intervallis dabitur ratio BC ad BD, quæ si ponatur b ad e, & agatur DG parallela AC, cùm sit BE ad BG in eâdem ratione, & BE dicta fuerit b, erit $BG=e$; adeoque $GF=e-c$. Adhæc, si demittatur DH normalis ad BG, propter triangula ABF & DHF similia & similiter secta lineis AE ac DG, erit FE.AB::FG.HD, hoc est $c-b.\ a::e-c.\ \frac{ae-ac}{c-b}=HD$. Erit etiam FE.FB::FG.FH, hoc est $c-b.\ c::e-c.\ \frac{ce-cc}{c-b}=FH$; cui adde BF, sive c, & fit $BH=\frac{ce-cb}{c-b}$. Quare est $\frac{ce-cb}{c-b}$ ad $\frac{ae-ac}{c-b}$, (sive $ce-cb$ ad $ae-ac$, vel $\frac{ce-cb}{e-c}$ ad a) ut BH ad HD; hoc est, ut tangens anguli HDB, sive ABK, ad radium. Quare, cùm a supponatur esse radius, erit $\frac{ce-cb}{e-c}$ tangens anguli ABK: adeoque factâ resolutione, erit ut $e-c$ ad $e-b$ (sive GF ad GE) ita c (sive tangens anguli BAF) ad tangentem anguli ABK.

Dic itaque, ut tempus inter primam & secundam observationem, ad tempus inter primam ac tertiam, ita tangens anguli BAE, ad quartam proportionalem. Dein, ut differentia inter illam quartam proportionalem & tangentem anguli BAF, ad differentiam inter eandem quartam proportionalem & tangentem anguli BAE, ita tangens anguli BAF, ad tangentem anguli ABK.

PROB.

PROB. XXXI.

Radiis à puncto lucido ad sphæricam superficiem refringentem divergentibus, invenire concursus singulorum refractorum cum axe sphæræ per punctum illud lucidum transeunte.

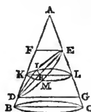
SIT A punctum illud lucidum, & BV sphæra, cujus axis AD, centrum C, & vertex V; sitque AB radius incidens, & BD refractus ejus, ac demissis ad radios istos perpendicularibus CE & CF, ut & BG perpendiculari ad AD, actâque BC, dic $AC = a$, VC, vel BC, $= r$, $CG = x$, & $CD = z$: eritque $AG = a - x$, $BG = \sqrt{rr - xx}$, $AB = \sqrt{aa - 2ax + rr}$; &, propter sim. tri. ABG & ACE, $CE = \frac{a\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{aa - 2ax + rr}}$. Item $GD = z + x$, $BD = \sqrt{zz + 2zx + rr}$: & propter sim. tri. DBG ac DCF, $CF = \frac{z\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{zz + 2zx + rr}}$. Præterea cùm ratio sinuum incidentiæ & refractionis, adeoque CE ad CF detur, pone illam rationem esse a ad f; & erit $\frac{fa\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{aa - 2ax + rr}} = \frac{az\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{zz + 2zx + rr}}$; ac multiplicando in crucem, dividendoque per $a\sqrt{rr - xx}$, erit $f\sqrt{zz + 2zx + rr} = z\sqrt{aa - 2ax + rr}$: & quadrando, ac redigendo terminos in ordinem, $zz = \frac{2ffxz + ffrr}{aa - 2ax + rr - ff}$. Denique pro dato $\frac{ff}{a}$ scribe p, & q pro dato $a + \frac{rr}{a} - p$, & erit $zz = \frac{2pxz + prr}{q - 2x}$, ac $z = \frac{px + \sqrt{ppxx - 2prrx + pqrr}}{q - 2x}$. Inventum est itaque z; hoc est longitudo CD, adeoque punctum quæsitum D, quo refractus BD concurrit cum axe. Q. E. F.

Posui hic incidentes radios divergentes esse, & in Medium densius incidere; sed mutatis mutandis Problema perinde resolvitur ubi convergunt, vel incidunt è densiori Medio in rarius.

PROB.

PROB. XXXII.

Si Conus plano quolibet secetur, invenire figuram sectionis.



SIT ABC conus circulari basi BC insistens; IEM ejus sectio quæsita; KILM alia quælibet sectio parallela basi, & occurrens priori sectioni in HI; & ABC tertia sectio, perpendiculariter bisecans priores duas, in EH & KL, & conum in triangulo ABC. Et producto EH donec occurrat ipsi AK in D, actisque EF ac DG parallelis KL, & occurrentibus AB & AC in F ac G, dic $EF = a$, $DG = b$, $ED = c$, $EH = x$, & $HI = y$; & propter sim. tri.

EHL, EDG, erit $ED . DG :: EH . HL = \frac{bx}{c}$. Dein propter sim. tri. DEF, DHK, erit $DE . EF :: DH . (c - x$ in Fig. 1, & $c + x$ in Fig. 2.) $HK = \frac{ac \mp ax}{c}$. Deinque cùm sectio KIL sit parallela basi, adeoque circularis; erit $HK \times HL = HIq$; hoc est $\frac{ab}{c} x \mp \frac{ab}{cc} xx = yy$, æquatio quæ exprimit relationem inter EH (x) & HI (y) hoc est inter axem & ordinatim applicatam sectionis EIM; quæ æquatio cùm sit ad Ellipsin in Fig. 1, & ad Hyperbolam in Fig. 2, patet sectionem illam perinde Ellipticam vel Hyperbolicam esse.

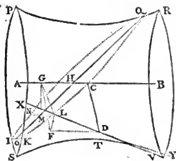
Quòd si ED nullibi occurrat AK, ipsi parallela existens, tunc erit $HK = EF$ (a), & inde $\frac{ab}{c} x$ ($HK \times HL$) $= yy$, æquatio ad Parabolam.

PROB. XXXIII.

Si recta, XY, *circa axem* AB, *ad distantiam* CD, *in datâ inclinatione ad planum* DCB, *convolvatur, & solidum,* PQRVTS, *istâ convolutione generatum, secetur plano quolibet* INQLK; *invenire figuram Sectionis.*

ESTO BHQ, vel GHO, inclinatio axis, AB, ad planum sectionis; & L quilibet concursus rectæ XY cum plano illo. Age

Caput XIV.



DF parallelam AB, & ad AB, DF & HO demitte perpendiculares LG, LF, LM, ac junge FG & MG. Dictiſque CD $= a$, CH $= b$, HM $= x$, & ML $= y$; &, propter datum angulum GHO, poſito MH. HG $:: d.e$: erit $\frac{ex}{d}$ = GH, & $b + \frac{ex}{d}$ = GC vel FD. Adhæc, propter angulum datum LDF (nempe inclinationem rectæ XY ad planum GCDF) poſito FD.FL$::g.b$, erit $\frac{bb}{g} + \frac{bex}{dg}$ = FL; cujus quadrato adde FGq, (DCq ſeu aa) & emerget GL$q = aa + \frac{bbbb}{gg} + \frac{2bbbex}{dgg} + \frac{bbeexx}{ddgg}$. Hinc aufer MG$q$ (HMq − HGq ſeu $xx - \frac{ee}{dd}xx$) & reſtabit $\frac{aagg + bbbb}{gg} + \frac{2bbbe}{dgg}x + \frac{bbee - ddgg + eegg}{ddgg}xx$ (= MLq) $= yy$: æquatio quæ exprimit relationem inter x & y, hoc eſt inter HM axem ſectionis, & ML ordinatim applicatam. Et proinde, cùm in hâc æquatione x & y ad duas tantùm dimenſiones aſcendant, patet figuram INQLK eſſe conicam ſectionem. Utpote ſi angulus MHG major ſit angulo LDF, Ellipſis erit hæc figura; ſi minor, Hyperbola; ſi æqualis vel Parabola, vel, coincidentibus inſuper punctis C & H, parallelogrammum.

PROB. XXXIV.

Si ad AF *erigatur perpendiculum,* AD, *datæ longitudinis, & normæ,* DEF, *crus unum,* ED, *continuò tranſeat per punctum* D, *dum alterum crus* EF, *æquale* AD, *dilabatur ſuper* AF; *invenire curvam* HIC, *quam crus,* EF, *medio ejus puncto,* C, *deſcribit.*

SIT EC vel CF $= a$, perpendiculum CB $= y$, AB $= x$: & propter ſimilia triangula FBC, FEG, erit BF ($\sqrt{aa - yy}$.). BC + CF $(y + a)$ ::

EF

EF $(2a.)$. EG+GF (AG+GF) ſeu AF. Quare $\frac{2ay+2aa}{\sqrt{aa-yy}}$ (= AF = AB + BF) $= x + \sqrt{aa-yy}$. Jam, multiplicando per $\sqrt{aa-yy}$, fit $2ay + 2aa = aa - yy + x\sqrt{aa-yy}$, ſeu $2ay + aa + yy = x\sqrt{aa-yy}$: & quadrando partes diviſas per $\sqrt{a+y}$, acordinando, prodit $y^3 + 3ayy \begin{matrix} +3aa \\ +xx \end{matrix} y \begin{matrix} +a^3 \\ -axx \end{matrix} = 0$. Problemata Geometrica.

Idem aliter.

In BC cape hinc inde BI, & CK æquales CF; & age KF, HI, HC, ac DF; quarum HC ac DF occurrant ipſis AF & IK in M & N: & in HC demitte normalem IL. Eritque angulus K $= \frac{1}{2}$ BCF $= \frac{1}{2}$ EGF = GFD = AMH = MHI = CIL; adeoque triangula rectangula KBF, FBN, HLI & ILC ſimilia. Dic ergo FC$=a$, HI$=x$, & IC$=y$; & erit BN $(2a-y.)$. BK (y): : LC. LH : : CI$q(yy.)$ HI$q\ (xx.)$ adeoque $2axx - yxx = y^3$. Ex quâ æquatione facilè colligitur hanc curvam eſſe Ciſſoidem Veterum, ad circulum cujus centrum ſit A ac radius AH, pertinentem.

PROB. XXXV.

Si datæ longitudinis recta ED, *angulum datum,* EAD, *ſubtendens, ita moveatur, ut termini ejus,* D *&* E, *anguli iſtius latera,* AD *&* AE, *perpetim contingant; proponatur Curvam* FCG *determinare, quam punctum quodvis* C, *in rectâ iſtâ,* ED, *datum, deſcribit.*

A Dato puncto C age CB parallelam EA; & dic AB$=x$, BC$=y$, CE$=a$, & CD$=b$: & propter ſimilia triangula DCB, DEA, erit EC. AB : : CD. BD. hoc eſt $a. x : : b.$ BD $= \frac{bx}{a}$. Præterea demiſſo perpendiculo CH, propter datum angulum DAE vel DBC, adeoque datam rationem laterum

trianguli

 trianguli rectanguli BCH fit $a.\,e::$ BH. BH, & erit BH $= \frac{ey}{a}$. Aufer hanc de BD, & restabit HD $= \frac{bx-ey}{a}$. Jam in triangulo BCH, propter angulum rectum BHC, est BCq − BHq = CHq; hoc est, $yy - \frac{eeyy}{aa} =$ CHq. Similiter in triangulo CDH, propter angulum CHD rectum, est CDq − CHq = DHq, hoc est $bb - yy + \frac{eeyy}{aa}$ (= HDq = $\frac{bx-ey}{a}$ quadrato) = $\frac{bbxx - 2bexy + eeyy}{aa}$. Et, per reductionem, $yy = \frac{2be}{aa}xy + \frac{aabb - bbxx}{aa}$: ubi cùm incognitæ quantitates sint duarum tantùm dimensionum, patet curvam esse Conicam sectionem. Præterea, extractâ radice, fit $y = \frac{bex \pm b\sqrt{eexx - aaxx + a^4}}{aa}$. Ubi in termino radicali coefficiens ipsius xx est $ee - aa$. Atqui erat $a.\,e::$ BC. BH; & BC necessariò major est linea quàm BH, nempe Hypotenusa trianguli rectanguli major latere; ergo a major quàm e, & $ee - aa$ negativa est quantitas; atque adeo curva erit Ellipsis.

PROB. XXXVI.

Si norma, EBD, *ita moveatur, ut ejus crus unum,* EB, *continuò subtendat angulum rectum* EAB, *dum terminus alterius cruris,* BD, *describat curvam aliquam lineam* FDG; *invenire lineam istam,* FDG, *quam punctum* D *describit.*

A Puncto D ad latus AC demitte perpendiculum DC; & dictis AC $= x$, & DC $= y$, atque EB $= a$, & BD $= b$; in triangulo BDC, propter angulum rectum ad C, est BCq = BDq − DCq = $bb - yy$. Ergo BC $= \sqrt{bb-yy}$, & AB $= x - \sqrt{bb-yy}$. Præterea propter similia triangula BEA. DBC, est BD. DC :: EB. AB, hoc est $b.\,y::a.\,x-\sqrt{bb-yy}$. Quare $bx - b\sqrt{bb-yy} = ay$, sive $bx - ay = b\sqrt{bb-yy}$. Et partibus quadratis ac debitè reductis, $yy = \frac{2abxy + b^4 - bbxx}{aa+bb}$. Et extractâ radice, $y = \frac{abx \pm bb\sqrt{aa+bb-xx}}{aa+bb}$. Unde patet iterum Curvam esse Ellipsin.

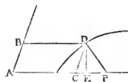
Hæc ita se habent, ubi anguli EBD & EAB recti sunt: sed si anguli isti sunt alterius cujusvis magnitudinis, dummodo sint æquales,

quales, sic procedendum erit. Demittatur DC perpendicularis ad AC ut antè, & agatur DH constituens angulum DHA æqualem angulo HAE, puta obtusum: dictisque EB $= a$, BD $= b$, AH $= x$, & HD $= y$, propter similia triangula EAB, BHD, erit BD . DH : : EB . AB; hoc est $b . y : : a$. AB $= \frac{ay}{b}$. Aufer hanc de AH, & restabit BH $= x - \frac{ay}{b}$. Præterea in triangulo DHC, propter omnes angulos datos, adeoque datam rationem laterum, assume DH ad HC in ratione quâvis datâ, puta b ad e; & cùm DH sit y, erit HC $= \frac{ey}{b}$, & HB $\times$ HC $= \frac{exy}{b} - \frac{aeyy}{bb}$. Denique per 12. II. Elem. in triangulo BHD, est BDq = BHq + DHq + 2BH $\times$ HC, hoc est $bb = xx - \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb} + yy + \frac{2exy}{b} - \frac{2aeyy}{bb}$. Et, extractâ radice, $x = \frac{ay - ey \pm \sqrt{eeyy - bbyy + bbbb}}{b}$. Ubi cùm b sit major e, hoc est $ee - bb$ negativa quantitas, patet iterum curvam esse Ellipsin.

Problemata Geometrica.

PROB. XXXVII.

In dato angulo, PAB, *actis utcunque rectis,* BD, PD, *in datâ ratione, hâc semper lege, ut* BD *sit parallela* AP, *&* PD *terminetur ad punctum,* P, *in rectâ* AP *datum; invenire locum puncti* D.



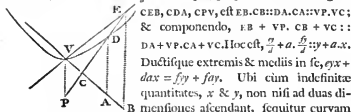
Age CD parallelam AB, & DE perpendicularem AP; ac dic AP $= a$, CP $= x$, & CD $= y$; sitque BD ad PD in ratione d ad e; & erit AC, vel BD, $= a - x$, & PD $= \frac{ea - ex}{d}$. Sit insuper, propter datum angulum DCE, ratio CD ad CE, d ad f; & erit CE $= \frac{fy}{d}$, & EP $= x - \frac{fy}{d}$. Atqui propter angulos ad E rectos, est CDq − CEq (= EDq) = PDq − EPq, hoc est, $yy - \frac{ffyy}{dd} = \frac{eeaa - 2eeax + eexx}{dd} - xx + \frac{2fxy}{d} - \frac{ffxx}{dd}$. Ac deletis utrobique $- \frac{ffyy}{dd}$, terminisque ritè dispositis, $yy = \frac{2fxy}{d} + \frac{eeaa - 2eeax + eexx - ddxx}{dd}$. Et, extractâ radice, $y = \frac{fx}{d} \pm \frac{\sqrt{eeaa - 2eeax \begin{smallmatrix}+ee\\ -dd\\ +ff\end{smallmatrix} xx}}{d}$. Ubi cùm x & y in æquatione penultimâ non nisi

 nisi ad duas dimensiones ascendant, locus puncti D erit Conica sectio; eaque Hyperbola, Parabola, vel Ellipsis, prout $ee - dd + ff$, (coefficiens ipsius xx in æquatione posteriori), sit majus, æquale, vel minus nihilo.

PROB. XXXVIII.

Rectis duabus, VE *&* VC, *positione datis, & ab aliâ rectâ,* PE, *circa polum positione datum,* P, *vertente, sectis utcunque in* C *&* E; *si recta intercepta,* CE, *dividatur in partes,* CD, DE, *rationem datam habentes, proponatur invenire locum puncti* D.

AGE VP, eique parallelas DA, EB occurrentes VC in A & B. Dic VP $=a$, VA $=x$, & AD $=y$: & cùm detur ratio CD ad DE, vel conversè ratio CD ad CE, hoc est ratio DA ad EB, sit ista ratio d ad e, & erit EB $= \frac{ey}{d}$. Præterea, cùm detur angulus EVB, adeoque ratio EB ad VB, sit ista ratio e ad f; & erit VB $= \frac{fy}{d}$. Denique, propter similia triangula



CEB, CDA, CPV, est EB.CB::DA.CA::VP.VC; & componendo, EB + VP. CB + VC:: DA + VP.CA + VC. Hoc est, $\frac{ey}{d} + a. \frac{fy}{d} :: y + a.x$. Ductisque extremis & mediis in se, $eyx + dax = fyy + fay$. Ubi cùm indefinitæ quantitates, x & y, non nisi ad duas dimensiones ascendant, sequitur curvam VD, in quâ punctum D perpetim reperitur, esse conicam sectionem, eamque Hyperbolam; quia una ex indefinitis quantitatibus, nempe x est unius tantùm dimensionis, & in termino exy multiplicatur per alteram indefinitam quantitatem y.

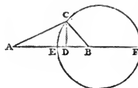
PROB. XXXIX.

Si rectæ duæ, AC, BC, *à duobus positione datis punctis,* A *&* B, *in datâ quâvis ratione ad tertium quodvis punctum,* C, *ducantur; invenire locum puncti concursûs* C.

JUnge AB; & ad hanc demitte normalem CD: dictisque AB $=a$, AD $=x$, DC $=y$: erit AC $=\sqrt{xx+yy}$; BD $=a-x$; & BC $(=\sqrt{BDq + DCq})$ $=\sqrt{}$

$= \sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$. Jam cùm detur ratio AC ad BC, sit ista d ad e; &, extremis & mediis in se ductis, erit $e\sqrt{xx+yy} = d\sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$. Et, per reductionem, $\sqrt{\frac{ddaa - 2ddax}{ee - dd} - xx} = y$. Ubi cùm xx sit negativum, & solâ unitate affectum, atque etiam angulus ADC rectus; patet curvam, in quâ punctum C locatur, esse circulum. Nempe in rectâ AB cape puncta E & F, ita ut sint $d.\ e$: : AE. BE : : AF. BF, & erit EF circuli hujus diameter.

PROBLEMATA GEOMETRICA.



Et hinc è converso patet hoc Theorema: Quòd in circuli cujusvis diametro EF, infinitè productâ, datis utcunque duobus punctis, A & B, hâc lege, ut sit AE. AF : : BE. BF, & à punctis hisce actis duabus rectis, AC, BC, concurrentibus ad circulum in puncto quovis C; erit AC ad BC in datâ ratione AE ad BE.

PROB. XL.

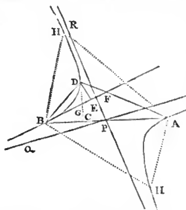
Si punctum lucidum, A, *radios versus refringentem superficiem planam,* CD, *ejiciat; invenire radium,* AC, *cujus refractus,* CB, *impinget in datum punctum* B.

A Puncto isto lucido ad refringens planum demitte perpendiculum AD, & cum eo, utrinque producto, concurrat refractus radius BC in E, & perpendiculum à puncto B demissum, in F, & agatur BD; dictisque AD $= a$, DB $= b$, BF $= c$, DC $= x$, statue rationem sinuum incidentiæ & refractionis, hoc est sinuum angulorum CAD, CED, esse d ad e: & cùm EC & AC (ut notum est) sint in eâdem ratione, & AC sit $\sqrt{aa+xx}$, erit EC$= \frac{d}{e}\sqrt{aa+xx}$. Præterea est ED $(= \sqrt{ECq - CDq}) = \sqrt{\frac{ddaa + ddxx}{ee} - xx}$; & DF $= \sqrt{bb - cc}$; atque EF $= \sqrt{bb-cc} + \sqrt{\frac{ddaa + ddxx}{ee} - xx}$. Denique, propter similia triangula ECD, EBF, est ED. DC : : EF. FB; &, ductis extremorum

Caput XIV. extremorum & mediorum valoribus in se, $c\sqrt{\frac{ddaa + ddxx}{ee} - xx} = x\sqrt{bb-cc} + x\sqrt{\frac{ddaa + ddxx}{ee} - xx}$, sive $\overline{c-x}\sqrt{\frac{ddaa + ddxx}{ee} - xx} = x\sqrt{bb-cc}$. Et, partibus æquationis quadratis & ritè dispositis, $x^4 - 2cx^3 + \dfrac{\begin{matrix} ddcc \\ +ddaa \\ -eebb \end{matrix}\, xx - 2ddaacx + ddaacc}{dd-ee} = 0$.

PROB. XLI.

Invenire locum verticis trianguli, D, *cujus basis,* AB, *datur, & anguli ad basem,* DAB, DBA, *datam habent differentiam.*



UBI angulus ad Verticem, sive, quod perinde est, ubi summa angulorum ad basem datur, docuit Euclides locum verticis esse circumferentiam circuli; III. 19. Euclid. proposuimus igitur inventionem loci ubi differentia angulorum ad basem datur. Sit angulus DBA major angulo DAB, sitque ABF eorum data differentia, rectâ BF occurrente AD in F. Insuper ad BF demittatur normalis DE, ut & ad AB normalis DC, occurrens BF in G. Dictisque AB $= a$, AC $= x$, & CD $= y$, erit BC $= a - x$. Jam in triangulo BCG, cùm dentur omnes anguli, dabitur ratio laterum, BC & GC; sit ista d ad a, & erit CG $= \frac{aa - ax}{d}$. Aufer hanc de DC, sive y, & restabit DG $= \frac{dy - aa + ax}{d}$. Præterea, propter similia triangula BGC, DGE, est BG . BC :: DG . DE. Est autem in triangulo BGC, $a . d$ :: CG . BC. Adeoque $aa . dd$ :: CGq . BCq; & componendo, $aa + dd . dd$ :: BGq . BCq. Et, extractis radicibus, $\sqrt{aa+dd} . d$ (:: BG . BC) :: DG . DE. Ergo DE $= \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}$. Adhæc, cùm angulus ABF sit differentia angulorum BAD & ABD, adeoque anguli BAD & FBD æquentur, similia erunt triangula

triangula rectangula CAD & EBD, & proinde latera proportionalia DA. DC : : DB. DE. Sed eſt DC $= y$; DA $(= \sqrt{ACq + DCq}) = \sqrt{xx+yy}$; DB $(= \sqrt{BCq + DCq}) = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$; & ſuprà erat DE $= \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa+dd}}$. Quare eſt $\sqrt{xx+yy} . y :: \sqrt{aa - 2ax + xx + yy} . \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa+dd}}$. Et extremorum & mediorum quadratis in ſe ductis, $aayy - 2axyy + xxyy + y^4 = \frac{ddxxyy + ddy^4 - 2aadxy - 2aady^3 + 2adyx^3 + 2adxy^3 + a^4xx + a^4yy - 2a^3x^3 - 2a^3xyy + aax^4 + aaxxyy}{aa+dd}$.

Duc omnes terminos in $aa+dd$, & prodeuntes redige in debitum ordinem, & orietur $x^4 \begin{array}{l} -2a \\ +\frac{2d}{a}y \end{array} x^3 \begin{array}{l} -2dy \\ +aa \end{array} xx \begin{array}{l} +\frac{2d}{a}y^3 \\ +\frac{2dd}{a}yy \end{array} x \begin{array}{l} -ddyy \\ -2dy^3 \\ -y^4 \end{array} = 0$. Divide hanc æquationem per $xx - ax \begin{array}{l} +dy \\ +yy \end{array}$, & orietur $xx \begin{array}{l} -a \\ +\frac{2d}{a}y \end{array} x \begin{array}{l} -yy \\ -dy \end{array} = 0$.

Duæ itaque prodierunt æquationes in ſolutione hujus Problematis. Prior, $xx - ax \begin{array}{l} +dy \\ +yy \end{array} = 0$, eſt ad circulum, locum nempe puncti D, ubi angulus FBD ſumitur ad alias partes rectæ BF quàm in figurâ deſcribitur, exiſtente angulo ABF ſummâ angulorum DAB, DBA ad baſem, adeoque angulo ADB ad verticem dato. Poſterior, $xx \begin{array}{l} -a \\ +\frac{2d}{a}y \end{array} x \begin{array}{l} -dy \\ -yy \end{array} = 0$ eſt, ad Hyperbolam, locum puncti D, ubi angulus FBD ſitum obtinet à rectâ BF quem in Figurâ deſcripſimus: hoc eſt, ita ut angulus ABF ſit differentia angulorum DAB, DBA ad baſem. Hyperbolæ autem hæc eſt determinatio. Biſeca AB in P. Age PQ conſtituentem angulum BPQ æqualem dimidio anguli ABF. Huic erige normalem PR, & erunt PQ, PR Aſſymptoti hujus Hyperbolæ, & B punctum per quod Hyperbola tranſibit.

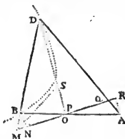
Et hinc prodit tale Theorema. *Hyperbolæ rectangulæ diametro quâvis* AB *ductâ, & à terminis ejus ad Hyperbolæ puncta duo quævis,* D *&* H, *ductis rectis* AD, BD, AH, BH; *hæ rectæ angulos,* DAH, DBH, *ad terminos diametri conſtituent æquales.*

Idem breviùs.

Ad PROB. XXIV. *Regulam* de commodâ terminorum, ad ineundum calculum, electione tradidi; ubi obvenit ambiguitas in electione. Hic differentia angulorum ad baſem eodem modo ſe

 habet

 habet ad utrumque angulum; &, in constructione Schematis, æque potuit addi ad angulum minorem DAB, ducendo ab A rectam ipsi BF parallelam, ac subtrahi ab angulo majori DBA ducendo rectam BF. Quamobrem nec addo nec subtraho; sed dimidium ejus uni angulorum addo, alteri subtraho. Deinde, cùm etiam ambiguum sit utrum AC vel BC pro termino indefinito, cui ordinatim applicata DC insistit, adhibeatur, neutrum adhibeo; sed biseco AB in P, & adhibeo PC: vel potiùs actâ MPQ constituente hinc inde angulos, APQ, BPM, æquales dimidio differentiæ angulorum ad basem, ita ut ea cum rectis AD, BD constituat angulos, DQP, DMP, æquales; ad MQ demitto normales, AR, BN, DO, & adhibeo DO pro ordinatim applicatâ, ac PO pro indefinitâ lineâ cui insistit. Voco itaque $PO=x$, $DO=y$, AR, vel BN, $=b$, & PR, vel PN, $=c$. Et propter similia triangula BNM, DOM, erit BN. DO :: MN.MO. Et dividendo, DO−BN $(y-b)$. DO (y) :: MO−MN (ON sive $c-x$). MO. Quare MO $=\frac{cy-xy}{y-b}$. Similiter, ex alterâ parte, propter similia triangula ARQ, DOQ, erit AR. DO :: RQ. QO: & componendo, DO + AR $(y+b)$. DO (y) :: QO + RQ (OR sive $c+x$). QO. Quare QO $=\frac{cy+xy}{y+b}$. Denique, propter æquales angulos DMQ, DQM, æquantur MO & QO; hoc est, $\frac{cy-xy}{y-b}=\frac{cy+xy}{y+b}$. Divide omnia per y, & multiplica per denominatores, & orietur $cy+cb-xy-xb=cy-cb+xy-xb$, sive $cb=xy$, notissima æquatio ad Hyperbolam.



Quin etiam locus puncti D sine calculo Algebraico prodire potuit. Est enim ex superioribus DO−BN.ON::DO.MO(QO)::DO+AR.OR. Hoc est DO − BN. DO + BN :: ON. OR; & mixtim, DO. BN :: $\frac{ON+OR}{2}$ (NP). $\frac{OR-ON}{2}$ (OP). Adeoque DO × OP = BN × NP.

PROB. XLII.

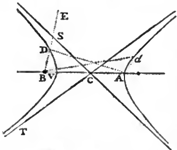
Locum verticis trianguli invenire cujus basis datur, & angulorum ad basem unus dato angulo differt à duplo alterius.

IN Schemate novissimo superioris Problematis sit ABD triangulum istud, AB basis bisecta in P, APQ vel BPM triens anguli dati,

dati, quo angulus DBA excedit duplum anguli DAB: & angulus DMQ erit duplus anguli DQM. Ad MQ demitte perpendicula, AR, BN, DO; & angulum DMQ biseca rectâ MS occurrente DO in S; & erunt triangula DOQ, SOM similia; adeoque OQ. OM :: OD. OS; & dividendo, OQ − OM. OM :: SD. OS :: (per 3. VI. Elem.) DM. OM. Quare (per 9. V. Elem.) OQ − OM = DM. Dictis jam PO = x, OD = y, AR, vel BN, = b, & PR, vel PN, = c, erit, ut in superiori Problemate, OM = $\frac{cy-xy}{y-b}$, et OQ = $\frac{cy+xy}{y+b}$; adeoque OQ − OM = $\frac{-2bcy+2xyy}{yy-bb}$. Pone jam DOq + OMq = DMq; hoc est, $yy + \frac{cc-2cx+xx}{yy-2by+bb}yy = \frac{4bbcc-8bcxy+4xxyy}{y^4-2bbyy+b^4}yy$. Et, per debitam reductionem, orietur tandem $y^4 * \begin{matrix}+cc\\-2bb\\-2cx\\-3xx\end{matrix} yy \begin{matrix}+2bxx\\+4bcx\\+2bcc\end{matrix} y \begin{matrix}+b^4\\-3bbcc\\-2bbcx\\+bbxx\end{matrix} = 0$.

Divide omnia per $y-b$, & evadet $y^3 + byy \begin{matrix}-bb\\+cc\\-2cx\\-3xx\end{matrix} y \begin{matrix}-b^3\\+3bcc\\+2bcx\\-bxx\end{matrix} = 0$. Quare punctum D est ad curvam trium dimensionum; quæ tamen evadit Hyperbola, ubi angulus BPM statuitur nullus, sive angulorum ad basem unus, DBA, duplus alterius, DAB. Tunc enim, BN sive b evanescente, æquatio fiet $yy = 3xx + 2cx - cc$.

Ex hujus autem æquationis constructione tale elicitur Theorema. *Si centro* C, *Asymptotis* CS, CT, *angulum* SCT 120 *graduum continentibus, describatur Hyperbola quævis* DV, *cujus semiaxis sint* CV, CA: *produc* CV *ad* B, *ut sit* VB = VC; *&* *ab* A *&* B *actis utcunque rectis*, AD, BD, *concurrentibus ad Hyperbolam, erit angulus* BAD *dimidium anguli* ABD *triens vero anguli* ADE, *quem recta* AD *comprehendit cum* BD *productâ. Hoc intelligendum est de Hyperbolâ quæ transit per punctum* V. *Quòd si ab iisdem punctis*, A *&* B, *actæ rectæ*, Ad, Bd, *conveniant ad conjugatam Hyperbolam, quæ transit per* A: *tunc externorum angulorum trianguli ad basem ille ad* B *erit duplus alterius ad* A.



 PROB.

Caput XIV.

PROB. XLIII.

Circulum per data duo puncta describere, qui rectam positione datam continget.

SUnto A & B puncta data, & EF recta positione data, & requiratur circulum ABE, per ista puncta describere, qui contingat rectam istam FE. Junge AB, & eam biseca in D. Ad D erige normalem, DF, occurrentem rectæ FE in F, & circuli centrum incidet in hanc novissimè ductam DF, puta in C. Junge ergo CB, & ad FE demitte CE normalem; eritque E punctum contactûs, ac CB, CE æquales inter se, utpote radii circuli quæsiti. Jam cùm puncta, A, B, D, & F, dentur, esto DB $= a$, ac DF $= b$; & ad determinandum centrum circuli quæratur DC, quam ideo dic x. Jam in triangulo CDB, propter angulum ad D rectum, est $\sqrt{DBq + DCq}$, hoc est $\sqrt{aa+xx}$, $=$CB. Est & DF $-$ DC, sive $b - x$, $=$ CF. Et in triangulo rectangulo CFE cùm dentur anguli, dabitur ratio laterum CF & CE; sit ista d ad e; & erit CE $= \frac{e}{d} \times$ CF hoc est $= \frac{eb-ex}{d}$. Pone jam CB & CE, (radios nempe circuli quæsiti), æquales inter se; & habebitur æquatio $\sqrt{aa+xx} = \frac{eb-ex}{d}$. Cujus partibus quadratis & multiplicatis per dd, oritur $aadd + ddxx = eebb - 2eebx + eexx$. Sive $xx = \frac{\overset{+eebb}{-2eebx - aadd}}{dd-ee}$. Et, extractâ radice, $x = \frac{-eeb + d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd-ee}$. Inventa est ergo longitudo DC, adeoque centrum C, quo circulus per puncta A & B describendus est, ut contingat rectam FE.

PROB. XLIV.

Circulum per datum punctum describere, qui rectas duas positione datas continget.

Resolvitur ut Prop. 43. Nam dato puncto A, datur & aliud punctum B.

ESTO datum punctum A, & sint EF, FG rectæ duæ positione datæ, & AEG circulus quæsitus easdem contingens, ac transiens per punctum istud A. Rectâ CF bisecetur angulus EFG, & centrum

centrum circuli in ipsâ reperietur. Sit istud C; & ad EF & FG demissis perpendiculis, CE, CG, erunt E ac G puncta contactûs. Jam in triangulis CEF, CGF, cùm anguli ad E & G, sint recti, & anguli ad F semisses sint anguli EFG, dantur omnes anguli adeoque ratio laterum CF & CE, vel CG. Sit ista d ad e, & si ad determinandum centrum circuli quæsiti C, assumatur $CF = x$, erit CE vel $CG = \frac{ex}{d}$. Præterea ad FC demitte normalem AH, & cùm punctum A detur, dabuntur etiam rectæ AH & FH. Dicantur istæ a & b, & ab FH, sive b, ablato FC, sive x, restabit $CH = b - x$. Cujus quadrato, $bb - 2bx + xx$, adde quadratum ipsius AH, sive aa, & summa $aa + bb - 2bx + xx$, erit ACq per 47. I. Elem. siquidem angulus AHC ex Hypothesi sit rectus. Pone jam radios circuli, AC & CG, inter se æquales; hoc est pone æqualitatem inter eorum valores, vel inter quadrata eorum; & habebitur æquatio $aa + bb - 2bx + xx = \frac{eexx}{dd}$. Aufer utrobique xx, & mutatis omnibus signis, erit $-aa - bb + 2bx = xx - \frac{eexx}{dd}$. Duc omnia in dd, ac divide per $dd - ee$, & evadet $\frac{-aadd - bbdd + 2bddx}{dd - ee} = xx$. Cujus æquationis extracta radix est $x = \frac{bdd - d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd - ee}$. Inventa est itaque longitudo FC, adeoque punctum C, quod centrum est circuli quæsiti.

Si inventus valor x, sive FC, auferatur de b, sive HF, restabit $HC = \frac{-eeb + d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd - ee}$, eadem æquatio quæ in priori problemate prodiit, ad determinandum longitudinem DC.

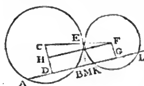
PROBLEMATA GEOMETRICA.

PROB. XLV.

Circulum per data duo puncta describere, qui alium circulum positione datum continget. Vide Prop. 21.

SINT A, B puncta data, EK circulus positione & magnitudine datus, F centrum ejus, ABE circulus quæsitus per puncta A & B transiens, ac tangens alterum circulum in E, & C centrum ejus. Ad AB productam demitte perpendicula CD, & FG; & age CF,

CAPUT XIV. CF, secantem circulos in puncto contactûs E, ac age etiam FH parallelam DG, & occurrentem CD in H. His constructis dic AD vel $DB=a$, DG vel $HF=b$, $GF=c$, & EF (radium nempe circuli dati) $=d$, atque $DC=x$: & erit CH ($=CD-FG$) $=x-c$; & CFq ($=CHq+HFq$) $=xx-2cx+cc+bb$; atque CBq ($=CDq+DBq$) $=xx+aa$; adeoque CB vel $CE=\sqrt{xx+aa}$. Huic adde EF, & habebitur $CF=d+\sqrt{xx+aa}$; cujus quadratum $dd+aa+xx+2d\sqrt{xx+aa}$, æquatur valori ejusdem CFq prius invento, nempe $xx-2cx+cc+bb$. Aufer utrobique xx, & restabit $dd+aa+2d\sqrt{xx+aa}=cc+bb-2cx$. Aufer insuper $dd+aa$, & habebitur $2d\sqrt{xx+aa}=cc+bb-dd-aa-2cx$. Jam, abbreviandi causâ, pro $cc+bb-dd-aa$, scribe $2gg$, & habebitur $2d\sqrt{xx+ca}=2gg-2cx$, sive $d\sqrt{xx+aa}=gg-cx$. Et partibus æquationis quadratis, erit $ddxx+ddaa=g^4-2ggcx+ccxx$. Utrinque aufer $ddaa$ & $ccxx$, & restabit $ddxx-ccxx=g^4-ddaa-2ggcx$. Et partibus æquationis divisis per $dd-cc$, habebitur $xx=\frac{g^4-ddaa-2ggcx}{dd-cc}$. Atque, per extractionem radicis affectæ, $x=\frac{-ggc+\sqrt{g^4dd-d^4aa+ddaacc}}{dd-cc}$.

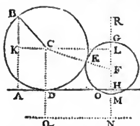


Inventâ igitur x, sive longitudine DC, biseca AB in D, & ad D erige perpendiculum $DC=\frac{-ggc+d\sqrt{g^4-aadd+aacc}}{dd-cc}$. Dein centro C, per punctum A vel B, describe circulum ABE; nam hic continget alterum circulum EK, & transibit per utrumque punctum A, B. Q. E. F.

P R O B. XLVI.

Circulum per datum punctum describere qui datum circulum, & rectam lineam positione datam continget.

SIT circulus iste describendus BD, ejus centrum C, punctum per quod describi debet B, recta quam continget AD, punctum contactûs D, circulus quem continget GEM, ejus centrum F, & punctum contactûs E. Junge CB, CD, CF; & CD erit perpendicularis ad AD, atque CF secabit circulos in puncto contactûs E. Produc

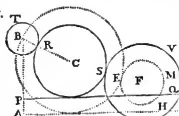


Produc CD ad Q, ut fit DQ=EF; & per Q age QN parallelam AD. Denique à B & F ad AD & QN demitte perpendicula BA, FN; & à C ad AB & FN perpendicula CK, CL. Et cùm fit BC=CD vel AK, erit BK (= AB − AK) = AB−BC, adeoque $BKq = ABq - 2AB \times BC + BCq$. Aufer hoc de BCq, & restabit $2AB \times BC - ABq$, pro quadrato de CK. Est itaque $AB \times \overline{2BC - AB} = CKq$; & eodem argumento erit $FN \times \overline{2FC - FN} = CLq$, atque adeo $\frac{CKq}{AB} + AB = 2BC$, & $\frac{CLq}{FN} + FN = 2FC$. Quamobrem, si pro AB, CK, FN, KL, & CL, scribas a, y, b, c, & $c-y$, erit $\frac{yy}{2a} + \frac{1}{2}a = BC$, & $\frac{cc-2cy+yy}{2b} + \frac{1}{2}b = FC$. De FC aufer BC, & restabit $EF = \frac{cc-2cy+yy}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{yy}{2a} - \frac{1}{2}a$. Jam si puncta, ubi FN producta secat rectam AD & circulum GEM, notentur literis H, G, & M; & in HG productâ capiatur HR=AB; cùm fit HN (=DQ=EF)=GF, addendo FH utrinque, erit FN=GH; adeoque AB − FN (=HR−GH)=GR; & AB−FN+2EF, hoc est $a-b+2EF = RM$; & $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + EF = \frac{1}{2}RM$. Quare, cùm suprà fuerit $EF = \frac{cc-2cy+yy}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{yy}{2a} - \frac{1}{2}a$, si hoc scribatur pro EF, habebitur $\frac{1}{2}RM = \frac{cc-2cy+yy}{2b} - \frac{yy}{2a}$. Dic ergo RM d, & erit $d = \frac{cc-2cy+yy}{b} - \frac{yy}{a}$. Duc omnes terminos in a & b, & orietur $abd = acc - 2acy + ayy - byy$. Aufer utrinque $acc - 2acy$, & restabit $abd - acc + 2acy = ayy - byy$. Divide per $a-b$, & orietur $\frac{abd - acc + 2acy}{a-b} = yy$. Et, extractâ radice $y = \frac{ac}{a-b} \pm \sqrt{\frac{aabd - abbd + abcc}{aa - 2ab + bb}}$. Quæ conclusiones sic abbreviari possunt. Pone $c.\,b :: d.\,e$; dein $a-b.\,a :: c.\,f$; & erit $fe - fc - 2fy = yy$, sive $y = f \pm \sqrt{ff + fe - fc}$. Invento y, sive KC vel AD, cape $AD = f \pm \sqrt{ff + fe - fc}$; ad D erige perpendiculum DC (= BC) = $\frac{KCq}{2AB} + \frac{1}{2}AB$; & centro C, intervallo CB vel CD, describe circulum BDE; nam hic transiens per datum punctum B, tanget rectam AD in D, & circulum GEM in E. Q. E. F.

Problemata Geometrica.

Hinc circulus etiam describi potest, qui duos datos circulos & rectam positione datam continget. Sint enim circuli dati RT, SV; eorum centra B, F; & recta positione data PQ. Centro F, radio

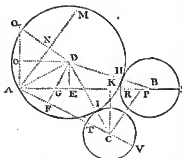
Caput XIV.



FS − BR describe circulum EM. A puncto B, ad rectam PQ demitte perpendiculum BP; & producto eo ad A, ut sit PA = BR, per A age AH parallelam PQ; & circulus describatur qui transeat per punctum B, tangatque rectam AH, & circulum EM. Sit ejus centrum C; junge BC secantem circulum RT in R; & eodem centro C, radio vero CR, descriptus circulus, RS, tanget circulos RT, SV, & rectam PQ, ut ex constructione manifestum est.

PROB. XLVII.

Circulum describere qui per datum punctum transibit, & alios duos positione, & magnitudine datos circulos continget.



Esto datum punctum A, sintque circuli positione, & magnitudine dati TIV, RHS, centra eorum C & B, circulus describendus AIH, centrum ejus D, & puncta contactûs I & H. Junge AB, AC, AD, DB, secetque AB producta circulum RHS in punctis R & S, & AC producta circulum TIV in T & V. Et à punctis D & C demissis perpendiculis, DE ad AB, & DF ad AC (occurrente AB in G) atque CK ad AB; in triangulo ADB erit $ADq - DBq + ABq = 2AE \times AB$, per 13. II. Elem. Sed $DB = AD + BR$, adeoque $DBq = ADq + 2AD \times BR + BRq$. Aufer hoc de $ADq + ABq$, & restabit $ABq - 2AD \times BR - BRq$, pro $2AE \times AB$. Est & $ABq - BRq = \overline{AB - BR} \times \overline{AB + BR} = AR \times AS$. Quare $AR \times AS - 2AD \times BR = 2AE \times AB$. Et $\frac{AR \times AS - 2AB \times AE}{BR} = 2AD$.

Et simili ratiocinio in triang. ADC emerget iterum $2AD = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Quare $\frac{RAS - 2BAE}{BR} = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Et $\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} = \frac{2CAF}{CT}$.

$\frac{2CAF}{CT}$. Et $\overline{\frac{TAV}{CT}-\frac{RAS}{BR}+\frac{2BAE}{BR}}\times\frac{CT}{2AC}=AF$. Unde, cùm ſit AK.AC::AF.AG, erit $AG=\overline{\frac{TAV}{CT}-\frac{RAS}{BR}+\frac{2BAE}{BR}}\times\frac{CT}{2AK}$. Aufer hoc de AE, ſive $\frac{2KAE}{CT}\times\frac{CT}{2AK}$, & reſtabit $GE=\overline{\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}-\frac{2BAE}{BR}+\frac{2KAE}{CT}}\times\frac{CT}{2AK}$. Unde, cùm ſit KC.AK::GE.DE, erit $DE=\overline{\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}-\frac{2BAE}{BR}+\frac{2KAE}{CT}}\times\frac{CT}{2KC}$. In AB cape AP, quæ ſit ad AB ut CT ad BR; & erit $\frac{2PAE}{CT}=\frac{2BAE}{BR}$; adeoque $\frac{2PK\times AE}{CT}=\frac{2BAE}{BR}-\frac{2KAE}{CT}$: adeoque $DE=\overline{\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}-\frac{2PK\times AE}{CT}}\times\frac{CT}{2KC}$. Ad AB erige ergo perpendiculum $AQ=\overline{\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}}\times\frac{CT}{2KC}$, & in eo cape $QO=\frac{PK\times AE}{KC}$; & erit $AO=DE$.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

Junge DO, DQ, CP; & triangula DOQ, CKP erunt ſimilia, quippe quorum anguli ad O & K ſunt recti, & latera (KC.PK::AE, vel DO.QO) proportionalia. Anguli ergo OQD, KPC æquales ſunt, & proinde QD perpendicularis eſt ad CP. Quamobrem, ſi agatur AN parallela CP, & occurrens QD in N, angulus ANQ erit rectus, & triangula AQN, PCK ſimilia; adeoque PC.KC::AQ.AN. Unde, cùm AQ ſit $\overline{\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}}\times\frac{CT}{2KC}$, AN erit $\overline{\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}}\times\frac{CT}{2PC}$. Produc AN ad M, ut ſit NM=AN; & erit AD=DM, adeoque circulus quæſitus tranſibit per punctum M. Cùm ergo punctum M datum ſit, ex his, ſine ulteriori Analyſi, talis emergit Problematis reſolutio.

In AB cape AP, quæ ſit ad AB ut CT ad BR; junge CP, eique parallelam age AM, quæ ſit ad $\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}$, ut CT ad PC: & ope *Prob.* 45. per puncta A & M deſcribe circulum, AIHM, qui tangat alterutrum circulorum, TIV, RHS; & idem circulus tanget utrumque. Q.E.F.

Et hinc circulus etiam deſcribi poteſt, qui tres circulos, poſitione & magnitudine datos, continget. Sunto trium datorum circulorum radii A, B, C, & centra D, E, F. Centris E & F, radiis $B\pm A$, $C\pm A$ deſcribantur duo circuli, & tertius circulus qui hoſce tangat, tranſeatque per punctum D. Sit hujus radius G, & centrum H; & eodem centro H, radio $G\pm A$, deſcriptus circulus continget tres primos circulos, ut fieri oportuit.

PROB. XLVIII.

Si ad extremitates fili, DAE, *circa paxillum,* A, *labentis, appendantur pondera duo,* D *&* E, *quorum pondus* E *labitur per lineam obliquam,* BG: *Invenire locum ponderis* E, *ubi pondera hæc in æquilibrio consistunt.*

PUTA factum; & ipsi AD age parallelam EF quæ sit ad AE, ut pondus E ad pondus D. Et à punctis A & F ad lineam BG demitte perpendicula AB, FG. Jam cùm pondera ex Hypothesi sint ut lineæ AE, EF, exponantur pondera per lineas istas; pondus D per lineam AE, & pondus E per lineam EF. Ergo Corpus E proprii ponderis vi directâ EF tendit versus F; & vi obliquâ EG tendit versus G. Et idem Corpus E ponderis D vi directâ AE trahitur versus A; & vi obliquâ BE trahitur versus B. Cùm itaque pondera se mutuò sustineant in æquilibrio, vis, quâ pondus E trahitur versus B, æqualis esse debet vi contrariæ, quâ tendit versus G; hoc est BE æqualis esse debet ipsi EG. Jam verò datur ratio AE ad EF ex Hypothesi; &, propter datum angulum FEG, datur etiam ratio FE ad EG, cui BE æqualis est. Ergo datur ratio AE ad BE. Datur etiam AB longitudine. Et inde triangulum ABE, & punctum E, facilè dabitur. Nempe dic $AB=a$, $BE=x$, & erit $AE=\sqrt{aa+xx}$. Sit insuper AE ad BE in datâ ratione d ad e; & erit $e\sqrt{aa+xx}=dx$. Et, partibus æquationis quadratis & reductis, $eeaa=ddxx-eexx$, sive $\frac{ea}{\sqrt{dd-ee}}=x$. Inventa est igitur longitudo BE, quæ determinat locum ponderis E. Q. E. F.

Quòd si pondus utrumque per lineam obliquam descendat, Computum sic institui potest. Sint CD, BE obliquæ lineæ, positione datæ, per quas pondera ista, D & E, descendunt. A paxillo A ad has lineas demitte perpendicula, AC, AB; iisque productis occurrant, in punctis G & H, lineæ EG, DH, à ponderibus perpendiculariter ad Horizontem erectæ; & vis quâ pondus E conatur descendere

descendere juxta lineam perpendicularem, hoc est tota gravitas ipsius E, erit ad vim quâ pondus idem conatur descendere juxta lineam obliquam BE, ut GE ad BE; atque vis, quâ conatur juxta lineam istam obliquam BE descendere, erit ad vim quâ conatur juxta lineam AE descendere, hoc est ad vim quâ filum AE distenditur, ut BE ad AE. Adeoque gravitas ipsius E erit ad tensionem fili AE ut GE ad AE. Et eâdem ratione gravitas ipsius D erit ad tensionem fili AD ut HD ad AD. Sit itaque fili totius, DA+AE, longitudo c; sitque pars ejus $\mathrm{AE} = x$; & erit altera pars $\mathrm{AD} = c-x$. Et quoniam est $\mathrm{AE}q-\mathrm{AB}q=\mathrm{BE}q$; & $\mathrm{AD}q-\mathrm{AC}q = \mathrm{CD}q$; sit insuper $\mathrm{AB} = a$, & $\mathrm{AC}=b$; & erit $\mathrm{BE}=\sqrt{xx-aa}$ & $\mathrm{CD} = \sqrt{xx-2cx+cc-bb}$. Adhæc, cùm triangula, BEG, CDH, dentur specie, sit $\mathrm{BE}.\mathrm{EG}::f.\mathrm{E}$; & $\mathrm{CD}.\mathrm{DH}::f.g$; & erit $\mathrm{EG} = \frac{\mathrm{E}}{f}\sqrt{xx-aa}$; & $\mathrm{DH} = \frac{g}{f}\sqrt{xx-2cx+cc-bb}$. Quamobrem cùm sit GE. AE :: pondus E. tensionem AE; et HD. AD :: pondus D. tensionem AD, & tensiones istæ æquentur inter se, erit $\frac{\mathrm{E}x}{\frac{\mathrm{E}}{f}\sqrt{xx-aa}}$ = tensioni AE = tensioni $\mathrm{AD} = \frac{\mathrm{D}c-\mathrm{D}x}{\frac{g}{f}\sqrt{xx-2cx+cc-bb}}$. Cujus æquationis reductione provenit $gx\sqrt{xx-2cx+cc-bb}=\overline{\mathrm{D}c-\mathrm{D}x}\sqrt{xx-aa}$; sive $\begin{matrix} gg \\ -\mathrm{DD}\end{matrix}x^4 \begin{matrix} -2ggc \\ +2\mathrm{DD}c\end{matrix}x^3 \begin{matrix} +ggcc \\ -ggbb \\ -\mathrm{DD}cc \\ +\mathrm{DD}aa\end{matrix}xx - 2\mathrm{DD}caax+\mathrm{DD}ccaa = 0$.

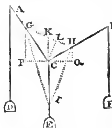
Si casum desideras quo hoc Problema per Regulam & circinum construi queat, pone pondus D ad pondus E ut ratio $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EG}}$ ad rationem $\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DH}}$; & evadet $g = \mathrm{D}$, adeoque vice præcedentis æquationis habebitur hæc, $\begin{matrix} aa \\ -bb\end{matrix}xx-2aacx+aacc=0$; sive $x=\frac{ac}{a+b}$.

PROB.

PROB. XLIX.

Si ad filum, DACBF, *circa paxillos duos,* A, B, *labile, appendantur tria pondera,* D, E, F; D *&* F *ad extremitates fili, &* E *ad medium ejus punctum,* C, *inter paxillos positum: Ex datis ponderibus & situ paxillorum invenire situm puncti* C, *ad quod medium pondus appenditur, ubi pondera consistunt in æquilibrio.*

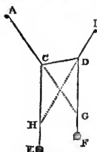
CUM tensio fili AC æquetur tensioni fili AD, & tensio fili BC tensioni fili BF; tensiones filorum, AC, BC, EC, erunt ut pondera, D, F, E. In eâdem ponderum ratione cape partes filorum CG, CH, CI. Compleatur triangulum GHI. Produc IC, donec ea occurrat GH in K, & erit GK=KH, & CK=$\frac{1}{2}$CI, adeoque C centrum gravitatis trianguli GHI. Nam per C agatur ipsi CE perpendiculare, PQ; & huic à punctis G & H perpendicularia, GP, HQ. Et si vis, quâ filum AC vi ponderis D trahit punctum C versus A, exponatur per lineam GC, vis, quâ filum istud trahet idem punctum versus P, exponetur per lineam CP; & vis, quâ trahit illud versus K, exponetur per lineam GP. Et similiter vires, quibus filum BC vi ponderis F trahit idem punctum C versus B, Q & K, exponentur per lineas CH, CQ, HQ; & vis, quâ filum CE vi ponderis E trahit punctum illud C versus E, exponetur per lineam CI. Jam cùm punctum C viribus æquipollentibus sustineatur in æquilibrio, summa virium, quibus fila AC & BC simul trahunt punctum C versus K, æqualis erit vi contrariæ, quâ filum EC trahit punctum illud versus E; hoc est summa, GP+HQ, æqualis erit ipsi CI: & vis, quâ filum AC trahit punctum C versus P, æqualis erit vi contrariæ, quâ filum BC trahit idem punctum C versus Q; hoc est linea PC æqualis lineæ CQ. Quare cùm PG, CK & QH parallelæ sint, erit etiam GK=KH, & CK ($=\frac{GP+HQ}{2}$) $=\frac{1}{2}$CI. Quod erat ostendendum. Restat itaque triangulum GCH determinandum; cujus latera, GC & HC, dantur, unà cum lineâ CK, quæ à vertice C ad medium basis ducitur. Demittatur itaque à vertice, C, ad basem, GH,



GH, perpendiculum CL; & erit $\frac{GCq-CHq}{2GH}=KL=\frac{GCq-KCq-GKq}{2GK}$. Pro 2GK scribe GH, &, rejecto communi divisore GH, & ordinatis terminis, erit $GCq-2KCq+CHq=2GKq$; sive $\sqrt{\frac{1}{2}GCq-KCq+\frac{1}{2}CHq}=GK$. Invento GK vel KH, dantur simul anguli GCK, KCH, sive DAC, FBC. Quare à punctis A & B in datis istis angulis, DAC, FBC, duc lineas, AC, BC, concurrentes in puncto C: & istud C erit punctum quod quæritur. PROBLEMATA GEOMETRICA.

Cæterùm quæstiones omnes, quæ sunt ejusdem generis, non semper opus est per Algebram sigillatim solvere, sed ex solutione unius plerumque consectatur solutio alterius. Ut si jam proponeretur hæc quæstio.

Filo, ACDB, *in datas partes,* AC, CD, DB, *diviso, & extremitatibus ejus ad paxillos duos,* A, B, *positione datos ligatis, si ad puncta divisionum,* C *ac* D, *appendantur pondera duo,* E *&* F; *ex dato pondere* F, *& situ punctorum* C *ac* D, *cognoscere pondus* E.



EX præcedentis Problematis solutione satis facilè colligetur hæcce solutio hujus. Produc lineas AC, BD, donec occurrant lineis DF, CE, in G & H; & erit pondus E ad pondus F ut DG ad CH.

Et hinc obiter patet ratio componendi stateram ex solis filis, quà pondus corporis cujusvis E, ex unico dato pondere F cognosci potest.

PROB. L.

Lapide in puteum decidente, ex sono lapidis fundum percutientis, altitudinem putei cognoscere.

SIT altitudo putei x; & si lapis motu uniformiter accelerato descendat per spatium quodlibet datum a in tempore dato b, & sonus motu uniformi transeat per idem spatium datum a in tempore dato d, lapis descendet per spatium x, in tempore $b\sqrt{\frac{x}{a}}$; sonus autem, qui fit à lapide in fundum putei impingente, ascen-

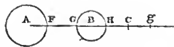
 det

Caput XIV. det per idem ſpatium x, in tempore $\frac{dx}{a}$. Ut enim ſunt ſpatia gravibus decidentibus deſcripta, ita ſunt quadrata temporum deſcenſûs. Vel ut radices ſpatiorum, hoc eſt ut $\sqrt{x}$ & $\sqrt{a}$, ita ſunt ipſa tempora. Et ut ſpatia x & a, per quæ ſonus tranſit, ita ſunt tempora tranſitûs. Ex horum temporum, $b\sqrt{\frac{x}{a}}$ & $\frac{dx}{a}$, ſummâ, conflatur tempus à lapide demiſſo ad ſoni reditum. Hoc tempus ex obſervatione cognoſci poteſt. Sit ipſum t; & erit $b\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{dx}{a} = t$. Ac $b\sqrt{\frac{x}{a}} = t - \frac{dx}{a}$. Et partibus quadratis $\frac{bbx}{a} = tt - \frac{2tdx}{a} + \frac{ddxx}{aa}$. Et, per reductionem, $xx = \frac{2adt + abb}{dd}x - \frac{aatt}{dd}$. Et, extractâ radice, $x = \frac{adt + \frac{1}{2}abb}{dd} - \frac{ab}{2dd}\sqrt{bb + 4dt}$.

PROB. LI.

Dato globo, A, *poſitione parietis,* DE, *& centri globi,* B, *à pariete diſtantiâ,* BD; *invenire molem globi* B, *eâ lege, ut in ſpatiis liberis, & vi gravitatis deſtitutis, ſi globus* A, *cujus centrum in lineâ* BD, *quæ ad parietem perpendicularis eſt, ultra* B *productâ conſiſtit, uniformi cum motu verſus* D *feratur, donec is impingat in alterum quieſcentem globum* B; *globus iſte* B, *poſtquam reflectitur à pariete, denuò occurrat globo* A *in dato puncto* C.

SIT globi A celeritas ante reflectionem a, & erit per Prob. XII. celeritas globi A poſt reflectionem $= \frac{aA - aB}{A+B}$, & celeritas globi B poſt reflexionem $= \frac{2aA}{A+B}$. Ergo celeritas globi A ad celeritatem globi B eſt ut A − B ad 2A. In GD cape $gD = $ GH diametro nempe globi B; & celeritates iſtæ erunt ut GC ad $Gg + gC$. Nam ubi Globus A impegit in globum B; punctum G, quod in ſuperficie globi B exiſtens movetur in lineâ AD, perget per ſpatium Gg, antequam globus ille B impinget in parietem, & per ſpatium gC poſtquam à pariete reflectitur (hoc eſt per totum ſpatium $Gg + gC$) in eodem tempore quo globi A punctum F perget per ſpatium



GC:

GC: eò ut globus uterque rurſus conveniant, & in ſe mutuò impingant, in punĉto dato C. Quamobrem cùm dentur intervalla BC & CD, dic $BC=m$, $BD+CD=n$, & $BG=x$; & erit $GC=m+x$, & $Gg+gC=GD+DC-2gD=GB+BD+DC-2GH=x+n-4x$, ſeu $=n-3x$. Suprà erat $A-B$ ad $2A$ ut celeritas globi A ad celeritatem globi B; & celeritas globi A ad celeritatem globi B ut GC ad $Gg+gC$; adeoque $A-B$ ad $2A$ ut GC ad $Gg+gC$. Ergo cùm ſit $GC=m+x$, & $Gg+gC=n-3x$, erit $A-B$ ad $2A$ ſicut $m+x$ ad $n-3x$. Porrò globus A eſt ad globum B ut cubus radii ejus AF ad cubum radii alterius GB; hoc eſt, ſi ponas radium AF eſſe s, ut s^3 ad x^3. Ergo $s^3-x^3.2s^3$ $(::A-B.\,2A)::m+x.\,n-3x$ Et, ductis extremis & mediis in ſe, habebitur æquatio $s^3n-3s^3x-nx^3+3x^4=2ms^3+2s^3x$. Et, per reductionem, $3x^4-nx^3-5s^3x\begin{smallmatrix}+s^3n\\-2s^3m\end{smallmatrix}=0$. Cujus æquationis conſtructione dabitur globi B ſemidiameter x; quo dato, datur etiam Globus ille. Q. E. F.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

Nota verò, quòd ubi punĉtum C jacet ad contrarias partes globi B, debet ſignum quantitatis $2m$ mutari, & ſcribi $3x^4-nx^3-5s^3x\begin{smallmatrix}+s^3n\\+2s^3m\end{smallmatrix}=0$.

Si datus eſſet Globus B, & quæreretur Globus A, eâ lege, ut globi duo poſt reflexionem convenirent in C, quæſtio foret facilior. Nempe in inventâ æquatione noviſſimâ ſupponendum eſſet x dari & s quæri. Quâ ratione per debitam reductionem illius æquationis, tranſlatis terminis $-5s^3x+s^3n-2s^3m$ ad æquationis partem contrariam, ac diviſâ utrâque parte per $5x-n+2m$, emergeret $\frac{3x^4-nx^3}{5x-n+2m}=s^3$. Ubi per ſolam extractionem radicis cubicæ obtinebitur s.

Quòd ſi dato Globo utroque quæreretur punĉtum C, in quo poſt reflexionem ambo in ſe mutuò impingerent: cùm ſuprà fuerit $A-b$ ad $2A$ ut GC ad $Gg+gC$; ergo, invertendo & componendo, $3A-B$ erit ad $A-B$ ut $2Gg$ ad diſtantiam quæſitam GC.

PROB.

Caput XIV.

PROB. LII.

Si globi duo, A *&* B, *tenui jungantur filo,* PQ, *& pendente globo* B *à globo* A, *si demittatur globus* A, *ita ut globus uterque simul solâ gravitatis vi, in eâdem lineâ perpendiculari* PQ *cadere incipiat; dein globus inferior* B, *postquam à fundo, seu plano horizontali* FG, *sursùm reflectitur, superiori decidenti globo* A *occurrat in puncto quodam,* D *: ex datâ fili longitudine* PQ, *& puncti illius,* D, *à fundo distantiâ,* DF, *invenire altitudinem,* PF, *à quâ globus superior,* A, *ad hunc effectum demitti debet.*

SIT fili PQ longitudo a. In perpendiculo PQRF ab F sursùm cape FE æqualem globi inferioris diametro QR; ita ut cùm globi illius punctum infimum, R, incidit in fundum ad F, punctum ejus supremum, Q, occupet locum E; sitque ED distantia, per quam globus ille, postquam à fundo reflectitur, ascendendo transit, antequam globo superiori decidenti occurrat in puncto D. Igitur ob datam puncti D à fundo distantiam, DF, globique inferioris diametrum, EF, dabitur eorum differentia DE. Sit ea $= b$. Sitque altitudo, quam globus ille inferior, antequam impingit in fundum, cadendo describit (RF vel QE) $= x$, siquidem ea ignoretur. Et invento x, si eidem addantur EF & PQ, habebitur altitudo PF, à quâ globus superior ad effectum desideratum demitti debet.

Cùm igitur sit PQ $= a$, & QE $= x$, erit PE $= a + x$. Aufer DE, seu b, & restabit PD $= a + x - b$. Est autem tempus descensûs globi A ut radix spatii cadendo descripti, seu $\sqrt{a+x-b}$; & tempus descensûs globi alterius, B, ut radix spatii cadendo descripti, seu $\sqrt{x}$; & tempus ascensûs ejusdem ut differentia radicis illius & radicis spatii, quod cadendo tantùm à Q ad D describeretur. Nam hæc differentia est ut tempus descensûs à D ad E; quod æquale est tempori ascensûs ab E ad D. Est autem differentia illa $\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$. Unde tempus descensûs & ascensûs conjunctim erit ut $2\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$. Quamobrem, cùm hoc tempus æquetur tempori descensûs globi superioris, erit $\sqrt{a+x-b} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$. Cujus æquationis partibus quadratis habebitur $a+x-b = 5x-b-$

4 √

$4\sqrt{xx-bx}$, seu $a=4x-4\sqrt{xx-bx}$; &, ordinatâ æquatione, $4x-a=4\sqrt{xx-bx}$. Cujus partes iterum quadrando oritur $16xx-8ax+aa=16xx-16bx$, seu $aa=8ax-16bx$. Et, divisis omnibus per $8a-16b$, fiet $\frac{aa}{8a-16b}=x$. Fac igitur ut $8a-16b$ ad a ita a ad x, & habebitur x, seu QE. Q. E. I. Problemata Geometrica.

Quòd si ex dato QE quæreretur fili longitudo PQ, seu a; eadem æquatio, $aa=8ax-16bx$, extrahendo affectam radicem quadraticam, daret $a=4x-\sqrt{16xx-16bx}$. Id est, si sumas QY mediam proportionalem inter QD & QE, erit PQ $=4$EY. Nam media illa proportionalis erit $\sqrt{x \times x-b}$, seu $\sqrt{xx-bx}$; quod subductum de x, seu QE, relinquit EY; cujus quadruplum est $4x-4\sqrt{xx-bx}$.

Sin verò ex datis tum QE, seu x, tum fili longitudine PQ, seu a, quæreretur punctum D, in quo globus superior in inferiorem incidit: puncti illius à dato puncto E distantia DE, seu b, è præcedente æquatione $aa=8ax-16bx$, eruetur; transferendo aa & $16bx$ ad æquationis partes contrarias cum signis mutatis, & omnia dividendo per $16x$. Orietur enim $\frac{8ax-aa}{16x}=b$. Fac igitur ut $16x$, ad $8x-a$ ita a ad b, & habebitur b, seu DE.

Hactenus suppofui globos tenui filo connexos simul dimitti. Quòd si nullo connexi filo diversis temporibus dimittantur, ita ut globus superior A, verbi gratiâ, priùs dimissus, descenderit per spatium PT, antequam globus alter incipiat cadere; & ex datis distantiis, PT, PQ, ac DE quæratur altitudo, PF, à quâ globus superior dimitti debet, eâ lege ut in inferiorem incidat ad punctum D: sit PQ$=a$, DE$=b$, PT$=c$, & QE$=x$; & erit PD$=a+x-b$ ut suprà. Et tempora, quibus globus superior cadendo describat spatia PT ac TD, & globus inferior priùs cadendo dein reascendendo describat summam spatiorum QE$+$ED, erunt ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{PD}-\sqrt{PT}$, & $2\sqrt{QE}-\sqrt{QD}$; hoc est, ut $\sqrt{c}$, $\sqrt{a+x-b}-\sqrt{c}$, & $2\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$. At ultima duo tempora, propterea quòd spatia, TD, & QE$+$ED, simul describuntur, æqualia sunt. Ergo $\sqrt{a+x-b}-\sqrt{c}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$. Et partibus quadratis, $a+c-2\sqrt{ca+cx-cb}=4x-4\sqrt{xx-bx}$. Pone $a+c=e$, & $a-b=f$; & erit, per debitam reductionem, $4x-e+2\sqrt{cf+cx}=4\sqrt{xx-bx}$; &, partibus quadratis, $ee-8ex+16xx+4cf$

CAPUT XIV. $+4cx+\overline{16x-4e}\sqrt{\overline{cf+cx}}=16xx-16bx$. Ac deletis utrobique $16xx$, & pro $ee+4cf$ ſcripto m, nec non pro $8e-16b-4c$ ſcripto n, habebitur, per debitam reductionem, $\overline{16x-4e}\sqrt{\overline{cf+cx}}=nx-m$. Et partibus quadratis, $256cfxx+256cx^3-128cefx-128cexx+16ceef+16ceex=nnxx-2mnx+mm$. Et, ordinatâ æquatione,

$$256cx^3 \begin{array}{l} -128cexx \\ +256cf \\ -nn \end{array} \begin{array}{l} +16ceex \\ -128ccf \\ +2mn \end{array} \begin{array}{l} +16ceef \\ -mm \end{array} = 0.$$

Cujus æquationis conſtructione, dabitur x ſeu QE; cui ſi addas datas diſtantias, PQ, & EF, habebitur altitudo PF, quam oportuit invenire.

P R O B. LIII.

Si globi duo quieſcentes, ſuperior A, *& inferior* B, *diverſis temporibus dimittantur; & globus inferior eo temporis momento cadere incipiat, ubi ſuperior cadendo jam deſcripſit ſpatium* PT; *invenire loca* α, β, *quæ globi illi cadentes occupabunt, ubi eorum intervallum,* $\varpi\chi$, *dato æquale eſt.*

CUM dentur diſtantiæ, PT, PQ, & $\varpi\chi$, dic primam a, ſecundam b, tertiam c; & pro Pϖ, ſeu ſpatio quod globus ſuperior, antequam pervenit ad locum quæſitum α, cadendo deſcribit, ponatur x. Jam tempora, quibus globus ſuperior deſcribit ſpatia, PT, Pϖ, Tϖ, & inferior ſpatium Qχ, ſunt ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{P\varpi}$, $\sqrt{P\varpi}-\sqrt{PT}$, & $\sqrt{Q\chi}$. Quorum temporum poſteriora duo, eo quòd globi cadendo ſimul deſcribant ſpatia Tϖ & Qχ, ſunt æqualia. Unde & $\sqrt{P\varpi}-\sqrt{PT}$ æquale erit $\sqrt{Q\chi}$. Erat $P\varpi=x$, & $PT=a$; & ad Pϖ addendo $\varpi\chi$, ſeu c, & à ſummâ auferendo PQ, ſeu b, habebitur $Q\chi=x+c-b$. Quamobrem, his ſubſtitutis, fiet $\sqrt{x}-\sqrt{a}=\sqrt{x+c-b}$. Et æquationis partibus quadratis, orietur $x+a-2\sqrt{ax}=x+c-b$. Ac, deleto utrobique x, & ordinatâ æquatione, habebitur $a+b-c=2\sqrt{ax}$. Et partibus quadratis erit quadratum de $a+b-c$ æquale

quale $4ax$, & quadratum illud divisum per $4a$ æquale x; seu $4a$ ad $a+b-c$ sicut $a+b-c$ ad x. Ex invento autem x, seu Pϖ, datur globi superioris decidentis locus quæsitus α. Et per locorum distantiam simul datur etiam locus inferioris β. PROBLEMATA GEOMETRICA.

Et hinc si punctum quæratur, ubi globus superior cadendo tandem impinget in inferiorem; ponendo distantiam $\varpi\chi$ nullam esse, seu delendo c, dic $4a$ ad $a+b$ ut $a+b$ ad x, seu Pϖ; & punctum ϖ erit quod quæris.

Et vicissim si detur punctum illud ϖ, vel χ, in quo globus superior incidit in inferiorem, & quæratur locus, T, quem superioris globi decidentis punctum imum, P, tunc occupabat, cùm globus inferior incipiebat cadere: quoniam est $4a$ ad $a+b$ ut $a+b$ ad x, seu, ductis extremis & mediis in se, $4ax = aa+2ab+bb$; &, per æquationis debitam ordinationem, $aa = 4ax-2ab-bb$: extrahe radicem quadraticam, & proveniet $a = 2x-b-2\sqrt{xx-bx}$. Cape ergo Vϖ mediam proportionalem inter Pϖ & Qϖ, & versus V cape VT=VQ, & erit T punctum quod quæris. Nam Vϖ erit $=\sqrt{\text{P}\varpi\times\text{Q}\varpi}$; hoc est $=\sqrt{x\times\overline{x-b}}$, seu $=\sqrt{xx-bx}$; cujus duplum subductum de $2x-b$, seu de 2Pϖ−PQ, hoc est de PQ+2Qϖ, relinquit PQ−2VQ, seu PV−VQ, hoc est PT.

Si denique globorum, postquam superior incidit in inferiorem, & impetu in se invicem facto inferior acceleratur, superior retardatur, desiderantur loci, ubi inter cadendum distantiam datæ rectæ æqualem acquirent: quærendus erit primò locus, ubi superior impingit in inferiorem; dein, ex cognitis tum magnitudinibus globorum tum eorum, ubi in se impingunt, celeritatibus, inveniendæ sunt celeritates, quas proxime post reflexionem habebunt; idque per modum PROB. XII. Postea quærenda sunt loca summa, ad quæ globi celeritatibus hisce, si sursum ferantur, ascenderent; & inde cognoscentur spatia, quæ globi datis temporibus post reflexionem cadendo describent, ut & differentia spatiorum: & vicissim, ex assumptâ illâ differentiâ, per Analysin regredietur ad ipsa spatia cadendo descripta.

Ut si globus superior incidit in inferiorem ad punctum π, & post reflexionem celeritas superioris deorsum tanta sit, ut si sur-

CAPUT XIV.

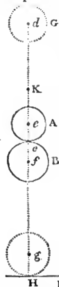
fum effet, afcendere faceret globum illum per fpatium $\pi\mathrm{N}$, & inferioris celeritas deorfum tanta effet, ut, fi furfum effet, afcendere faceret globum illum inferiorem per fpatium $\pi\mathrm{M}$; tum tempora, quibus globus fuperior viciffim defcenderet per fpatia $\mathrm{N}\pi$, NG, & inferior per fpatia $\mathrm{M}\pi$, MH, forent ut $\sqrt{\mathrm{N}\pi}$, $\sqrt{\mathrm{NG}}$, $\sqrt{\mathrm{M}\pi}$, $\sqrt{\mathrm{MH}}$; adeoque tempora, quibus globus fuperior conficeret fpatium $\pi\mathrm{G}$, & inferior fpatium $\pi\mathrm{H}$, forent ut $\sqrt{\mathrm{NG}}-\sqrt{\mathrm{N}\pi}$, ad $\sqrt{\mathrm{MH}}-\sqrt{\mathrm{M}\pi}$. Pone hæc tempora æqualia effe, & erit $\sqrt{\mathrm{NG}}-\sqrt{\mathrm{N}\pi}=\sqrt{\mathrm{MH}}-\sqrt{\mathrm{M}\pi}$. Et infuper, cùm detur diftantia GH, pone $\pi\mathrm{G}+\mathrm{GH}=\pi\mathrm{H}$. Et harum duarum æquationum reductione folvetur problema. Ut fi fit $\mathrm{M}\pi=a$, $\mathrm{N}\pi=b$, $\mathrm{GH}=c$, $\pi\mathrm{G}=x$; erit, juxta pofteriorem æquationem, $x+c=\pi\mathrm{H}$. Adde $\mathrm{M}\pi$; fiet $\mathrm{MH}=a+c+x$. Ad $\pi\mathrm{G}$ adde $\mathrm{N}\pi$, & fiet $\mathrm{NG}=b+x$. Quibus inventis, juxta priorem æquationem, erit $\sqrt{b+x}-\sqrt{b}=\sqrt{a+c+x}-\sqrt{a}$. Scribatur e pro $a+c$, & $\sqrt{f}$ pro $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; & æquatio fiet $\sqrt{b+x}=\sqrt{e+x}-\sqrt{f}$. Et, partibus quadratis, $b+x=e+x+f-2\sqrt{ef+fx}$, feu $e+f-b=2\sqrt{ef+fx}$. Pro $e+f-b$ fcribe g, & fiet $g=2\sqrt{ef+fx}$; &, partibus quadratis, $gg=4ef+4fx$; &, per reductionem, $\frac{gg}{4f}-e=x$.

PROB. LIV.

Si duo fint globi, A, B, *quorum fuperior,* A, *ab altitudine,* G, *decidens, in alterum inferiorem,* B, *à fundo,* H, *verfus fuperiora refilientem, incidat; & hi globi ita per reflexionem ab invicem denuò recedant, ut globus* A, *vi reflexionis illius, ad altitudinem priorem,* G, *redeat, idque eodem tempore quo globus inferior,* B, *ad fundum,* H, *revertitur; dein globus* A *rurfùs decidat, & in globum* B, *à fundo refilientem, denuò incidat, idque in eodem loco,* AB, *ubi priùs in ipfum incidebat; & fic perpetuò globi ab invicem refiliant, rurfufque ad eundem locum redeant: Ex datis globorum magnitudinibus, pofitione fundi & loco* G, *à quo globus fuperior decidit, invenire locum ubi globi in fe mutuò impingent.*

SIT e centrum globi A, & f centrum globi B; d centrum loci G, in quo globus fuperior in maximâ eft altitudine; g centrum loci globi inferioris ubi in fundum impingit; a femidia-

meter globi A, b ſemidiameter globi B, c punctum contactûs globorum in ſe mutuò impingentium, & H punctum contactûs globi inferioris & fundi. Et celeritas globi A, ubi in globum B impingit, ea erit, quæ generatur caſu globi ab altitudine de; adeoque eſt ut $\sqrt{de}$. Hâc eâdem celeritate reflecti debet globus A verſus ſuperiora, ut ad locum priorem, G redeat. Et globus B eâdem celeritate deorſum reflecti debet, quâ aſcenderat, ut eodem tempore redeat ad fundum quo inde receſſerat. Ut autem hæc PROBLEMATA GEOMETRICA.



duo eveniant, globorum motus inter reflectendum æquales eſſe debent. Motus autem ex globorum celeritatibus & magnitudinibus componuntur; adeoque quod fit ex globi unius mole & celeritate æquale erit ei, quod fit ex globi alterius mole & celeritate. Unde ſi factum ex unius globi mole & celeritate dividatur per molem alterius globi, habebitur celeritas alterius globi proximè ante & poſt reflexionem; ſeu ſub fine aſcenſûs & initio deſcenſûs. Erit igitur hæc celeritas ut $\frac{A\sqrt{de}}{B}$; ſeu, cùm globi ſint ut cubi radiorum, ut $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. Ut autem hujus celeritatis quadratum ad quadratum celeritatis globi A proximè ante reflexionem, ita altitudo ad quam globus B hâc celeritate, ſi occurſu globi A in eum decidentis non impediretur, aſcenderet, ad altitudinem ed à quâ globus A deſcendit. Hoc eſt ut $\frac{Aq}{Bq}de$ ad de, ſeu ut Aq ad Bq, vel a^6 ad b^6, ita altitudo illa prior ad x; ſi modò pro altitudine poſteriore cd ponatur x. Ergo hæc altitudo, ad quam nimirum, B ſi non impediretur, aſcenderet, eſt $\frac{a^6}{b^6}x$. Sit ea fK. Ad fK adde fg, ſeu dH$-de-ef-g$H; hoc eſt $p-x$, ſi modò pro dato dH$-ef-g$H ſcribas p, & x pro incognito de; & habebitur K$g=\frac{a^6}{b^6}x+p-x$. Unde celeritas globi B, ubi decidit à K ad fundum, hoc eſt ubi decidit per ſpatium Kg quod centrum ejus inter decidendum deſcriberet, erit ut $\sqrt{\frac{a^6}{b^6}x+p-x}$. At globus ille decidit à loco Bcf ad fundum, eodem tempore quo globus ſuperior, A, aſcendit à loco Ace ad ſummam altitudinem d,

aut

 aut viciſſim deſcendit à d ad locum Ace; & proinde, cùm gravium cadentium celeritates æqualibus temporibus æqualiter augeantur, celeritas globi B deſcendendo ad fundum tantùm augebitur, quanta eſt celeritas tota, quam globus A eodem tempore cadendo à d ad e acquirat, vel aſcendendo ab e ad d amittat. Ad celeritatem itaque quam globus B habet in loco Bcf adde celeritatem, quam globus A habet in loco Ace; & ſumma, quæ eſt ut $\sqrt{de} + \frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$, ſeu $\sqrt{x} + \frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$, erit celeritas globi B, ubi is in fundum incidit. Proinde $\sqrt{x} + \frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$ æquabitur $\sqrt{\frac{a^6}{b^6}x + p - x}$. Pro $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ ſcribe $\frac{r}{s}$; & pro $\frac{a^6-b^6}{b^6}$, $\frac{rt}{ss}$; & æquatio illa fiet $\frac{r}{s}\sqrt{x} = \sqrt{\frac{rt}{ss}x + p}$; &, partibus quadratis, $\frac{rr}{ss}x = \frac{rt}{ss}x + p$. Aufer utrobique $\frac{rt}{ss}x$, duc omnia in ss, ac divide per $rr-rt$; & orietur $x = \frac{ssp}{rr-rt}$. Quæ quidem æquatio prodiiſſet ſimplicior, ſi modò aſſumpſiſſem $\frac{p}{s}$ pro $\frac{a^3+b^3}{b^3}$: prodiiſſet enim $\frac{ss}{p-t} = x$. Unde faciendo ut ſit $p-t$ ad s ut s ad x, habebitur x, ſeu ed; cui ſi addas ec, habebitur dc, & punctum c in quo globi in ſe mutuò impingent. Q. E. F.

PROB. LV.

Erectis alicubi terrarum tribus baculis, ad Horizontale planum in punctis, A, B, *&* C, *perpendicularibus, quorum is qui in* A *ſit ſex pedum, qui in* B *octodecim pedum, & qui in* C *octo pedum, exiſtente lineâ* AB *triginta trium pedum: contingit quodam die extremitatem umbræ baculi* A, *tranſire per puncta* B *&* C; *baculi autem* B *per* A *&* C; *ac baculi* C *per punctum* A. *Quæritur declinatio ſolis & elevatio Poli, ſive dies locuſque, ubi hæc evenerint?*

Quoniam umbra baculi cujuſque deſcripſit Conicam ſectionem, ſectionem nempe Coni radioſi cujus vertex eſt baculi ſummitas; fingam BCDEF eſſe hujuſmodi curvam (ſive ea ſit Hyperbola, Parabola vel Ellipſis) quam umbra baculi A eo die deſcripſit; ponendo AD, AE, AF ejus umbras fuiſſe cùm BC, BA, CA reſpectivè fuerunt umbræ baculorum B & C. Et præterea fingam PAQ eſſe lineam Meridionalem, ſive axem hujus curvæ, ad quem demiſſæ perpendiculares, BM, CH, DK, EN, & FL, ſunt ordinatim

dinatim applicatæ. Has verò ordinatim applicatas indefinitè defignabo literâ y, & axis partes interceptas, AM, AH, AK, AN, & AL, literâ x. Fingam denique æquationem $aa \dot{-} bx \dot{-} cxx = yy$, ipfarum x & y relationem (*i. e.* naturam Curvæ) defignare, affumendo aa, b & c tanquam cognitas, ut ex Analyfi tandem inveniantur. Ubi incognitas quantitates x & y, duarum tantùm dimenfionum pofui, quia æquatio eft ad Conicam fectionem; & ipfius y dimenfiones impares omifi, quia ipfa eft ordinatim applicata ad axem. Signa autem ipforum b & c, quia indeterminata funt, defignavi notulâ $\dot{-}$, quam indifferenter pro + aut − ufurpo, & ejus oppofitum $\underset{\cdot}{-}$ pro figno contrario. At fignum quadrati aa affirmativum pofui, quia baculum A, umbras in adverfas plagas (C & F, B & E) projicientem, concava pars curvæ neceffariò complectitur; & proinde fi ad punctum A erigatur perpendiculum Aβ, hoc alicubi occurret curvæ, puta in β; hoc eft, ordinatim applicata y, ubi x nullum eft, erit reale. Nam inde fequitur, quadratum ejus, quod in eo cafu eft aa, affirmativum effe.

Conftat itaque quòd æquatio hæc fictitia $aa \dot{-} bx \dot{-} cxx = yy$, ficut terminis fuperfluis non referta, fic neque reftrictior eft, quàm ut ad omnes hujus problematis conditiones fe extendat, Hyperbolam, Ellipfin vel Parabolam quamlibet defignatura, prout ipforum aa, b, c, valores determinabuntur, aut nulli fortè reperientur. Quid autem valent, quibufque fignis b & c debent affici, & inde quænam fit hæc curva, ex fequenti Analyfi conftabit.

Analyfeos pars prior.

Cum umbræ fint ut altitudines baculorum erit BC. AD : : AB. AE (: : 18. 6.) : : 3. 1. Item CA. AF (: : 8. 6.) : : 4. 3. Quare nominatis AM $= r$, MB $= s$, AH $= t$, & HC $= \dot{-} v$; ex fimilitudine triangulorum, AMB, ANE, & AHC, ALF, erunt AN $= -\frac{r}{3}$. NE $= -\frac{s}{3}$. AL $= -\frac{3t}{4}$. Et LF $= \underset{\cdot}{-} \frac{3v}{4}$: quarum figna fignis ipfarum, AM, MB, AH, HC, contraria pofui, quia tendunt ad contrarias plagas refpectu puncti

puncti A, à quo ducuntur, axisve PQ cui insistunt. His autem pro x & y in æquatione fictitiâ, $aa \perp bx \perp cxx = yy$, respectivè scriptis,

r & s dabunt $aa \perp br \perp crr = ss$.

$-\frac{r}{3}$ & $-\frac{s}{3}$ dabunt $aa \top \frac{br}{3} \perp \frac{1}{9}crr = \frac{1}{9}ss$.

t & $\perp v$ dabunt $aa \perp bt \perp ctt = vv$.

$-\frac{3}{4}t$ & $\perp \frac{3}{4}v$ dabunt $aa \perp \frac{3}{4}bt \perp \frac{9}{16}ctt = \frac{9}{16}vv$.

Jam è primâ & secundâ harum, exterminando ss ut obtineatur r, prodit $\frac{2aa}{\perp b} = r$: unde patet $\perp b$ esse affirmativum. Item è tertiâ & quartâ, exterminando vv ut obtineatur t, prodit $\frac{aa}{3b} = t$. Et scriptis insuper $\frac{2aa}{b}$ pro r in primâ, & $\frac{aa}{3b}$ pro t in tertiâ, oriuntur $3aa \perp \frac{4a^4c}{bb} = ss$, & $\frac{4}{3}aa \perp \frac{a^4c}{9bb} = vv$.

Porrò demissâ Bλ perpendiculari in CH, erit BC. AD (: : 3. 1.) : : Bλ. AK : : Cλ. DK. Quare, cùm sit Bλ ($=$ AM $-$ AH $= r - t$) $= \frac{5aa}{3b}$, erit AK $= \frac{5aa}{9b}$; vel potiùs $= -\frac{5aa}{9b}$. Item, cùm sit Cλ ($=$ CH $\perp$ BM $=$ $v \perp s$) $= \sqrt{\frac{4aa}{3} \perp \frac{a^4c}{9bb}} \perp \sqrt{3aa \perp \frac{4a^4c}{bb}}$, erit DK ($= \frac{1}{3}$Cλ) $= \sqrt{\frac{4aa}{27} \perp \frac{a^4c}{81bb}} \perp \sqrt{\frac{1}{3}aa \perp \frac{4a^4c}{9bb}}$. Quibus in æquatione, $aa + bx \perp cxx = yy$, pro AK ac DK, sive x, & y, respectivè scriptis, prodit $\frac{4aa}{9} \perp \frac{25a^4c}{81bb} = \frac{13}{27}aa \perp \frac{37a^4c}{81bb} \perp 2\sqrt{\frac{4aa}{27} \perp \frac{a^4c}{81bb}} \times \sqrt{\frac{aa}{3} \perp \frac{4a^4c}{9bb}}$. Et, per reductionem, $-bb \top 4aac = \perp 2\sqrt{36b^4 \perp 51aabbc + 4a^4cc}$; &, partibus quadratis, iterumque reductis, exit $0 = 143b^4 \perp 196aabbc$, sive $\frac{-143bb}{196aa} = \perp c$. Unde constat $\perp c$ negativam esse, adeoque æquationem fictitiam, $aa \perp bx \perp cxx = yy$, hujus esse formæ, $aa + bx - cxx = yy$; & ideo curvam quam designat Ellipsin esse. Ejus vero centrum & axes duo sic eruuntur.

Ponendo $y = 0$ (sicut in Figuræ verticibus P & Q contingit) habebitur $aa + bx = cxx$; &, extractâ radice, $x = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}} = \frac{\text{AQ}}{\text{AP}}$. Adeoque sumpto AV $= \frac{b}{2c}$, erit V centrum Ellipsis, & VQ vel VP ($\sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}}$) semiaxis maximus. Si porrò ipsius AV valor $\frac{b}{2c}$ pro x in

in æquatione, $aa+bx-cxx=yy$, ſcribatur, fiet $aa+\frac{bb}{4c}=yy$. Quare eſt $aa+\frac{bb}{4c}=$ VZq, hoc eſt, quadrato ſemiaxis minimi. Denique in valoribus ipſarum, AV, VQ, VZ, jam inventis, ſcripto $\frac{143bb}{196aa}$ pro c, exeunt $\frac{98aa}{143b}=$ AV, $\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}=$ VQ, & $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}=$ VZ. Problemata Geometrica.

Analyſeos pars altera.

Supponatur jam baculum puncto A inſiſtens eſſe AR, & erit RPQ planum meridionale, ac RPZQ conus radioſus, cujus vertex eſt R. Sit inſuper TXZ planum ſecans Horizontem in VZ, ut & meridionale planum in TVX; quæ ſectio ſit ad axem mundi conive perpendicularis; & ipſum planum TXZ erit ad eundem axem perpendiculare, & conum ſecabit in peripheriâ circuli TZX, quæ ab ejus vertice pari ubique intervallo, RX, RZ, RT, diſtabit. Quamobrem, ſi PS ipſi TX parallela ducatur, fiet RS=RP, propter æquales, RX, RT; nec non SX=XQ, propter æquales, PV, VQ. Unde eſt RX, vel RZ $\left(=\frac{\text{RS}+\text{RQ}}{2}\right)=\frac{\text{RP}+\text{RQ}}{2}$. Denique ducatur RV; & cùm VZ perpendiculariter inſiſtat plano RPQ, (ſectio utique exiſtens planorum eidem perpendiculariter inſiſtentium) fiet triangulum RVZ rectangulum ad V.

Dictis jam RA $=d$, AV $=e$, VP, vel VQ $=f$, & VZ $=g$; erit AP $=f-e$, & RP $=\sqrt{ff-2ef+ee+dd}$. Item AQ $=f+e$, & RQ $=\sqrt{ff+2ef+ee+dd}$: adeoque RZ $\left(=\frac{\text{RP}+\text{RQ}}{2}\right)=\frac{\sqrt{ff-2ef+ee+dd}+\sqrt{ff+2ef+ee+dd}}{2}$. Cujus quadratum $\frac{dd+ee+ff}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{f^4-2eeff+e^4+2ddff+2ddee+d^4}$, eſt æquale (RV$q$ + VZq = RAq + AVq + VZq =) $dd+ee+gg$. Jam, reductione factâ, eſt $\sqrt{f^4-2eeff+e^4+2ddff+2ddee+d^4}=dd+ee-ff+2gg$; &, partibus quadratis ac in ordinem redactis, $ddff=ddgg+eegg-ffgg+g^4$; ſive $\frac{ddff}{gg}=dd+ee-ff+gg$. Denique 6, $\frac{98aa}{143b}$, $\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}$, & $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$ (valoribus ipſorum AR, AV, VQ, & VZ) pro d, e, f, ac g reſtitutis, oritur $36-\frac{196a^4}{143bb}+\frac{192aa}{143}=\frac{36\times 14\times 14aa}{143bb}$; & inde, per reductionem, $\frac{49a^4+36\times 49aa}{48aa+1287}=bb$.

 In primo Schemate eſt $AMq+MBq=ABq$, hoc eſt $rr+ss=33\times 33$. Erat autem $r=\frac{2aa}{b}$, & $ss=3aa-\frac{4a^4c}{bb}$; unde $rr=\frac{4a^4}{bb}$, & (ſubſtituto $\frac{143bb}{196aa}$ pro c) $ss=\frac{4aa}{49}$: quare $\frac{4a^4}{bb}+\frac{4aa}{49}=33\times 33$: & inde, per reductionem, iterum reſultat $\frac{4\times 49a^4}{53361-4aa}=bb$. Ponendo igitur æqualitatem inter duo bb, & dividendo utramque partem æquationis per 49, fit $\frac{a^4+36aa}{48aa+1287}=\frac{4a^4}{53361-4aa}$. Cujus partibus in crucem multiplicatis, ordinatis, ac diviſis per 49, exit $4a^4=981aa+39204$, cujus radix aa eſt $\frac{981+\sqrt{1589625}}{8}=280⌊2254144$.

Suprà inventum fuit $\frac{4\times 49a^4}{53361-4aa}=bb$, ſive $\frac{14aa}{\sqrt{53361-4aa}}=b$. Unde AV $(\frac{98aa}{143b})$ eſt $\frac{7\sqrt{53361-4aa}}{143}$; & VP vel VQ $(\frac{112aa\sqrt{3}}{143b})$ eſt $\frac{8}{143}\sqrt{160083-12aa}$. Hoc eſt, ſubſtituendo 280⌊2254144 pro aa, ac terminos in decimales numeros reducendo, AV = 11⌊188297; & VP vel VQ = 22⌊147085. Adeoque AP (PV − AV) = 10⌊958788; & AQ (AV + VQ) 33⌊335382.

Denique ſi $\frac{1}{6}$ AR, ſive 1, ponatur radius, erit $\frac{1}{6}$ AQ, ſive 5⌊555897, tangens anguli ARQ, 79 gr. 47′. 48″; & $\frac{1}{6}$ AP, ſive 1⌊826465, tangens anguli ARP, 61 gr. 17′. 57″. Quorum angulorum ſemiſumma, 70 gr. 32′. 52″, eſt complementum declinationis ſolis; & ſemidifferentia, 9 gr. 14′. 56″, complementum latitudinis Loci. Proinde declinatio ſolis erat 19 gr. 27′. 8″; & Latitudo loci 80 gr. 45′. 4″. Quæ erant invenienda.

PROB. LVI.

E Cometæ, motu uniformi rectilineo per Cœlum trajicientis, locis quatuor obſervatis, diſtantiam à terrâ, motûſque determinationem, in Hypotheſi Copernicæâ colligere.

SI è centro Cometæ, in locis quatuor obſervatis, ad planum Eclipticæ demittantur totidem perpendicula; ſintque A, B, C, D, puncta in plano illo in quæ perpendicula incidunt; per puncta illa agatur recta AD, & hæc ſecabitur à perpendiculis in eâdem ratione cum lineâ quam Cometa motu ſuo deſcribit; hoc eſt, ita ut ſit AB ad AC ut tempus inter primam & ſecundam obſervationem ad tempus inter primam ac tertiam; & AB ad AD ut tempus

tempus illud inter primam & secundam observationem ad tempus inter primam & quartam. Ex observationibus itaque dantur rationes linearum, AB, AC, AD, ad invicem. PROBLEMATICA GEOMETRICA.

Insuper in eodem Eclipticæ plano sit S Sol; EH arcus lineæ Eclipticæ in quâ terra movetur; E, F, G, H, loca quatuor terræ temporibus observationum; E locus primus, F secundus, G tertius, H quartus. Jungantur AE, BF, CG, DH, & producantur, donec tres posteriores priorem secent in I, K & L; BF in I, CG in K, DH in L: et erunt anguli, AIB, AKC, ALD, differentiæ longitudinum observatarum Cometæ; AIB differentia longitudinum loci primi Cometæ & secundi; AKC differentia longitudinum loci primi ac tertii; & ALD differentia longitudinum loci primi & quarti. Dantur itaque ex observationibus anguli AIB, AKC, ALD.

Junge SE, SF, EF; &, ob data puncta S, E, F, datumque angulum ESF, dabitur angulus SEF. Datur etiam angulus SEA, utpote differentia longitudinis Cometæ & Solis tempore observationis primæ. Quare si complementum ejus ad duos rectos, nempe angulum SEI, addas angulo SEF, dabitur angulus IEF. Trianguli igitur IEF dantur anguli unà cum latere EF, adeoque datur etiam latus IE. Et simili argumento dantur KE & LE. Dantur igitur positione lineæ quatuor, AI, BI, CK, DL; adeoque Problema huc redit, ut lineis quatuor positione datis, quintam inveniamus, quæ ab his in datâ ratione secabitur.

Demissis ad AI perpendiculis, BM, CN, DO, ob datum angulum AIB, datur ratio BM ad MI. Est & BM ad CN in datâ ratione BA ad CA; &, ob datum angulum CKN, datur ratio CN ad KN. Quare datur etiam ratio BM ad KN; & inde ratio quoque BM ad MI−KN, hoc est ad MN+IK. Cape P ad IK ut est AB ad BC; &, cùm sit MA ad MN in eadem ratione, erit etiam P+MA ad IK+MN in eâdem ratione; hoc est in ratione datâ. Quare datur ratio BM ad P+MA. Et simili argumento, si capiatur Q ad IL in ratione AB ad BD, dabitur ratio BM ad Q+MA. Et proinde ratio BM ad ip-

Caput XIV. sorum $P+MA$ & $Q+MA$ differentiam quoque dabitur. At differentia illa, nempe $P-Q$ vel $Q-P$, datur. Et proinde dabitur BM. Dato autem BM, simul dantur $P+MA$, & MI, & inde MA, ME, AE, & angulus EAB.

His inventis, erige ad A lineam plano Eclipticæ perpendicularem, quæ sit ad lineam EA, ut tangens latitudinis Cometæ in observatione primâ ad radium; & istius perpendicularis terminus erit locus centri Cometæ in observatione primâ. Unde datur distantia Cometæ à Terrâ tempore illius observationis. Et eodem modo, si è puncto B erigatur perpendicularis, quæ sit ad lineam BF, ut tangens latitudinis Cometæ in observatione secundâ ad radium, habebitur locus centri Cometæ in observatione illâ secundâ. Et acta linea à loco primo ad locum secundum ea est, in quâ Cometa per Cœlum trajicit.

PROB. LVII.

Si angulus datus, CAD, *circa punctum angulare,* A, *positione datum, & angulus datus,* CBD, *circa punctum angulare,* B, *positione datum, eâ lege circumvolvantur, ut crura,* AD, BD, *ad rectam positione datam,* EF, *sese semper intersecent: invenire lineam illam curvam, quam reliquorum crurum,* AC, BC, *intersectio,* C, *describit.*

PRoduc CA ad d, ut sit $Ad=AD$, & CB ad δ, ut sit $B\delta=BD$. Fac angulum Ade æqualem angulo ADE, & angulum $B\delta f$ æqualem angulo BDF; & produc AB utrinque, donec ea occurrat de & δf in e & f. Produc etiam ed ad G, ut sit $dG=\delta f$; & à puncto C ad lineam AB, ipsi ed parallelam, age CH, & ipsi $f\delta$ parallelam CK. Et concipiendo lineas eG, $f\delta$ immobiles manere, dum anguli, CAD, CBD, lege præscriptâ circa polos A & B volvantur, semper erit Gd æqualis ipsi δf, & triangulum CHK dabitur specie. Dic itaque $Ae=a$, $eG=b$, $Bf=c$, $AB=m$, $BK=x$, & $CK=y$. Et erit $BK.CK::Bf.f\delta$. Ergo $f\delta=\frac{cy}{x}=Gd$. Aufer hoc de Ge, & restabit $ed=b-\frac{cy}{x}$. Cùm detur specie triangulum

angulum CKH, pone CK. CH : : $d. e$; & CH. HK : : $e.f$; & erit CH $= \frac{y}{d}$, & HK $= \frac{fy}{d}$. Adeoque AH $= m - x - \frac{fy}{d}$. Eſt autem AH. HC : : Ae. ed, hoc eſt $m - x - \frac{f}{d}y. \frac{ey}{d} : : a. b - \frac{ey}{x}$. Ergo ducendo media & extrema in ſe, fiet $mb - \frac{mey}{x} - bx + ey - \frac{bf}{d}y + \frac{efyy}{dx} = \frac{aey}{d}$. Duc omnes terminos in dx, eoſque in ordinem redige;

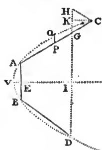
PROBLEMATA GEOMETRICA.

$$\begin{matrix} & +dc & & & & \\ fcyy & -ae\ xy & -dcmy & -bdxx & +bdmx & =0. \\ & -fb & & & & \end{matrix}$$

& fiet (as above). Ubi, cùm incognitæ quantitates, x & y, ad duas tantùm dimenſiones aſcendunt, patet curvam lineam, quam punctum C deſcribit, eſſe Conicam Sectionem. Pone $\frac{ae+fb-dc}{c} = 2p$, & fiet $yy = \frac{2p}{f}xy + \frac{dm}{f}y + \frac{bd}{fc}xx - \frac{bdm}{fc}x$. Et extractâ radice, $y = \frac{p}{f}x + \frac{dm}{2f} \pm \sqrt{\frac{pp}{ff}xx + \frac{bd}{fc}xx + \frac{pdm}{ff}x - \frac{bdm}{fc}x + \frac{ddmm}{4ff}}$. Unde colligitur Curvam Hyperbolam eſſe, ſi ſit $\frac{bd}{fc}$ affirmativum, vel negativum & minus quàm $\frac{pp}{ff}$; Parabolam, ſi ſit $\frac{bd}{fc}$ negativum & æquale $\frac{pp}{ff}$; Ellipſin vel Circulum, ſi ſit $\frac{bd}{fc}$ & negativum & majus quàm $\frac{pp}{ff}$. Q. E. I.

PROB. LVIII.

Parabolam deſcribere quæ per data quatuor puncta tranſibit.



Sint puncta illa data A, B, C, D. Junge AB, & eam biſeca in E. Et per E age rectam aliquam, VE, quam concipe diametrum eſſe Parabolæ, puncto V exiſtente vertice ejus. Junge AC, ipſique AB parallelam age DG, occurrentem AC in G. Dic AB $= a$, AC $= b$, AG $= c$, GD $= d$. In AC cape AP cujuſvis longitudinis, & à P age PQ parallelam AB: & concipiendo Q punctum eſſe Parabolæ, dic AP $= x$, PQ $= y$; & æquationem quamvis ad Parabolam aſſume, quæ relationem inter AP & PQ exprimat: ut quòd ſit $y = e + fx \pm \sqrt{gx + hx}$.

Jam.

Caput XIV. Jam si ponatur AP sive $x=0$ (puncto P incidente in ipsum A) fiet PQ, sive $y,=0$, ut & $=-$ AB. Scribendo autem in æquatione assumptâ 0 pro x, fiet $y=e\pm\sqrt{gg}$, hoc est $=e\pm g$. Quorum valorum ipsius y major $e+g$, est$=0$; minor, $e-g,=-$AB, sive $-a$. Ergo $e=-g$; & $e-g$, hoc est, $-2g,=-a$, sive $g=\frac{1}{2}a$. Atque adeo vice æquationis assumptæ habebitur hæc, $y=-\frac{1}{2}a+fx\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa+bx}$.

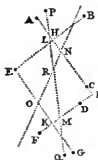
Adhæc si ponatur AP sive $x=$ AC, ita ut punctum P incidat in C, fiet iterum PQ$=0$. Pro x igitur in æquatione novissimâ scribe AC sive b, & pro y, 0; & fiet $0=-\frac{1}{2}a+fb+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, sive $\frac{1}{2}a-fb=\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$; &, partibus quadratis, $-afb+ffbb=bb$; sive $ffb-fa=b$. Atque ita vice assumptæ æquationis habebitur isthæc, $y=-\frac{1}{2}a+fx\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbx-fax}$.

Insuper si ponatur AP sive $x=$AG, sive c; fiet PQ, sive $y,=-$GD, sive $-d$. Quare pro x & y in æquatione novissimâ scribe c, & $-d$; & fiet $-d=-\frac{1}{2}a+fc-\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbc-fac}$; sive $\frac{1}{2}a-d-fc=\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbc-fac}$. Et, partibus quadratis, $-ad-fac+dd+2dcf+ccff=ffbc-fac$. Et, æquatione ordinatâ & reductâ, $ff=\frac{2d}{b-c}f+\frac{dd-ad}{bc-cc}$. Pro $b-c$, hoc est pro GC, scribe k; & æquatio illa fiet $ff=\frac{2d}{k}f+\frac{dd-ad}{kc}$. Et extractâ radice, $f=\frac{d}{k}\pm\sqrt{\frac{ddc+ddk-adk}{kkc}}$. Invento autem f, æquatio ad Parabolam, *viz.* $y=-\frac{1}{2}a+fx\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbx-fax}$, plenè determinatur: cujus itaque constructione Parabola etiam determinabitur. Constructio autem ejus hujusmodi est. Ipsi BD parallelam age CH occurrentem DG in H. Inter DG ac DH cape mediam proportionalem DK, & ipsi CK parallelam age EI bisecantem AB in E, & occurrentem DG in I. Dein produc IE ad V; ut sit EV. EI :: EBq. DI$q-$EBq; & erit V vertex, VE diameter, & $\frac{\text{rF}q}{\text{VE}}$ latus rectum Parabolæ quæsitæ.

PROB. LIX.

Conicam sectionem per data quinque puncta describere.

Sint puncta ista A, B, C, D, E. Junge AC, BE, se mutuo secantes in H. Age DI parallelam BE, & occurrentem AC in I. Item EK parallelam AC, & occurrentem DI productæ in K. Produc



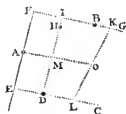
ID ad F, & EK ad G; ut sit AHC. BHE : : AIC. FID : : EKG. FKD; & erunt puncta F ac G in conicâ sectione, ut notum est. Hoc tamen observare debebis, quòd si punctum H cadit inter puncta omnia, A, C & B, E, vel extra ea omnia, punctum I cadere debebit vel inter puncta omnia, A, C & F, D, vel extra ea omnia; & punctum K inter omnia, D, F & E, G, vel extra ea omnia. At si punctum H cadit inter duo puncta A, C, & extra alia duo B, E, vel inter illa duo B, E, & extra altera duo A, C; debebit punctum I cadere inter duo punctorum A, C & F, D, & extra alia duo eorum; & similiter punctum K debebit cadere inter duo punctorum D, F & E, G, & extra alia duo eorum: id quod fiet capiendo IF, KG, ad hanc vel illam partem punctorum I, K, pro exigentiâ problematis. Inventis punctis F ac G, biseca AC, EG in N & O; item BE, FD, in L & M. Junge NO, LM se mutuò secantes in R; & erunt LM & NO diametri conicæ sectionis, R centrum ejus, & BL, FM ordinatim applicatæ ad diametrum LM. Produc LM hinc inde, si opus est, ad P & Q, ita ut sit $BLq.\ FMq : : PLQ.\ PMQ$; & erunt P & Q vertices Conicæ sectionis & PQ latus transversum. Fac $PLQ.\ LBq : : PQ.\ T$: et erit T latus rectum; quibus cognitis cognoscitur Figura.

Restat tantùm ut doceamus, quomodo LM hinc inde producenda sit ad P & Q, ita ut fiat $BLq\ FMq : : PLQ.\ PMQ$. Nempe PLQ, sive $PL \times LQ$, est $\overline{PR-LR} \times \overline{PR+LR}$; nam PL est $PR-LR$, & LQ est $RQ+LR$, seu $PR+LR$. Porro $\overline{PR-LR} \times \overline{PR+LR}$ multiplicando fit $PRq-LRq$. Et ad eundem modum PMQ est $\overline{PR+RM} \times \overline{PR-RM}$, seu $PRq-RMq$. Ergo $BLq.\ FMq::PRq-LRq.\ PRq-RMq$; & dividendo $BLq-FMq.FMq::RMq-LRq.\ PRq-RMq$. Quamobrem cùm dentur $BLq-FMq$, FMq, & $RMq-LRq$, dabitur $PRq-RMq$. Adde datum RMq, & dabitur summa PRq, adeoque & latus ejus PR, cui QR æqualis est.

PROB.

PROB. LX.

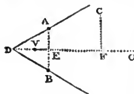
Conicam sectionem describere quæ transibit per quatuor data puncta, & in uno istorum punctorum continget rectam positione datam.



Sint puncta quatuor data, A, B, C, D, & recta positione data AE, quam conica sectio contingat in puncto A. Junge duo quævis puncta DC; & DC, producta si opus est, occurrat tangenti in E. Per quartum punctum, B, ipsi DC age parallelam BF; quæ occurrat eidem tangenti in F. Item tangenti parallelam age DI, quæ occurrat ipsi BF in I. In FB, DI, si opus est productis, cape FG, HI ejus longitudinis, ut sit AE*q*. CED : : AF*q*. BFG : : DIH BIG. Et erunt puncta G & H in Conicâ sectione, ut notum est: si modò capias FG, IH ad legitimas partes punctorum F & I, juxta regulam in superiore Problemate traditam. Biseca BG, DC, DH in K, L & M; junge KL, AM se mutuò secantes in O, & erit O centrum, A vertex, & HM ordinatim applicata ad semidiametrum AO. Quibus cognitis cognoscitur figura.

PROB. LXI.

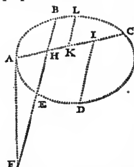
Conicam sectionem describere quæ transibit per tria data puncta, & in duobus istorum punctorum continget rectas positione datas.



Sint puncta illa data A, B, C; tangentes AD, BD ad puncta A & B; D communis intersectio tangentium. Biseca AB in E. Age DE, & produc eam donec in F occurrat CF actæ parallelæ AB: & erit DF diameter, & AE, CF ordinatim applicatæ ad diametrum. Produc DF ad O; & in DO cape OV mediam proportionalem inter DO & EO, eâ lege ut sit etiam AE*q*. CF*q* : : $\text{VE} \times \overline{\text{VO} + \text{OE}}$. $\text{VF} \times \overline{\text{VO} + \text{OF}}$; & erit V vertex, & O centrum Figuræ. Quibus cognitis Figura

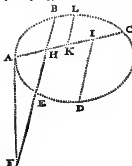
simul

ſimul cognoſcitur. Eſt autem $VE = VO - OE$; adeoque $VE \times \overline{VO + OE}$ $= \overline{VO - OE} \times \overline{VO + OE} = VOq - OEq$. Præterea, quia VO media proportionalis eſt inter DO & EO, erit $VOq = DOE$; adeoque $\overline{VOq - OEq} = DOE - EOq = DEO$. Et ſimili argumento erit $VF \times \overline{VO + OF} = VOq - OFq = DOE - OFq$. Ergo $AEq. CFq :: DEO. DOE - OFq$. Eſt $OFq = EOq - 2FEO + FEq$. Adeoque $DOE - OFq = DOE - OEq + 2FEO - FEq = DEO + 2FEO - FEq$. Et $AEq. CFq :: DEO. DEO + 2FEO - FEq :: DE. DE + 2FE - \frac{FEq}{EO}$. Datur ergo $DE + 2FE - \frac{FEq}{EO}$. Aufer hoc de dato $DE + 2FE$, & reſtabit $\frac{FEq}{EO}$ datum. Sit illud N; & erit $\frac{FEq}{N} = EO$, adeoque dabitur EO. Dato autem EO, ſimul datur VO medium proportionale inter DO & EO. Problemata Geometrica.



Hoc modo per Theoremata quædam Apollonii ſatis expeditè reſolvuntur hæc problemata: quæ tamen, ſine iſtis Theorematibus, per Algebram ſolam reſolvi poſſent. Ut ſi proponatur primum trium noviſſimorum Problematum: Sint puncta quinque data, A, B, C, D, E, per quæ Conica ſectio tranſire debet. Junge duo quævis, A, C, & alia duo, B, E, rectis ſe ſecantibus in H. Ipſi BE parallelam age DI, occurrentem AC in I; ut & aliam quamvis rectam, KL, occurrentem AC in K, & conicæ ſectioni in L. Et finge Conicam ſectionem datam eſſe; ita ut cognito puncto K ſimul cognoſcatur punctum L. Et poſito $AK = x$, & $KL = y$, ad exprimendam relationem inter x & y, aſſume quamvis æquationem, quæ Conicas ſectiones generaliter exprimit; puta hanc, $a + bx + cxx + dy + exy + yy = 0$; ubi a, b, c, d, e, denotant quantitates determinatas cum ſignis ſuis, x verò & y quantitates indeterminatas. Si jam quantitates determinatas a, b, c, d, e invenire poſſumus, habebimus Conicam ſectionem. Fingamus ergo punctum L ſucceſſivè incidere in puncta, A, C, B, E, D, & videamus quid inde ſequetur. Si ergo punctum L incidit in punctum A, erit in eo caſu AK & KL, hoc eſt, x & y, nihil. Proinde æquationis omnes termini præter a evaneſcent, & reſtabit $a = 0$. Quare delendum eſt a in æquatione illâ, & cæteri termini $bx + cxx + dy + exy + yy$ erunt $= 0$. Porro ſi L

 incidit in C, erit AK, seu x, = AC, & KL seu $y=0$. Pone ergo $AC=f$; & substituendo f pro x, & 0 pro y, æquatio ad curvam, $bx+cxx+dy+exy+yy=0$, evadet $bf+cff=0$, seu $b=-cf$. Et in æquatione



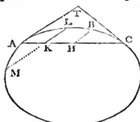
illâ scripto $-cf$ pro b, evadet $-cfx+cxx+dy+exy+yy=0$. Adhæc si punctum L incidit in punctum B, erit AK, seu x, = AH; & KL, seu y, = BH. Pone ergo $AH=g$, & $BH=h$, & perinde scribe g pro x, & h pro y, & æquatio $-cfx+cxx$, &c. evadet $-cfg+cgg+dh+egh+hh=0$. Quòd si punctum L incidit in E, erit AK = AH, seu $x=g$; & KL, seu y, = HE. Pro HE ergo scribe $-k$ cum signo negativo, quia HE jacet ad contrarias partes lineæ AC, & substituendo g pro x, & $-k$ pro y, æquatio $-cfx+cxx$, &c. evadet $-cfg+cgg-dk-egk+kk=0$. Aufer hoc de superiori æquatione, $-cfg+cgg+dh+egh+hh$, & restabit $dh+egh+hh+dk+egk-kk=0$. Divide hoc per $h+k$, & fiet $d+eg+h-k=0$. Hoc ductum in h aufer de $-cfg+cgg+dh+egh+hh=0$, & restabit $-cfg+cgg+hk=0$, seu $\frac{hk}{-gg+fg}=c$. Denique, si punctum L incidit in punctum D, erit AK, seu x, = AI, & KL, seu y, = ID. Quare pro AI scribe m, & pro ID, n; & perinde pro x & y substitue m & n, & æquatio $-cfx+cxx$, &c. evadet $-cfm+cmm+dn+emn+nn=0$. Hoc divide per n, & fiet $\frac{-cfm+cmm}{n}+d+em+n=0$. Aufer $d+eg+h-k=0$; & restabit $\frac{-cfm+cmm}{n}+em-eg+n-h+k=0$. Sive $\frac{cmm-cfm}{n}+n-h+k=eg-em$. Jam verò ob data puncta A, B, C, D, E, dantur AC, AH, AI, BH, EH, DI; hoc est f, g, m, h, k, n. Atque adeo per æquationem, $\frac{hk}{fg-gg}=c$, datur c. Dato autem c, per æquationem, $\frac{cmm-cfm}{n}+n-h+k=eg-em$, datur $eg-em$. Divide hoc datum per datum $g-m$, & emerget datum e. Quibus inventis, æquatio $d+eg+h-k=0$, seu $d=k-h-eg$, dabit d. Et his cognitis, simul determinatur æquatio ad quæsitam Conicam sectionem, $cfx=cxx+dy+exy+yy$. Et ex eâ æquatione per methodum Cartesii determinabitur Conica sectio.

Quod si quatuor, A, B, C, E, & positio rectæ, AF, quæ tangit Conicam sectionem ad unum istorum punctorum, A, daretur; posset

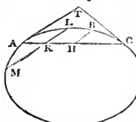
Conica ſectio ſic faciliùs determinari. Inventis, ut ſuprà, æquationibus $cfx = cxx + dy + exy + yy$, $d = k - b - eg$, & $c = \frac{bk}{fg - gg}$, concipe tangentem, AF, occurrere rectæ EH in F; dein punctum L moveri per perimetrum figuræ CDE, donec incidat in punctum A: & ultima ratio ipſius LK ad AK erit ratio FH ad AH; ut contemplanti figuram conſtare poteſt. Dic verò FH=p; & in hoc caſu, ubi LK eſt ad AK in ultimâ ratione, erit $p.\ g :: y.\ x$, ſive $\frac{gy}{p} = x$. Quare pro x in æquatione $cfx = cxx + dy + exy + yy$, ſcribe $\frac{gy}{p}$; & orietur $\frac{cfgy}{p} = \frac{cggyy}{pp} + dy + \frac{egyy}{p} + yy$. Divide omnia per y, & emerget $\frac{cfg}{p} = \frac{cggy}{pp} + d + \frac{egy}{p} + y$. Jam quia ſupponitur punctum L incidere in punctum A, adeoque KL, ſeu y, infinitè parvum vel nihil eſſe, dele terminos qui per y multiplicantur, & reſtabit $\frac{cfg}{p} = d$. Quare fac $\frac{bk}{fg - gg} = c$; dein $\frac{cfg}{p} = d$; denique $\frac{k - b - d}{g} = e$; &, inventis c, d & e, æquatio, $cfx = cxx + dy + exy + yy$, determinabit conicam ſectionem.

Problemata Geometrica.

Si denique tria tantùm puncta, A, B, C, dentur, unà cum poſitione duarum rectarum, AT, CT, quæ tangunt Conicam ſectionem in duobus iſtorum punctorum, A & C; obtinebitur ut ſuprà ad Conicam ſectionem æquatio hæc, $cfx = cxx + dy + exy + yy$. Deinde, ſi ſupponatur ordinatam KL parallelam eſſe tangenti AT, & concipiatur eam produci, donec rurſus occurrat Conicæ ſectioni in M, & lineam illam LM accedere ad tangentem, AT, donec cum eâ conveniat ad A; ultima ratio linearum KL & KM ad invicem erit ratio æqualitatis; ut contemplanti figuram conſtare poteſt. Quamobrem in illo caſu exiſtentibus KL & KM ſibi invicem æqualibus, hoc eſt duobus valoribus ipſius y (affirmativo ſcilicet KL, & negativo KM) æqualibus, debent æquationis, $cfx = cxx + dy + exy + yy$, termini illi in quibus y eſt imparis dimenſionis, hoc eſt termini $+dy + exy$, reſpectu termini yy, in quo y eſt paris dimenſionis, evaneſcere. Aliter enim duo valores ipſius y, affirmativus & negativus, æquales eſſe non poſſunt. Et in illo quidem caſu AK infinitè minor erit quàm LK; hoc eſt x quàm y; proinde & terminus exy quàm terminus yy. Atque adeo infinitè minor



Caput XVI. minor existens pro nihilo habendus erit. At terminus dy, respectu termini yy, non evanescet, ut oportet, sed eo major erit, nisi d supponatur esse nihil. Delendus est itaque terminus dy; & sic restabit $cfx = cxx + exy + yy$, æquatio ad conicam sectionem. Concipiantur jam tangentes AT, CT sibi mutuò occurrere in T, & punctum L accedere ad punctum C, donec in illud incidat.



Et ultima ratio ipsius KL ad KC erit AT ad AC. KL erat y; AK, x; & AC, f; atque adeo KC, $f-x$. Dic AT$=g$; & ultima ratio y ad $f-x$ erit ea quæ est g ad f. Æquatio $cfx=cxx+exy+yy$, subducto utrobique cxx, fit $cfx-cxx=exy+yy$; hoc est, $\overline{f-x}$ in $cx=y$ in $\overline{ex+y}$. Ergo est $y.f-x::cx.ex+y$; adeoque $g.f::cx.ex+y$. At, puncto L incidente in C, sit y nihil. Ergo $g.f::cx.ex$. Divide posteriorem rationem per x, & evadet $g.f::c.e$, & $\frac{cf}{g}=e$. Quare si in æquatione $cfx=cxx+exy+yy$, scribas $\frac{cf}{g}$ pro e, fiet $cfx=cxx+\frac{cf}{g}xy+yy$, æquatio ad conicam sectionem. Denique ipsi KL, seu AT, à dato puncto, B, per quod Conica sectio transire debet, age parallelam BH occurrentem AC in H; & concipiendo LK accedere ad BH, donec cum eâ coincidat, in eo casu erit AH$=x$, & BH$=y$. Dic ergo datam AH$=m$, & datam BH$=n$, & perinde pro x & y, in æquatione $cfx=cxx+\frac{cf}{g}xy+yy$, scribe m & n; & orietur $cfm=cmm+\frac{cf}{g}mn+nn$. Aufer utrobique $cmm+\frac{cf}{g}mn$, & fiet $cfm-cmm-\frac{cf}{g}mn=nn$. Pone $f-m-\frac{fn}{g}=s$, & erit $csm=nn$. Divide utramque partem æquationis per sm, & orietur $c=\frac{nn}{sm}$. Invento autem c, determinata habetur æquatio ad Conicam sectionem, $cfx=cxx+\frac{cf}{g}xy+yy$. Et inde, per methodum Cartesii, Conica sectio datur, & describi potest.

Atque hactenus varia evolvi Problemata. In scientiis enim addiscendis prosunt exempla magis quàm præcepta: quâ de causâ in his fusiùs expatiatus sum. Sed & aliqua, quæ inter scribendum occurrebant, immiscui sine Algebrâ soluta, ut insinuarem, in problematis, quæ primâ fronte difficilia videantur, non

semper

ſemper ad Algebram recurrendum eſſe. Sed tempus eſt jam æquationum reſolutionem docere. Nam poſtquam Problema ad æquationem deductum eſt, radices illius æquationis, quæ quantitates ſunt Problemati ſatisfacientes, extrahere oportebit. De Æquatione resolvenda.

CAPUT XV.

Quomodo æquationes reſolvendæ ſunt.

Poſtquam igitur in Quæſtionis alicujus ſolutione ad æquationem perventum eſt, & æquatio illa debitè ordinata eſt & reducta; ubi quantitates, quæ per ſpecies deſignantur & pro datis habentur, revera dantur in numeris, pro ipſis ſubſtituendi ſunt numeri illi in æquatione, & habebitur æquatio numeralis, cujus radix extracta tandem ſatisfaciet Quæſtioni. Ut ſi in ſectione anguli in quinque partes æquales, ſumendo r pro radio circuli, q pro ſubtenſâ complementi anguli propoſiti ad duos rectos, & x pro ſubtenſâ complementi quintæ partis anguli illius, perveniſſem ad hanc æquationem, $x^5 - 5rrx^3 + 5r^4x - r^4q = 0$. Ubi in caſu aliquo particulari dantur in numeris radius, r, & linea dati anguli complementum ſubtendens, q; ut quòd radius ſit 10, & ſubtenſa 3; ſubſtituo numeros illos in æquatione pro r & q; & provenit æquatio numeralis, $x^5 - 500x^3 + 50000x - 30000 = 0$: cujus radix tandem extracta erit x, ſeu linea complementum quintæ partis anguli illius dati ſubtendens.

CAPUT XVI.

De naturâ radicum Æquationis.

Radix verò numerus eſt, qui, ſi in æquatione pro literâ vel ſpecie radicem ſignificante ſubſtituatur, efficiet omnes terminos evaneſcere.

Sic æquationis $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, unitas eſt radix, quoniam ſcripta pro x producit $1 - 1 - 19 + 49 - 30$, hoc eſt nihil. Sed æquationis ejuſdem plures eſſe poſſunt radices. Nam ſi in hâc eâdem æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$; pro x ſcribas numerum 2, & pro poteſtatibus x ſimiles poteſtates numeri 2, producetur $16 - 8 - 76 + 98 - 30$, hoc eſt nihil. Atque ita ſi pro x ſcribas numerum 3, vel numerum negativum -5, utroque caſu producetur nihil, terminis affirmativis & negativis in hiſce quatuor

CAPUT XVI. quatuor casibus se mutuò destruentibus. Proinde cùm numerorum, 1, 2, 3, & − 5, quilibet scriptus in æquatione pro x impleat conditionem ipsius x, efficiendo ut termini omnes æquationis conjunctim æquentur nihilo, erit quilibet eorum radix æquationis.

Et ne mireris eandem æquationem habere posse *plures radices*, sciendum est *plures esse posse solutiones ejusdem Problematis*.

Ut si circulorum duorum quæreretur *interfectio*; *duæ* sunt eorum interfectiones, atque adeo quæstio admittit *duo responsa*; & perinde æquatio interfectionem determinans habebit *duas radices*, quibus interfectionem utramque determinet; *si modò nihil in datis sit, quo responsum ad unam interfectionem determinetur*.

Sic & si arcûs APB pars quinta AP invenienda esset, quamvis animum forte advertas tantùm ad arcum APB; tamen æquatio, quâ quæstio solvetur, determinabit quintam partem arcuum omnium qui terminantur ad puncta A & B; nempe quintam partem arcuum ASB, APBSAPB, ASBPASB, & APBSAPBSAPB, æquè ac quintam partem arcûs APB; quæ quintæ partes, si dividas totam circumferentiam in æquales quinque partes, PQ, QR, RS, ST, TP, erunt, AT, AQ, ATS, AQR. Quoniam igitur, quærendo quintas partes arcuum quos recta AB subtendit, ad casus omnes determinandos, circumferentia tota secari debet in quinque punctis, P, Q, R, S, T; ideo æquatio ad omnes casus determinandos habebit radices quinque. Nam quintæ partes horum omnium arcuum pendent ab iisdem datis, & per ejusdem generis calculum inveniuntur; ita ut in eandem

(°) Geminas æquationibus Quadraticis esse radices, item Cubicis certæ cujusdam formæ vel tergeminas Cardanus (α) monuit; Biquadraticis quibusdam quadrigeminas, nonnullis Quadrato-cubicis quintuplices (β) Vieta. Id vero generaliter obtinere, ut æquationi cujuscunque demum gradûs tot possint esse radices, neque tamen plures, quot sint in numero gradum æquationis designante unitates, primus ni fallor mortalium Albertus Girardus intellexit; cujus in opusculo Gallicè scripto et anno 1629 in lucem Æmstelædami edito, hæc est enuntiatio. "Toutes les equations d'Algebre reçoivent autant de solutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonstre, excepté les incomplettes." Quæ quidem Latine sic ferè sonant. "Omnes æquationes algebraicæ, si imperfectas exceperis, tot solutiones capiunt, quot index potestatis elatissimæ indicat." Girardo autem hâc in re neque Cartesius neque Harriottus nostras facem prætulisse censendi sunt, quum Harriotti Artis Analyticæ Praxis non nisi biennio post Inventa Nova Algebraica Girardi in lucem edita est, Cartesii vero Geometria serius etiam quinquennio. Quinetiam Harriotus de numero radicum nil plane sani habet. Vir magnæ quidem diligentiæ, sed mediocris ingenii, ea ferè in Algebraicis intellexit, quæ à Cardano et a Vietâ acceperat; et radices, sicut

(α) Arithmet. Lib. 10. c. 1. (β) De emendat. æquat. c. 14.

De Natura Radicum.

eandem semper æquationem incideris, sive quæras quintam partem arcûs APB, sive quintam partem arcûs ASB, sive alterius cujusvis ex arcubus quintam partem. Unde si æquatio, quâ quinta pars arcûs APB determinatur, non haberet plures radices quàm unam, dùm quærendo quintam partem arcûs ASB incidimus in eandem illam æquationem, sequeretur, majorem hunc arcum habere eandem quintam partem cum priore qui minor est; eo quòd subtensa ejus per eandem æquationis radicem exprimitur. *In omni igitur problemate necesse est æquationem, quâ respondetur, tot habere radices, quot sunt quæsitæ quantitatis casus diversi, ab iisdem datis pendentes & eâdem argumentandi ratione determinandi.*

Potest verò æquatio tot habere radices quot sunt dimensiones ejus, & non plures (q).

Sic æquatio $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, quatuor habet radices 1, 2, 3, & -5; non autem plures. Nam quilibet ex his numeris scriptus in æquatione pro x efficet terminos omnes se mutuò destruere, ut dictum est; præter hos vero nullus est numerus cujus substitutione hoc eveniet.

Cæterùm numerus & natura radicum ex generatione æquationis optimè intelligetur.

Ut si scire vellemus quomodo generetur æquatio cujus radices sint 1, 2, 3, & -5, supponendum erit x ambiguè significare numeros illos; seu esse $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, & $x = -5$; vel quòd perinde est, $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, & $x + 5 = 0$; Et multiplicando hæc in se, prodibit, multiplicatione $x - 1$, in $x - 2$,

sicut illi fecerant, cuilibet æquationi totidem tribuit, quot illa positivas habeat; negativarum ne in ullo quidem casu ratione habitâ, utpote quas semper, ut opinor, inutiles judicavit, cùm earum naturam minimè perspexisset. Sic in sectione operis sui quartâ prop. 1ª. æquationis quadraticæ, $aa \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} a = bc$, cujus radices sunt $+b$, $-c$, unicam radicem statuit b; illam c radicem esse negat. In propositione verò secundâ æquationis, $aa \begin{smallmatrix}-b\\-c\end{smallmatrix} a = bc$, radicem utramque, $+b$, $+c$, agnovit. Rursum in propositione 3ª. æquationis cubicæ $aaa \begin{smallmatrix}+b\\+c\\-d\end{smallmatrix} aa \begin{smallmatrix}+bc\\-bd\\-cd\end{smallmatrix} a = bcd$, cujus tres sunt radices $+d$, $-b$, $-c$ radicem unicam, $+d$, statuit; alteras, b et c, radices esse negat. In propositione 4ª. æquationis $aaa \begin{smallmatrix}+b\\-c\\-d\end{smallmatrix} aa \begin{smallmatrix}-bc\\-bd\\+cd\end{smallmatrix} a = -bcd$, cujus radices sunt tres, $+d$, $+c$, $-b$, duas, d, c, agnovit, tertiam $-b$ rejecit. In propositione 5ª. æquationis $aaa \begin{smallmatrix}-b\\-c\\-d\end{smallmatrix} aa \begin{smallmatrix}+bc\\+cd\\+bd\end{smallmatrix} a = bcd$ agnovit tres radices positivas b, c, d.

hæc

CAPUT XVI. hæc æquatio, $xx - 3x + 2 = 0$; quæ duarum eſt dimenſionum, ac duas habet radices 1 & 2. Et hujus multiplicatione in $x - 3$ prodibit $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$, æquatio trium dimenſionum totidemque radicum; quæ iterum multiplicata per $x + 5$ fit $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 3$, ut ſuprà. Cùm igitur hæc æquatio generetur ex quatuor factoribus, $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, & $x + 5$, in ſe continuò ductis, ubi factorum aliquis nihil eſt, quod ſub omnibus fit nihil erit; ubi verò horum nullus nihil eſt, quod ſub omnibus continetur nihil eſſe non poteſt. Hoc eſt, non poteſt $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30$, eſſe nihilo æquale, ut oportet, niſi his quatuor caſibus, ubi eſt $x - 1 = 0$, vel $x - 2 = 0$, vel $x - 3 = 0$, vel denique $x + 5 = 0$: proinde ſoli numeri, 1, 2, 3, & -5, valere poſſunt x, ſeu radices eſſe æquationis. Et ſimile eſt ratiocinium de omnibus æquationibus. Nam tali multiplicatione imaginari poſſumus omnes generari, quamvis factores ab invicem ſecernere ſolet eſſe difficillimum, & ipſum eſt quod æquationem reſolvere & radices extrahere. Habitis enim radicibus habentur factores.

Radices verò ſunt duplices; affirmativæ *ut in allato exemplo* 1, 2, & 3, *&* negativæ *ut* -5. *Ex his verò aliquæ non rarò evadunt* impoſſibiles (r).

Sic æquationis, $xx - 2ax + bb = 0$, radices duæ, quæ ſunt $a + \sqrt{aa - bb}$, & $a - \sqrt{aa - bb}$ reales quidem ſunt, ubi aa majus eſt quàm bb; at ubi aa minus eſt quàm bb, evadunt impoſſibiles; eò quòd $aa - bb$ tunc evadet negativa quantitas, & negativæ quantitatis radix quadratica eſt impoſſibilis. Omnis enim radix poſſibilis ſive affirmativa ſit, ſive negativa, ſi per ſeipſam multiplicetur, producet quadratum affirmativum; proinde impoſſibilis erit quæ quadratum negativum producere debet. Eodem argumento

(r) Ainſi qu'on peut donner trois noms aux ſolutions, veu qu'il y en a qui ſont plus que rien, d'autres moins que rien; & d'autres envelopées, comme celles qui ont des $\sqrt{-}$, comme des $\sqrt{-3}$, ou autres nombres ſemblables. *Albert Girard. Invent. nouv. en Alg.*

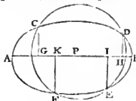
" Tribus igitur nominibus radices diſtinguendæ ſunt. Sunt enim nihilo majores, ſunt minores nihilo, ſunt etiam involutæ; nimirum hoc ſigno implicitæ, $\sqrt{-}$, ut $\sqrt{-3}$, aut aliûs cujuſvis numeri negati radix quadratica." Quas vero hoc loco *involutas* alibi aptiore vocabulo *impoſſibiles* dixit.

( ) Id verò notandum, in æquationibus quibus membra nulla deſunt, non ex formâ æquationis ſed ex magnitudinibus coefficientium et homogenei comparationis radices impoſſibiles fieri. Nam in qualibet æquatione radices ſunt poſſibiles, quamdiu coefficientium et homogenei comparationis magnitudines, ac mutuæ proportiones, intra limites quoſdam conſiſterint certis legibus præfiniendos. Sic omnis æquationis quadraticæ radices ſunt poſſibiles, cujus homogeneum comparationis

gumento colligitur æquationem, $x^3 - 4xx + 7x - 6 = 0$, unam quidem realem radicem habere, quæ est 2; duas verò impossibiles, $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$. Nam quælibet ex his, 2, $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$, scripta in æquatione pro x, efficiet omnes ejus terminos se mutuò destruere; sunt verò $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$, numeri impossibiles, eò quòd extractionem radicis quadraticæ ex numero negativo -2 præsupponant (f). De Natura Radicum.

Æquationum verò radices sæpe impossibiles esse æquum est, ne casus problematum, qui sæpe impossibiles sunt, exhibeant possibiles.

Ut si rectæ & circuli intersectio determinanda esset, & pro circuli radio, & rectæ à centro ejus distantiâ, ponantur literæ duæ; ubi æquatio intersectionem definiens habetur, si pro literâ designante distantiam rectæ à centro ponatur numerus minor radio, intersectio possibilis erit; sin major, fiet impossibilis; & æquationis radices duæ quæ intersectiones duas determinant, debent esse perinde possibiles vel impossibiles, ut rem ipsam verè exprimant. Atque ita si circulus CDEF, & Ellipsis ACBF se mutuò secent in punctis, C, D, E, F, & ad rectam aliquam positione datam, AB, demittantur perpendicula, CG, DH, EI, FK, & quærendo longitudinem alicujus è perpendiculis, perveniatur tandem ad æquationem; æquatio illa, ubi circulus secat Ellipsin in quatuor punctis, habebit quatuor radices reales; quæ erunt quatuor illa perpendicula. Quòd si circuli radius, manente centro ejus, minuatur, donec, punctis E & F coalescentibus, circulus tandem tangat Ellipsin, ex radicibus duæ illæ, quæ perpendicula, EI & FK, jam coincidentia, exprimunt, evadent æquales. Et si circulus adhuc minuatur,



parationis quadrante potestatis quadraticæ coefficientis lateris non sit majus. Et omnis æquationis cubicæ radices sunt possibiles, cujus deleto membro secundo (id quod viâ mox tradendâ in omnibus facere licet) homogenei comparationis æquationis transformatæ potestas cubica ad potestatem quadraticam coefficientis membri ejusdem transformatæ tertii proportionem habeat minorem quàm numerus viceniseptenarius ad quaternarium. Erravit igitur Girardus cùm regulæ generalis, quam de radicum numero verissimam allegavit, in æquationibus imperfectis exceptionem constituit, quasi verò aut solis aut semper illis radices impossibiles essent. Sunt quidem perfectæ, quibus nulla radix est possibilis; sunt imperfectæ, quæ justo radicum numero gaudent. Æquationi biquadraticæ $x^4 - 5x^3 + 18x^2 - 31x + 35 = 0$, perfectæ licèt, radices omnes sunt impossibiles: cubicæ, $y^3 - 19y + 30 = 0$, veræ sunt omnes. Nempe prioris radices sunt $1 + \sqrt{-6}$, $1 - \sqrt{-6}$, $1\frac{1}{2} + \sqrt{-2\frac{3}{4}}$, $1\frac{1}{2} - \sqrt{-2\frac{3}{4}}$: posterioris 2, 3, -5.

CAPUT XVI. ut Ellipsin in puncto EF ne quidem tangat, sed secet tantùm in alteris duobus punctis, C, D; tunc ex quatuor radicibus duæ illæ, quæ perpendicula, EI, FK, jam facta impossibilia exprimebant, fient unà cum perpendiculis illis impossibiles. Et hoc modo in omnibus æquationibus, augendo vel minuendo terminos earum, ex inæqualibus radicibus duæ primò æquales, deinde impossibiles, evadere solent. (') Et inde fit quòd radicum impossibilium numerus semper sit par.

Sunt tamen radices æquationum aliquandò possibiles, ubi Schema impossibiles exhibet. Sed hoc fit, ob limitationem aliquam in Schemate, quod ad æquationem nil spectat.

Ut si in semicirculo, ADB, datis diametro, AB, & lineâ inscriptâ, AD, demissòque perpendiculo, DC, quærerem diametri segmentum, AC, foret $\frac{ADq}{AB} = AC$. Et per hanc æquationem AC realis exhibetur quantitas, ubi linea inscripta AD major est quàm diameter

(') Vides igitur radices ex eo fieri impossibiles, quòd datarum magnitudines eæ sint, quæ cum conditionibus Problematis consistere nequeant: unde talis necessariò nascitur æquatio, cujus coefficientes et homogeneum comparationis conditiones recusant, quas ad rei propositæ effectionem omoinò illis subeundas signa æquationis indicant. Vel ut breviùs dicam, cùm id aggressus sis quod fieri omninò rerum Natura vetuit, exinde eveniet ut in symbola incidas quorum nulla est interpretatio, quæ intelligi nequeunt. (confer Maclaurio. Algebr. part. 3. cap. 1.)

Reverâ Radix impossibilis illud est, quod in rerum Naturâ nusquam extat. Cautè igitur accipiendum est, quod à Maclaurino, credo, omnium primo dictum, nunc omnibus est in ore, quantitatis cujusvis, atque ipsius adeo unitatis, triplicem esse radicem cubicam Algebraicam; unam veram, duas impossibiles: unitatis quidem, præter ipsam unitatem quæ sola vera est, impossibiles duas, $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$: alius autem cujusvis quantitatis cubicæ, puta a^3, præter veram a, duas illas $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$: atque hæc ita esse ex eo conficitur, quòd æquationi cubicæ, $x^3-a^3=0$, radices illæ tres sint, a, $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$. Hæc verò minimè ita accipienda sunt, ac si quantitas ulla esset, quæ in se cubicè multiplicata unitatem redderet, præter ipsam unitatem; qualis certè in rerum Naturâ nulla extat: sicut nulla est, quæ in se cubicè multiplicata quantitatem cubicam symbolo a^3 designatam reddat præter ipsam a. Neque profectò linea recta est ulla, ex quâ si cubus sit extructus cubum è rectâ datæ longitudinis adæquabit, præter ipsam illam datæ longitudinis rectam. Symbola autem illa, $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, quantitatis a^3 radices cubicæ dicuntur, sensu merè algebraico. Nimirum si horum binomiorum utrumvis, nullâ significantiæ ejus ratione habitâ, perinde ac si veram aliquam quantitatem designaret, secundum leges multiplicationis algebraicæ in se cubicè multiplicaveris, exitu operis, quantitas a^3 exsistet; vel si binomium $x-a$ cum trinomiis $x+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, $x+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$ algebraicè multiplicaveris, binomium y^3-a^3 effeceris; cujus propterea radices binomia $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$ jure optimo vocanda sunt, cùm ad ejus compositionem algebraicam eodem planè modo eorum unumquodque contulerit, ac quantitas a quæ verè radix est. Similis semper interpretatio adhibenda est, quando mathematici radices æquationum impossibiles certis tamen symbolis repræsentari volunt. Sunt utique istiusmodi symbola æquationum, quarum radices dicuntur, elementa merè algebraica; ex quibus, certa lege compositis, assumptis etiam quas possibiles quæque radices habeat, æquationes exsistunt, haud aliter ac syllabæ et voces è literis certo ordine conjunctis, ascitisque vocalibus, quarum separatim et sine illis neque sonus neque sensus est.

(') Idem planè eodemque modo Albertus Girardus dixit, cujus hæc sunt verba.

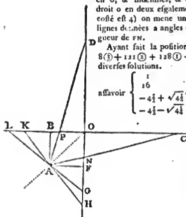
Jusques

meter AB; per Schema verò AC tunc evadit impoſſibilis. Nimirum, in ſchemate, linea AD ſupponitur inſcribi in circulo, atque adeo diametro circuli major eſſe non poteſt; in æquatione verò nihil eſt, quod à conditione illâ pendeat. Ex hâc ſolâ linearum conditione colligitur æquatio, quòd ſint AB, AD, & AC continuè proportionales. Et quoniam æquatio non complectitur omnes conditiones ſchematis, non neceſſe eſt, ut omnium conditionum teneatur limitibus. Quicquid amplius eſt in ſchemate, quam in æquatione, poteſt illud limitibus arctare, hanc non item. Quâ de causâ ubi æquationes ſunt imparium dimenſionum, adeoque radices omnes impoſſibiles habere non poſſunt; ſchemata quantitatibus, à quibus radices omnes pendent, ſæpè limites imponunt, quos tranſgredi, ſervatis ſchematum conditionibus, impoſſible eſt (u). DE NATURA RADICUM.

Ex

Juſques icy nous n'avons encor expliqué a quoy ſervent les ſolutions par moins, quand il y en a. La ſolution par moins s'explique en Geometrie en retrogradant, et le moins recule là ou le + avance.

BROBLEME D'INCLINAISON.



Soyent deux lignes droictes, DN, BC, ſe couppant en angles droits en O, & indefinies, & du poinct A (dans la ligne qui couppe l'angle droit O en deux eſgalement, ainſi que ABOF eſt quarré dont chacun coſté eſt 4) on mene une ANC, ainſi que l'intercepté, NC, (entre les lignes données a angles droit, DN, BC) ſoit $\sqrt{153}$, on demande la longueur de FN.

Ayant fait la poſition de FN 1① on trouvera que 1④ ſera eſgale a 8③ + 121② + 128① − 256, & ainſi la valeur de 1① recevra quatre diverſes ſolutions.

aſſavoir { 1 ; 16 ; $-4\frac{1}{2}+\sqrt{4\frac{1}{4}}$; $-4\frac{1}{2}-\sqrt{4\frac{1}{4}}$ } { FN ; FD ; monſtrant le poinct G ; monſtrant le poinct H } du poinct F.

Aſſavoir, monſtrant leſdits poincts G & H, comme ſi les diſtances FG, FH eſtoyent moins que rien, en retrogradant; prenant que FN, FD avancent, & FG, FH reculent en arriere, tellement donc que les interceptes CN, DF, GL, HK, tendent & s'enclinent au poinct A, faiſant chacune $\sqrt{153}$, ſelon le requis.

Et pour l'interpreter encor mieux, les deux ſolutions qui ſont moins que 0, ſe doivent changer, aſſavoir les ſignes.

viendra { $4\frac{1}{2}-\sqrt{4\frac{1}{4}}$ pour FG ; $4\frac{1}{2}+\sqrt{4\frac{1}{4}}$ pour FH }

Leſquels il faut poſer au contraire de FN, FD, comme il eſt exprimé en la figure precedente: & ainſi

Caput XVI. *Ex radicibus verò quæ reales sunt, affirmativæ & negativæ ad plagas oppositas solent tendere.*

Sic, in schemate penultimo, quærendo perpendiculum CG, incidetur in æquationem, cujus duæ erunt affirmativæ radices, CG ac DH, à punctis C & D tendentes versus unam plagam, & duæ negativæ, EI & FK, tendentes à punctis E & F versus plagam oppositam. Aut si in lineâ AB, ad quam perpendicula demittuntur, detur aliquod punctum P, & pars ejus PG, à puncto illo dato ad perpendiculorum aliquod CG extendens, quæratur, incidemus in æquationem quatuor radicum PG, PH, PI, PK; quarum quæsita PG, & quæ à puncto P ad easdem partes cum PG tendunt (ut PK) affirmativæ erunt, quæ verò tendunt ad partes contrarias (ut PH, PI) negativæ.

Ubi æquationis radices nullæ impossibiles sunt, numerus radicum *affirmativarum & negativarum ex* signis *terminorum æquationis cognosci potest.* Tot *enim sunt radices affirmativæ quot signorum in continuâ serie* mutationes *de* + *in* − & − *in* +; *cæteræ* negativæ *sunt* (x).

Ut in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ubi terminorum signa se sequuntur hoc ordine, + − − + −, variationes secundi − à primo +, quarti + à tertio −, & quinti −, à quarto +, indicant tres

ainsi le faudra-t-il entendre de toutes solutions par moins, qui est une chose de consequence en Geometrie, incogneuë auparavant.

Hæc quidem de radicibus negativis Girardus, quorum sensum vocibus Latinis, & notis Algebraicis hodiè usitatis sic effero.

Radices negativæ, si quando obveniant, nondum diximus ad quid sint utiles. Radicis igitur negatio in Geometriâ sic accipienda est, ut per eam significetur contrarius quidam linearum ac quasi retrorsum ductus. Etenim ubi + progreditur ibi − recedit.

PROBLEMA EX INCLINATIONIBUS.

Sint duæ rectæ indefinitæ, DG, NC, quarum decussatio fiat in O ad angulos rectos. A puncto autem A (ad rectam scilicet quæ rectum angulum ad O medium dividit, ut sit ABOF quadratum cujus latus sit 4) ductam puta rectam ANC, cujus pars NC rectis primò positis, AC, DG, intercepta, sit $\sqrt{153}$. Quæritur longitudo rectæ FN.

Si rectam FN litterâ x designaveris, subductis calculis invenies, $x^4 = 8x^3 + 121x^2 + 128x - 256$. Hinc literæ x æstimationes sunt quatuor.

Nimirum $\left\{\begin{array}{l} 2 \\ 16 \\ -4\frac{1}{2}+\sqrt{4\frac{1}{4}} \\ -4\frac{1}{2}-\sqrt{4\frac{1}{4}} \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \text{FN} \\ \text{FD} \\ \text{distantia puncti G} \\ \text{distantia puncti H} \end{array}\right.$ a puncto F.

Quibus

tres affirmativas esse radices, adeoque quartam negativam esse. At, ubi radices aliquæ *impossibiles* sunt, regula non valet; nisi quatenus impossibiles illæ, quæ nec negativæ sunt nec affirmativæ, pro *ambiguis* habeantur. Sic in æquatione, $x^3+pxx+3ppx-q=0$; signa indicant unam esse affirmativam radicem, & duas negativas. Finge $x=2p$, seu $x-2p=0$; & multiplica æquationem priorem per hanc $x-2p=0$, ut una adhuc radix affirmativa addatur prioribus; & prodibit hæc æquatio $x^4-px^3+ppxx\begin{smallmatrix}-6p^3\\-q\end{smallmatrix}x+2pq=0$, quæ habere deberet duas affirmativas ac duas negativas radices: habet tamen, si mutationem signorum spectes, affirmativas quatuor. Sunt ergo *duæ impossibiles*; quæ, pro ambiguitate suâ, priori casu negativæ, posteriori affirmativæ, esse videntur. DE NATURA RADICUM.

Verùm quot radices impossibiles sunt cognosci ferè potest per hanc regulam.

Constitue seriem fractionum, quarum denominatores sunt numeri in hâc progressione, 1, 2, 3, 4, 5, &c. pergendo ad numerum usque qui est dimensionum æquationis; numeratores vero eadem series numerorum in ordine contrario. Divide unamquamque fractionem posteriorem per priorem. Fractiones prodeuntes colloca super terminis mediis æquationis. Et sub quolibet mediorum terminorum, si quadratum ejus ductum in fractionem capiti imminentem sit majus (y) *quàm rectangulum terminorum utrinque consistentium,*

Quibus punctorum G, H situs ita indicatur, ac si distantiæ FG, FH retrorsum emensæ nihilo minores essent. Etenim si lineatum FN, FD versus puncta N, D ductum *progressum* dixeris, contrarium rectarum FG, FH ductum necesse est *regressum* dicas. Quatuor autem, CH, DF, GL, HK, rectis DG, BC, interceptæ, quantitati $\sqrt{153}$ singulatim sunt æquales; et, ad punctum A vergendo, problematis requisitis singulæ quidem satisfaciunt.

Vel ut rem etiam clariùs dicam, radicum duarum negativarum signa [partium] mutari debent, ut ex [duarum $4\frac{1}{2}$, $\sqrt{4\frac{1}{2}}$ differentiâ] $4\frac{1}{2}-\sqrt{4\frac{1}{2}}$, efficiatur distantia FG; ex [earumdem summâ] $4\frac{1}{2}+\sqrt{4\frac{1}{2}}$ distantia FH. Tum duæ illæ FH, FG, ad partes puncti F ponendæ sunt, earum ad quas positæ sunt FN, FD contrarias; quemadmodum figuræ appositæ lineationes indicant. Atque omnium quidem radicum negativarum similis est interpretatio, quæ res licèt hactenus incognita maximas tamen habet in Geometriâ utilitates.

(x) Hæc regula magnum illum *Cartesium* inventorem habuit, quem graviter sanè nonnulli incusârunt quasi in Algebraicis totus alienus esset. Mihi verò crimen non probant.

(y) Intellige, *algebraicè* majus; licet enim quantitas fracta, quæ super coefficientem aliquem scripta est, coefficientis illius potestatem quadraticam multiplicans quantitatem fecerit facto ex coefficientibus utrinque proximis minorem, tamen si coefficientibus illis proximis contraria signa sint, ut factum ex illis negativum sit, sub coefficiente intermedio collocandum est signum +. Vel si membro aliquo æquationis deficiente, membra utrinque proxima signis prædita sint contrariis sub membro deficiente collocandum est signum +.

colloca

CAPUT XVI. *colloca signum* + ; *sin minus, signum* −. *Sub primo verò & ultimo termino colloca signum* +. *Et tot erunt radices impossibiles, quot sunt in subscriptorum signorum serie mutationes, de* + *in* − *&* − *in* +.

Ut si habeatur æquatio, $x^3 + pxx + 3ppx - q = 0$: Divido seriei hujus $\frac{3}{1}.\frac{2}{2}.\frac{1}{3}$ fractionum secundam, $\frac{2}{2}$, per primam, $\frac{3}{1}$; & tertiam, $\frac{1}{3}$, per secundam, $\frac{2}{2}$; & fractiones prodeuntes, $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{3}$ colloco super mediis terminis æquationis, ut sequitur. Dein quoniam quadratum secundi termini, pxx, ductum in imminentem fractionem, $\frac{1}{3}$, nimirum $\frac{ppx^4}{3}$, minus est, quàm primi termini x^3 & tertii $3ppx$ rectangulum, $3ppx^4$; sub termino pxx, colloco signum −. At quia tertii termini, $3ppx$, quadratum, $9p^4xx$, ductum in imminentem fractionem, $\frac{1}{3}$, majus est quàm nihil, atque adeo multo majus quàm secundi termini, pxx, & quarti, $-q$, rectangulum negativum, colloco sub tertio illo termino signum +. Dein sub primo termino, x^3, & ultimo, $-q$, colloco signa +. Et signorum subscriptorum, quæ in hâc sunt serie, + − + +, mutationes duæ, una de + in −, alia de − in +, indicant duas esse radices impossibiles.

$$\begin{array}{cccc} & \frac{1}{3}. & \frac{1}{3}. & \\ x^3 & +\,pxx & +\,3ppx & -\,q = 0 \\ + & - & + & + \end{array}$$

Sic & æquatio, $x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$, duas habet radices impossibiles.

$$\begin{array}{cccc} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ x^3 & -\,4xx & +\,4x & -\,6 = 0 \\ + & + & - & + \end{array}$$

Æquatio item, $x^4 - 6xx - 3x - 2 = 0$, duas habet. Nam hæc fractionum series, $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}$, dividendo secundam per primam, tertiam per secundam, & quartam per tertiam, dat hanc seriem, $\frac{3}{8}.\frac{4}{9}.\frac{3}{8}$, super mediis æquationis terminis collocandam.

$$\begin{array}{ccccc} & \frac{3}{8} & \frac{4}{9} & \frac{3}{8} & \\ x^4 & * & -\,6xx & -\,3x & -\,2 = 0 \\ + & + & + & - & + \end{array}$$

Dein secundi termini, qui hic nihil est, quadratum, ductum in fractionem imminentem $\frac{3}{8}$, producit, nihil; quod tamen majus est quàm rectangulum negativum, $-6x^6$, sub terminis utrinque positis, x^4 & $-6xx$, contentum. Quare sub termino illo deficiente scribo +. In cæteris pergo ut in exemplo superiori; & signorum subscriptorum prodit hæc series, + + + − +; ubi duæ mutationes indicant duas radices impossibiles. Et ad eundem modum in æquatione $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$, deteguntur impossibiles duæ.

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{2}{5}. & \frac{1}{2}. & \frac{1}{2}. & \frac{2}{5}. & \\ x^5 & -\,4x^4 & +\,4x^3 & -\,2xx & -\,5x & -\,4 = 0 \\ + & + & - & + & + & + \end{array}$$

Ubi

Ubi termini duo vel plures ſimul deſunt, ſub primo terminorum deficientium collocandum eſt ſignum −, ſub ſecundo ſignum +, ſub tertio ſignum −, & ſic deinceps, ſemper variando ſigna; niſi quòd ſub ultimo terminorum ſimul deficientium ſemper collocandum eſt ſignum +, ubi deficientibus utrinque proximi habent ſigna contraria. Ut in æquationibus

De Natura Radicum.

$$\begin{array}{l} x^5 + ax^4 * * * + a^5 = 0, \\ + \quad + - + - \quad + \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \& \; x^5 + ax^4 * * * - a^5 = 0, \\ + \quad + - + + \quad + \end{array}$$

quarum prior quatuor, poſterior duas, habet impoſſibiles radices. Sic & æquatio

$$\begin{array}{l} \quad \frac{3}{7}. \quad \frac{5}{9}. \quad \frac{3}{5}. \quad \frac{3}{5}. \; \frac{5}{9}. \; \frac{3}{7}. \\ x^7 - 2x^6 + 3x^5 - 2x^4 + x^3 * * - 3 = 0 \\ + \quad - \quad + \quad - \quad + - + \quad + \end{array}$$

ſex habet impoſſibiles.

Hinc etiam cognoſci poteſt, utrùm radices impoſſibiles inter affirmativas radices latent, an inter negativas. Nam ſigna terminorum, ſignis ſubſcriptis variantibus imminentium, indicant tot affirmativas eſſe impoſſibiles, quot ſunt ipſorum variationes; & tot negativas, quot ſunt ipſorum ſucceſſiones, ſine variatione. Sic in æquatione

$$\begin{array}{l} x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0 \\ + \quad + \quad - \quad + \quad + \quad + \end{array}$$

quoniam ſignis infrà ſcriptis variantibus, + − +, quibus radices duæ impoſſibiles indicantur, imminentes termini, $-4x^4 + 4x^3 - 2xx$, ſigna habent − + −, quæ, per duas variationes, indicant duas affirmativas radices; ideo radices duæ impoſſibiles inter affirmativas latebunt. Cùm itaque omnium æquationis terminorum ſigna, + − + − − −, per tres variationes indicant tres eſſe affirmativas radices, & reliquas duas negativas eſſe, & inter affirmativas lateant duæ impoſſibiles, ſequitur, æquationis unam eſſe radicem verè affirmativam, duas negativas ac duas impoſſibiles. Quòd ſi æquatio fuiſſet

$$\begin{array}{l} x^5 - 4x^4 - 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0 \\ + \quad + \quad - \quad - \quad + \quad + \end{array}$$

tunc termini ſubſcriptis ſignis prioribus variantibus, + −, imminentes, nimirum $-4x^4 - 4x^3$, per ſigna ſua non variantia − & −, indicant unam, ex negativis radicibus, impoſſibilem eſſe; & termini ſignis ſubſcriptis poſterioribus variantibus, − +, imminentes, nimirum $-2xx - 5x$, per ſigna ſua non variantia, − & −, indicant aliam, ex negativis radicibus, impoſſibilem eſſe.

Cap. XVI. eſſe. Quamobrem, cùm æquationis ſigna, + − − − − −, per unam variationem, indicent unam affirmativam radicem, cæteras quatuor negativas eſſe; ſequitur, unam eſſe affirmativam, duas negativas, ac duas impoſſibiles. Atque hæc ita ſe habent, ubi non ſunt plures impoſſibiles radices, quàm per regulam allatam deteguntur. Poſſunt enim plures eſſe, licet id perraró eveniat.

CAPUT XVII.

De tranſmutationibus Æquationum (z).

CÆterùm æquationis cujuſvis radices omnes affirmativæ *in* negativis, *&* negativæ *in* affirmativas, *mutari poſſunt, idque mutando tantùm ſigna terminorum alternorum* (a).

Sic æquationis, $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$, radices tres affirmativæ mutabuntur in negativas, & duæ negativæ in affirmativas, mutando tantùm ſigna ſecundi quarti & ſexti termini ut hîc fit, $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2xx - 5x + 4 = 0$. Eaſdem habet hæc æquatio radices cum priore, niſi qòod hîc affirmativæ ſunt, quæ ibi erant negativæ, & hîc negativæ, quæ ibi erant affirmativæ; & radices duæ impoſſibiles, quæ ibi inter affirmativas latebant, hîc latent inter negativas; ita ut his deductis reſtet unica tantùm radix verè negativa.

Sunt & aliæ æquationum tranſmutationes quæ diverſis uſibus inſerviunt. *Poſſumus enim ſupponere, radicem æquationis ex cognitâ & incognitâ aliquâ quantitate utcunque componi, & perinde pro eâ ſubſtituere, quod æquipollens eſſe fingitur.* Ut ſi ſupponamus radicem æqualem eſſe ſummæ vel differentiæ cognitæ alicujus & incognitæ quantitatis. Nam poſſumus hoc pacto radices æquationis cognitâ illâ quantitate augere vel diminuere, vel de cognitâ quantitate ſubducere; atque ita efficere, ut earum aliquæ, quæ priùs erant negativæ, jam fiant affirmativæ, vel ut aliquæ ex affirmativis evadant negativæ; vel etiam ut omnes evadant affirmativæ aut omnes negativæ (b). Sic in æquatione, $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ſi radices unitate augeri vellem, fingo $x + 1 = y$, ſeu $x = y - 1$; & perinde pro x ſcribo in æquatione

(z) Hujuſce doctrinæ fundamenta jecit Franciſcus Vieta, cujus librum vide de Recognitione Æquationum, c. 7.

(a) Anaſtrophe Vietæa De Emendat. Æquationum, c. 3. Vide etiam Carteſii Geometr. Lib. 3.

(b) Vid.

tione $y-1$, & pro quadrato, cubo, quadrato-quadrato de x similem poteſtatem de $y-1$, ad hunc modum. De Transmut. Æquat.

$$\begin{array}{r|rrrrr} x^4 & y^4 - 4y^3 & + 6yy & - 4y & + 1 \\ -x^3 & - y^3 & + 3yy & - 3y & + 1 \\ -19xx & & - 19yy & + 38y & - 19 \\ +49x & & & + 49y & - 49 \\ -30 & & & & - 30 \\ \hline \text{Summa} & y^4 - 5y^3 & - 10yy & + 80y & - 96 = 0. \end{array}$$

Et æquationis prodeuntis $y^4-5y^3-10yy+80y-96=0$, radices erunt, 2, 3, 4, -4; quæ priùs erant, 1, 2, 3, -5, unitate jam factæ majores. Quòd ſi pro x ſcripſiſſem $y+1\frac{1}{2}$, prodiiſſet æquatio $y^4+5y^3-10yy-\frac{5}{4}y+\frac{15}{16}=0$; cujus duæ fuiſſent radices affirmativæ, $\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$, ac duæ negativæ, $-\frac{1}{2}$ & $-6\frac{1}{2}$. Pro x vero ſcribendo $y-6$, prodiiſſet æquatio, cujus radices fuiſſent, 7, 8, 9, 1, omnes nimirum affirmativæ; & pro eodem ſcribendo $y+4$, radices, jam numero quaternario diminutæ, evaſiſſent -3, -2, -1, -9; negativæ omnes.

Et hoc modo augendo vel diminuendo radices, ſiquæ impoſſibiles ſunt, hæ aliquando faciliùs detegentur quàm priùs. Sic in æquatione, $x^3-3aax-3a^3=0$, radices nullæ per præcedentem regulam apparent impoſſibiles. At ſi augeas radices quantitate a, ſcribendo $y-a$ pro x, in æquatione reſultante, $y^3-3ayy-a^3=0$, radices duæ impoſſibiles jam per regulam illam detegi poſſunt.

Eâdem operatione poſſumus etiam ſecundos terminos æquationum tollere (c). Hoc enim fiet, ſi cognitam quantitatem ſecundi termini æquationis propoſitæ, per numerum dimenſionum æquationis diviſam, ſubducamus de quantitate, quæ pro novæ æquationis radice ſignificandâ aſſumitur, & reſiduum ſubſtituamus pro radice æquationis propoſitæ. Ut ſi proponatur æquatio, $x^3-4xx+4x-6=0$, cognitam quantitatem ſecundi termini, quæ eſt -4, diviſam per numerum dimenſionum æquationis, 3, ſubduco de ſpecie, quæ pro novâ radice ſignificandâ aſſumitur, puta de y; & reſiduum $y+\frac{4}{3}$ ſubſtituo pro x, & provenit,

$$\begin{array}{rrrr} y^3 + 4yy & + \frac{16}{3}y & + \frac{64}{27} \\ - 4yy & - \frac{32}{3}y & - \frac{64}{9} \\ & + 4y & + \frac{16}{3} \\ & & - 6 \\ \hline y^3 \quad * & - \frac{4}{3}y & - \frac{146}{27} = 0. \end{array}$$

Eâdem methodo poteſt & tertius æquationis terminus tolli. Proponatur æquatio $x^4-3x^3+3xx-5x-2=0$, & finge $x=y-e$; & ſubſtituendo $y-e$ pro x orietur hæc æquatio.

$$y^4 \begin{matrix} -4e \\ -3 \end{matrix} y^3 \begin{matrix} +6ee \\ +9e \\ +3 \end{matrix} yy \begin{matrix} -4e^3 \\ -9ee \\ -6e \\ -5 \end{matrix} y \left.\begin{matrix} +e^4 \\ +3e^3 \\ +3ee \\ +5e \\ -2 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Hujus æquationis tertius terminus eſt $6ee+9e+3$ ductum in yy. Ubi ſi $6ee+9e+3$ nullum eſſet,

(b) Vid. Carteſii Geomet. Lib. 3.

(c) Expurgatio per Uncias Vietæ. Vid. Librum de emendatione æquationum, c. 1.

CAP. XVII. esset, eveniret ipsum quod volumus. Fingamus itaque nullum esse, ut inde colligamus quinam numerus ad hunc effectum substitui debet pro e, & habebimus æquationem quadraticam $6ee+9e+3=0$; quæ divisa per 6 fiet $ee+\frac{3}{2}e+\frac{1}{2}=0$, seu $ee=-\frac{3}{2}e-\frac{1}{2}$; &, extractâ radice, $e=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{1}{2}}$, seu $=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}}$, hoc est $=-\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}$, atque adeo vel $=-\frac{1}{2}$ vel $=-1$. Unde $y-e$ erit vel $y+\frac{1}{2}$, vel $y+1$. Quamobrem, cùm $y-e$ scriptum fuit pro x, vice $y-e$ debet $y+\frac{1}{2}$, vel $y+1$, scribi pro x, ut tertius æquationis resultantis terminus nullus sit. Et in utroque quidem casu id eveniet. Nam si pro x scribatur $y+\frac{1}{2}$, orietur hæc æquatio, $y^4-y^3-\frac{15}{4}y-\frac{65}{16}=0$; sin scribatur $y+1$, orietur hæc, $y^4+y^3-4y-6=0$.

Possunt & radices æquationis per datos numeros multiplicari vel dividi; & hoc pacto termini æquationum diminui, fractionesque & radicales quantitates aliquandò tolli (d).

Ut si æquatio sit $y^3-\frac{4}{3}y-\frac{146}{27}=0$, ad tollendas fractiones fingo esse $y=\frac{1}{3}z$; & perinde pro y substituendo $\frac{1}{3}z$ provenit æquatio nova $\frac{z^3}{27}-\frac{12z}{27}-\frac{146}{27}=0$; & rejecto terminorum communi denominatore, $z^3-12z-146=0$, cujus æquationis radices sunt triplo majores quàm antè. Et rursus, ad diminuendos terminos æquationis hujus, si scribatur $2v$ pro z, prodibit $8v^3-24v-146=0$; &, divisis omnibus per 8, fiet $v^3-3v-18\frac{1}{4}=0$; cujus æquationis radices dimidiæ sunt radicum prioris. Et hîc, si tandem inveniatur v, ponendum erit $2v=z$, $\frac{1}{3}z=y$, & $y+\frac{4}{3}=x$; & æquationis primo propositæ, $x^3-4xx+4x-6=0$, habebitur radix x.

Sic & in æquatione $x^3-2x+\sqrt{3}=0$, ad tollendam quantitatem radicalem $\sqrt{3}$, pro x scribo $y\sqrt{3}$, & provenit æquatio $3y^3\sqrt{3}-2y\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$; quæ, divisis omnibus terminis per $\sqrt{3}$, fit $3y^3-2y+1=0$.

Rursus

(d) *Multiplicatio & Divisio isomerica Vietæ* (De Emendat. Æquationum, c. 14.) quarum præcepta Cartesius breviter ac luculenter tradidit. "Multiplicetur vel dividatur coefficiens membri secundi æquationis propositæ per quantitatem illam, quæ multiplicare aut dividere debet radices. Ejusdem potestas quadratica multiplicet vel dividat coefficientem membri tertii; cubica coefficientem quarti, eodemque deinceps modo." Cæterùm harum transmutationum in numerali æquationum exegesi maximæ sunt utilitates; utpote quarum ope non modò fractiones & surda tollantur, sed numeri ipsi mole intractabiles ad minores revocentur, calculis faciliùs subjiciendos. Sic si æquatio fuerit $x^3 * -203125x-23437500=0$, divido [illegible] per numerum

Rursus æquationis radices in earum reciprocas transmutari possunt, & hoc pacto æquatio aliquandò ad formam commodiorem reduci (e). De Transmut. Æquat.

Sic æquatio novissima, $3y^3 - 2y + 1 = 0$, scribendo $\frac{1}{z}$ pro y, evadit $\frac{3}{z^3} - \frac{2}{z} + 1 = 0$, seu terminis omnibus multiplicatis per z^3, & ordine terminorum mutato, $z^3 - 2zz + 3 = 0$. Potest etiam æquationis terminus penultimus hoc pacto tolli, si modò secundus priùs tollatur; ut factum vides in exemplo præcedente. Aut si antepenultimum tolli cupias, id fiet, si modò tertium priùs tollas. Sed & radix minima hoc pacto in maximam convertitur, & maxima in minimam; quod usum nonnullum habere potest in sequentibus. Sic in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, cujus radices sunt; 3, 2, 1, −5; si scribatur $\frac{1}{y}$ pro x, resultabit æquatio $\frac{1}{y^4} - \frac{1}{y^3} - \frac{19}{yy} + \frac{49}{y} - 30 = 0$; quæ, terminis omnibus multiplicatis per y^4, ac divisis per 30, signisque mutatis, fiet $y^4 - \frac{49}{30}y^3 + \frac{19}{30}yy + \frac{1}{30}y - \frac{1}{30} = 0$; cujus radices sunt, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1, $-\frac{1}{5}$; radicum affirmativarum maximâ, 3, jam conversâ in minimam, $\frac{1}{3}$, & minimâ, 1, jam factâ maximâ, & radice negativâ, −5, quæ omnium maximè distabat à nihilo, jam omnium maximè accedente ad nihil.

Sunt & aliæ æquationum transmutationes, (f) sed quæ omnes ad exemplum transmutationis illius, ubi tertium æquationis terminum sustulimus confici possunt; ut non opus sit hàc de re plura dicere. Addamus potiùs aliqua de limitibus æquationum.

CAPUT XVIII.

De Limitibus æquationum.

Ex Æquationum generatione constat, quod cognita quantitas secundi *termini æquationis, si signum ejus mutetur, æqualis*

numerum 125. $\begin{matrix} 1 & 125 & 15625 & 1953125 \\ x^3 & * & -203125x & -23437500 = 0 \end{matrix}$. Ex divisione provenit nova, $y^3 - 13y - 12 = 0$; cujus radicibus 4, −3, −1, cum numero 125 multiplicatis, existunt propositæ radices, 500, −375, −125.

(e) Transmutatio Πρῶτον ἔσχατον Vietæ, cui nomen inditum ex inverso, in æquatione transmutatâ coefficientium ordine. De Emendat. Æquationum, c. 2.

(f) Harum, ni fallor, præcipua est *Canonica æquationum transmutatio*, ut coefficientes fiat quæ præscribantur: de quâ consule Vietam in Libro de Emendatione Æquationum, c. 8. & Cartesium in Libro tertio Geometriæ.

CAP. XVIII. *ſit aggregato omnium radicum ſub ſignis propriis*; *ea* tertii *æqualis aggregato rectangulorum ſub ſingulis binis radicibus*; *ea* quarti, *ſi ſignum ejus mutetur, æqualis aggregato contentorum ſub ſingulis ternis radicibus*; *ea* quinti *æqualis aggregato contentorum ſub ſingulis quaternis*; *& ſic in infinitum* (g).

Aſſumamus $x=a$, $x=b$, $x=-c$, $x=d$, &c. ſeu $x-a=0$, $x-b=0$, $x+c=0$, $x-d=0$, & ex horum continuâ multiplicatione generemus æquationes, ut ſuprà. Jam multiplicando $x-a$ per $x-b$, producetur æquatio $xx \begin{matrix}-a\\-b\end{matrix} x + ab = 0$; ubi cognita quantitas ſecundi termini, ſi ſigna ejus mutentur, nimirum $a+b$, eſt ſumma duarum radicum, a & b; & cognita tertii, ab, illud unicum quod ſub utràque continetur rectangulum. Rurſus, multiplicando hanc æquationem per $x+c$, producetur æquatio cubica,

$$x^3 \begin{matrix}-a\\-b\\+c\end{matrix} xx \begin{matrix}+ab\\-ac\\-bc\end{matrix} x + abc = 0;$$

ubi cognita quantitas ſecundi, ſub ſignis

(g) Hæc eſt primaria æquationum proprietas, quam omnibus generaliter ineſſe primus affirmare auſus eſt Albertus Girardus, cùm de illis, quarum radices omnes poſſibiles ac poſitivæ eſſent, prior pronuntiaverat Franciſcus Vieta. Harriottus autem veritatem hâc in re, quam primus inveniſſe dicitur atque demonſtraſſe, ne intellexit quidem, licèt ea ſcripſiſſet, ex quibus aliis intelligere facile eſſet, ſi non priùs patefacta eſſet à Girardo. Nimirum Harriottus æquationem quadraticam $aa \begin{matrix}-b\\+c\end{matrix} a = bc$ procreari docet è multiplicatione æquationis ſimplicis, $a-b$, in quantitatem $a+c$; æquationem vero cubicam $aaa \begin{matrix}-b\\+c\\+d\end{matrix} aa \begin{matrix}-bc\\-bd\\+cd\end{matrix} a = bcd$ è multiplicatione æquationis ſimplicis $a-b=0$ in quantitatem $a+c$, æquationiſque quadraticæ, ex primâ illâ multiplicatione effectæ, in quantitatem $a+d$. Hæc ſanè ac plura hujuſcemodi exempla, quorum quidem affatim congeſſit, tantundem valent, ac ſi generaliter dixiſſet, coefficientes in æquationibus compoſitis ex quantitatibus illis, b, c, d, generari, quæ cum quantitate ignotâ ſignis, $+$, $-$, connexæ binomia conſtituunt, quorum multiplicatione continuâ æquatio quæque generata eſt; legemque præterea procreationis eam attuliſſet, ut quantitatum illarum ſumma, ſignis contrariis, coefficientem ſecundi membri æquationis efficeret: factorum è binis ſumma coefficientem tertii: factorum è ternis ſignis contrariis ſumma coefficientem quartæ, eodemque uſque modo. Hæc inquam, exempla illa Harriotto congeſta ſatis apertè ſignificant. Hæc ipſe Harriottus tam enuntiaviſſe cenſendus eſt, ac ſi verbis diſertiſſimè enuntiâſſet. Ex hiſce verò Girardi Theorema procudere Carteſio quidem facile fuiſſet. Quid dicam Carteſio, ſummo plane Arithmetico? Cùm idem vel è populo cuilibet licuiſſet, cui id modò perceptum eſſet, æquationum ex multiplicationibus provenientium quantitates negativas, $-c$, $-d$, æquè ac poſitivam b, habendas eſſe radices. Harriottus autem, cui id nunquam planè perceptum fuit, qui arctè adeo ad lumen connivebat, ut quantitates $-c$, $-d$, æquationum, quæ ex illis procreatæ eſſent, radices eſſe conſtantiſſimè negaret, qui fieri potuit ut ille intelligeret coefficientium geneſin è *radicum* multiplicatione? Girardi autem, ut ad illum redeam, hæc ſunt verba. "La premiere faction des ſolutions eſt eſgale au nombre du premier meſlé, la ſeconde faction des meſmes eſt eſgale au nombre du deuxieſme meſlé, la troiſieſme au troiſieſme, & tousjours ainſi, tellement que la derniere faction eſt eſgale a la fermeture, & ce ſelon les ſignes qui ſe peuvent remarquer en l' ordre alternatif."

Quæ

ſignis mutatis, nimirum $a+b-c$, eſt ſumma radicum, a, b & $-c$; cognita tertii, $ab-ac-bc$, ſumma rectangulorum ſub ſingulis binis, a & b, a & $-c$, b & $-c$; & cognita quarti, ſub ſigno mutato, $-abc$, illud unicum contentum eſt quod omnium continuâ multiplicatione generatur, a in b in $-c$. Adhæc, multiplicando cubicam illam æquationem per $x-d$, producetur hæcce quadrato-quadratica,

$$x^4 \begin{matrix} -a \\ -b \\ +c \\ -d \end{matrix} x^3 \begin{matrix} +ab \\ -ac \\ -bc \\ +ad \\ +bd \\ -cd \end{matrix} xx \begin{matrix} +abc \\ -abd \\ +bcd \\ +acd \end{matrix} x - abcd = 0:$$

ubi cognita quantitas ſecundi termini, ſub ſignis mutatis, $a+b-c+d$, eſt ſumma omnium radicum; ea tertii, $ab-ac-bc+ad+bd-cd$, ſumma rectangulorum ſub ſingulis binis; ea quarti, ſub ſignis mutatis, $-abc+abd-bcd-acd$, ſumma contentorum ſub ſingulis ternis; ea quinti, $-abcd$, contentum unicum ſub omnibus. Et hinc primò colligimus omnes æquationis cujuſcunque terminos nec fractos nec ſurdos habentis radices non ſurdas, & radicum binarum rectangula, ternarumque aut plurium:

Quæ Latinè ſic ſonant.

Radicum effectio prima coefficienti primi compoſiti æqualis eſt, effectio earundem ſecunda compoſiti ſecundi coefficienti, tertia tertii, atque ſic continuò donec ad effectionem ultimam perventum fuerit, quæ homogeneo comparationis eſt æqualis. Signa autem coefficientium ea adhibenda ſunt, quæ reperiuntur in ordine æquationis alterno.

Quòd ſi vocibus illis minùs uſitatis, *effectio*, *compoſitum*, *alternus ordo* (effection, meſlè, ordre alternatif) obſcuritas aliqua inſit, eam omnem amolientur auctoris definitiones. " Es equations meſlées la plus haute quantité eſt dite Maxime, ou haute extremité; celle qui eſt un degré plus bas, eſt dite premier meſlé; celle qui eſt encor un degre plus bas eſt dite ſecond meſlé, & ainſi conſequemment, tellement que le ◎ eſt la fermeture ou baſſe extremité."

" Quant pluſieurs nombres ſont propoſez, la ſomme totale ſoit dite premiere ſaction; la ſomme de tous les produits de deux a deux ſoit dite deuxieſme ſaction: la ſomme de tous les produits de 3 à 3 ſoit dite la troiſieſme ſaction, & tousjours ainſi juſques à la fin; mais le produit de tous les nombre ſoit la derniere ſaction: or il y a autant de ſactions que de nombres propoſez."

" Ordre alterne des equations eſt quand les maxime ou haute extremité n'a autre nombre que l'unite avec le ſigne +, & que les denominateurs, ou caracteres, impairs ſont d'un coſté & les pairs de l'autre."

Quæ Latinè ſic dici poſſunt. " Æquationis cujuſvis compoſitæ membrum illud, quod ex quantitatis incognitæ poteſtate elatiſſimâ efficitur, maximum dicitur, ſive extremum ſuperius; quod ex poteſtate uno tantùm gradu inferiore, compoſitum primum; quod ex uno rurſum gradu inferiore, compoſitum ſecundum; eodemque ſimiliter progreſſu uſquedum ad membrum perventum fuerit incognitâ quantitate prorſus vacuum, quod *clauſula* dicatur, ſive extremum inferius. [Membrum illud ultimum quod *clauſulam* Girardus, ſive *poſitionem*, dixit, Vieta *homogeneum comparationis* appellabat.]

Quotcunque numeris propoſitis, ſumma quæ ex omnibus Algebraicè conficitur, effectio prima dicatur. Summa factorum è binis effectio ſecunda: ſumma factorum è ternis effectio tertia: ac ſimili deinceps modo. Factum verò ex omnibus dicatur effectio ultima. Cæterùm tot ſemper effectiones erunt quot numeri ex quibus procreatæ fuerint.

Alternus eſt æquationum ordo, cùm membra omnia, indicibus poteſtatum incognitæ imparibus prædita, ab alterâ parte conſtituantur, ab alterâ verò ſeorſum quot indicibus paribus gaudent: eâ verò lege, ut poteſtati elatiſſimæ ſignum, ſit +, neque coefficiens alius præter ipſam unitatem."

Id.

CAP. XVIII. rium contenta, esse aliquos ex divisoribus integris ultimi termini; atque adeo ubi constiterit, nullum ultimi termini divisorem esse aut radicem æquationis, aut duarum radicum rectangulum, pluriumvè contentum, simul constabit, nullam esse radicem, radicumve rectangulum, aut contentum, nisi quod sit surdum.

Ponamus jam cognitas quantitates terminorum æquationis sub signis mutatis esse, p, q, r, s, t, v, &c. eam nempe secundi p, tertii q, quarti r, quinti s, & sic deinceps. Et, signis terminorum probè observatis, fiat $p=a. pa+2q=b. pb+qa+3r=c. pc+qb+ra+4s=d. pd+qc+rb+sa+5t=e. pe+qd+rc+sb+ta+6v=f.$ & sic in infinitum, observatâ serie progressionis. Et erit a summa radicum; b summa quadratorum ex singulis radicibus; c summa cuborum; d summa quadrato-quadratorum; e summa quadrato-cuborum; f summa cubo-cuborum; & sic in reliquis [b]. Ut in æquatione $x^4-x^3-19xx+49x-30=0$, ubi cognita quantitas secundi termini est -1, tertii -19, quarti $+49$, quinti -30; ponendum erit $1=p$, $19=q$, $-49=r$, $30=s$. Et inde orientur $a=(p=)\ 1.\ b=(pa+2q=1+38=)\ 39.\ c=(pb+qa+3r=39+19-147=)-89.\ d=(pc+qb+ra+4s=-89+741-49+120=)723.$ Quare summa radicum erit 1; summa quadratorum radicum 39; summa cuborum -89; & summa quadrato-quadratorum 723. Nimirum æquationis illius radices sunt, 1, 2, 3, & -5; & harum summa, $1+2+3-5$, est 1; summa quadratorum, $1+4+9+25$, est 39; summa cuborum, $1+8+27-125$, est -89; & summa quadrato-quadratorum, $1+16+81+625$, est 723.

Et hinc colliguntur *limites*, inter quos consistent radices æquationis, ubi nulla earum impossibilis est. Nam cùm radicum omnium quadrata sunt affirmativa, quadratorum summa affirmativa erit, ideoque quadrato maximæ radicis major. Et eodem argumento,

Id nimirum efficit illa alternatio, ut membri secundi, quarti, sexti, aliorumque paribus in locis æquationis ordinatæ consistentium, signa mutentur, reliquorum non mutatis.

(b) Potestatum è radicibus incognitis consummationem idem vir ille magnus Albertus Girardus omnium primus, credo, ante Newtonum aggressus est; ex cujus formulis, inter nova inventa Algebraica editis, Newtonianæ facilè deducendæ sunt

Soit
A premier meslé
B second
C troisiéme
D quatriéme
&c.

sit
A coefficiens primus; intellige membri secundi coefficientem
B secundus
C tertius
D quartus
&c.

Alors

argumento, ſumma quadrato-quadratorum radicum omnium major erit quàm quadrato-quadratum radicis maximæ; & ſumma cubo-cuborum major quàm cubo-cubus radicis maximæ. DE LIMITIBUS ÆQUAT.

REGULA I.

Quamobrem ſi limitem deſideres, quem radices nullæ tranſgrediuntur, quære ſummam quadratorum radicum, & extrahe ejus radicem quadraticam. Hæc enim radix major *erit quam radix maxima æquationis.* Sed ad radicem maximam propius accedes, ſi quæras *ſummam quadrato-quadratorum, & extrabas ejus radicem quadrato-quadraticam : & adhuc* magis, *ſi quæras ſummam cuborum, & extrabas ejus radicem cubo-cubicam : et ita in infinitum.*

Sic in æquatione præcedente, radix quadratica ſummæ quadratorum radicum, ſeu $\sqrt{39}$, eſt $6\frac{1}{4}$ quàm proximè; & $6\frac{1}{4}$ magis diſtat à nihilo quam ulla radicum, 1, 2, 3, − 5. At radix quadrato-quadratica ſummæ quadrato-quadratorum radicum, nempe $\sqrt[4]{723}$, quæ eſt $5\frac{1}{5}$ circiter, propiùs accedit ad radicem à nihilo remotiſſimam, − 5.

REGULA II.

Si inter ſummam quadratorum & ſummam quadrato-quadratorum radicum, inveniatur media proportionalis, erit ea paulo major quàm ſumma cuborum radicum ſub ſignis affirmativis connexorum. Et inde hujus mediæ proportionalis & ſummæ cuborum ſub propriis ſignis, ut priùs inventæ, ſemiſumma erit major, quàm ſumma cuborum radicum affirmativarum, & ſemidifferentia major quàm ſumma cuborum radicum negativarum.

Atque adeo maxima radicum affirmativarum minor erit quàm radix cubica illius ſemiſummæ, & maxima radicum negativarum minor quàm radix cubica illius ſemidifferentiæ.

Alors en toute ſorte d'equations
$\begin{cases} A \\ Aq - B2 \\ A\ cub. - AB3 + C3 \\ Aqq - AqB4 + AC4 + Bq2 - D4 \end{cases}$
ſera la ſomme des
{ ſolutions
quarez
cubes
quarre-quarez.

Tum in æquatione cujuſcunque formæ
$\begin{cases} A \\ A^2 - 2B \\ A^3 - 3A \times B + 3C \\ A^4 - 4B \times A^2 + 4A \times C + 2B^2 - 4D \end{cases}$
ſumma erit
{ radicum
quadratorum è radicibus
cuborum ex iiſdem
quadrato-quadratorum.

Sic

CAP. XVIII. Sic in æquatione præcedente, media proportionalis inter summam quadratorum radicum, 39, & summam quadrato-quadratorum, 723, est 168 circiter. Summa cuborum sub propriis signis supra erat $-$ 89. Hujus & 168 semisumma est $39\frac{1}{2}$, semidifferentia $128\frac{1}{2}$. Prioris radix cubica, quæ est $3\frac{1}{2}$ circiter, major est quàm maxima radicum affirmativarum, 3. Posterioris radix cubica, quæ est $5\frac{1}{11}$ proximè, transcendit radicem negativam, $-$ 5. Quo exemplo videre est, quàm propè ad radicem hâc methodo acceditur, ubi unica tantùm radix negativa est, vel unica affirmativa.

REGULA III.

Et tamen propiùs adbuc accederetur; si inter summam quadrato-quadratorum radicum & summam cubo-cuborum media proportionalis inveniretur, atque ex hujus, & summæ quadrato-cuborum radicum semisummâ, & semidifferentiâ, radices quadrato-cubicæ extraberentur.

Nam radix quadrato-cubica semisummæ transcenderet maximam radicem affirmativam; & radix quadrato-cubica semidifferentiæ maximam seu extimam negativam, sed excessu multo minore quàm antè. Cùm igitur radix quælibet, augendo vel diminuendo radices omnes fieri potest minima, dein minima in maximam converti, & postea omnes præter maximam fieri negativæ, constat quomodo radix imperata, quàm proximè, potest obtineri.

REGULA IV.

Si radices omnes præter duas negativæ sunt, possunt illæ duæ simul boc modo erui.

Inventâ juxta methodum præcedentem summâ cuborum duarum illarum radicum, ut & summâ quadrato-cuborum, & summâ quadrato-quadrato cuborum radicum omnium; inter posteriores duas summas quære mediam proportionalem; & ea erit differentia inter summam cubo-cuborum radicum affirmativarum, & summam cubo-cuborum radicum negativarum, quàm proximè; adeoque hujus mediæ proportionalis, & summæ

De Limitibus Æquat.

cubo-cuborum radicum omnium semisumma erit summa cubo-cuborum radicum affirmativarum, & semidifferentia erit summa cubo-cuborum radicum negativarum. Habitâ igitur tùm summâ cuborum, tum summâ cubo-cuborum radicum duarum affirmativarum, de duplo summæ posterioris aufer quadratum summæ prioris, & reliqui radix quadratica erit differentia cuborum duarum radicum. Habitâ vero tum summâ tum differentiâ cuborum, habentur cubi ipsi. Extrahe eorum radices cubicas, & habebuntur æquationis radices duæ affirmativæ quàm proximè. Et si in altioribus potestatibus opus consimile institueretur, magis adhuc accederetur ad radices. Sed hæ limitationes, ob difficilem calculum, minùs usui sunt, & ad æquationes tantùm extendunt, quæ nullas habent radices imaginarias. Quapropter limites aliâ ratione invenire jam docebo, quæ & facilior sit, & ad omnes æquationes extendat.

Regula V.

Multiplicetur æquationis terminus unusquisque per numerum dimensionum ejus, & dividatur factum per radicem æquationis. Dein rursus multiplicetur unusquisque terminorum prodeuntium per numerum unitate minorem quàm priùs; & factum dividatur per radicem æquationis. Et sic pergatur, semper multiplicando per numeros unitate minores quàm priùs, & factum dividendo per radicem, donec tandem termini omnes destruantur, quorum signa diversa sunt à signo primi, seu altissimi termini, præter ultimum. Et numerus ille erit omni affirmativâ radice major; qui in terminis prodeuntibus scriptus pro radice, efficit, eorum, qui singulis vicibus per multiplicationem producebantur, aggregatum ejusdem semper esse signi cum primo, seu altissimo, termino æquationis.

Ut si proponatur æquatio $x^5-2x^4-10x^3+30xx+63x-120=0$. Hanc primum sic multiplico, $\overset{5}{x^5}-\overset{4}{2x^4}-\overset{3}{10x^3}+\overset{2}{30xx}+\overset{1}{63x}-\overset{0}{120}$. Dein terminos prodeuntes, divisos per x, rursum multiplico sic, $\overset{4}{5x^4}-\overset{3}{8x^3}-\overset{2}{30xx}+\overset{1}{60x}+\overset{0}{63}$; & terminos prodeuntes rursum dividendo per x prodeunt $20x^3-24xx-60x+60$; quos, minuendi gratiâ, divido per maximum divisorem 4, & fiunt $5x^3-6xx-15x+15$.

CAP. XVIII. Hi itidem multiplicati per progressionem 3. 2. 1. 0, & divisi per x, fiunt $15xx - 12x - 15$; & rursum divisi per 3 fiunt $5xx - 4x - 5$. Et hi multiplicati per progressionem 2. 1. 0, & divisi per $2x$, fiunt $5x - 2$. Jam cùm terminus æquationis altissimus, x^5, affirmativus sit; tento, quinam numerus scriptus in his productis pro x efficiet ea omnia affirmativa esse. Et quidem tentando 1, fit $5x - 2 = 3$, affirmativum; sed $5xx - 4x - 5$, fit -4, negativum. Quare limes erit major quàm 1. Tento itaque numerum aliquem majorem, puta 2. Et in singulis substituendo 2 pro x, evadunt,

$$5x - 2 = 8$$
$$5xx - 4x - 5 = 7$$
$$5x^3 - 6xx - 15x + 15 = 1$$
$$5x^4 - 8x^3 - 30xx + 60x + 63 = 79$$
$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 46.$$

Quare cùm numeri prodeuntes 8. 7. 1. 79. 46, sint omnes affirmativi, erit numerus 2 major quàm radicum affirmativarum maxima. Similiter si limitem negativarum radicum invenire vellem, tento numeros negativos. Vel, quod perinde est, muto signa terminorum alternorum, & tento affirmativos. Mutatis autem terminorum alternorum signis, quantitates, in quibus numeri substituendi sunt, fient

$$5x + 2$$
$$5xx + 4x - 5$$
$$5x^3 + 6xx - 15x - 15$$
$$5x^4 + 8x^3 - 30xx - 60x + 63$$
$$x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 30xx + 63x + 120$$

Ex his seligo quantitatem aliquam, ubi termini negativi maximè prævalere videntur; puta $5x^4 + 8x^3 - 30xx - 60x + 63$: & hîc, substituendo pro x numeros 1 & 2, prodeunt numeri negativi -14 & -33. Unde limes erit major quàm -2. Substituendo autem numerum 3, prodit numerus affirmativus 234. Et similiter in cæteris quantitatibus substituendo numerum 3 pro x prodit semper numerus affirmativus. Id quod ex inspectione solâ colligere licet. Quare numerus -3 transcendit omnes radices negativas. Atque ita habentur limites 2 & -3, inter quos radices omnes consistunt.

Horum verò limitum inventio usui est, tum in reductione æquationum per radices rationales, tum in extractione radicum surdarum ex ipsis; ne fortè radicem extra hos limites aliquando quæramus. Sic in æquatione novissimâ, si radices rationales, siquas fortè habeat, invenire vellem; ex superioribus certum est, has non alias esse posse, quàm divisores ultimi termini æquationis, qui hîc est 120. Proin tentando omnes ejus divisores, si nullus earum, scriptus in æquatione pro radice x, efficeret omnes

nes terminos evanescere; certum est æquationem non admittere radicem, nisi quæ sit surda. At ultimi termini 120, divisores permulti sunt, nimirum 1. – 1.2. – 2.3. – 3.4. – 4.5. – 5.6. – 6.8. – 8.10. – 10.12. – 12.15. – 15.20. – 20.24. – 24.30. – 30.40. – 40.60. – 60.120. & – 120. Et hos omnes divisores tentare, tædio esset. Cognito autem quòd radices inter limites 2 & – 3 consistunt, liberamur à tanto labore. Jam enim non opus erit, divisores tentare, nisi qui sunt inter hos limites; nimirum divisores 1, – 1, & – 2. Nam si horum nullus radix est, certum est æquationem non habere radicem, nisi quæ sit surda. De Surdis Divisoribus.

CAPUT XIX.

Æquationum reductio per divisores surdos.

HActenus reductionem æquationum tradidi, quæ rationales divisores admittunt. Sed antequam æquationem quatuor, sex, aut plurium dimensionum irreducibilem esse concludere possumus, tentandum erit etiam, annon per surdum aliquem divisorem reduci queat; vel, quod perinde est, tentandum erit, annon æquatio ita in duas æquales partes dividi possit, ut ex utràque radix extrahatur. Id autem fiet per sequentem methodum.

Dispone æquationem secundum dimensiones literæ alicujus, ita ut omnes ejus termini sub signis suis conjunctim æquales sint nibilo, & terminus altissimus affirmativo signo afficiatur. Deinde, si æquatio quadratica *sit, (nam & hunc casum ob rei analogiam adjicere lubet) aufer utrobique terminum infimum, & adde quartam partem quadrati cognitæ quantitatis termini medii.*

Ut si æquatio sit $xx-ax-b=0$, aufer utrobique $-b$, & adde $\frac{1}{4}aa$, & emerget $xx-ax+\frac{1}{4}aa=b+\frac{1}{4}aa$, & *extractâ utrobique radice, fiet* $x-\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{b+\frac{1}{4}aa}$; sive $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{b+\frac{1}{4}aa}$.

Quòd si æquatio sit quatuor dimensionum, *sit ea* $x^4+px^3+qxx+rx+s=0$, ubi p, q, r, & s, *denotant cognitas quantitates terminorum æquationis signis propriis adfectas. Fac* $q-\frac{1}{4}pp=\alpha$. $r-\frac{1}{2}\alpha p=\beta$. $s-\frac{1}{4}\alpha\alpha=\zeta$

Dein pone pro n communem aliquem terminorum β & 2ζ *divi-*

 forem

CAPUT XIX. *ſorem integrum, & non quadratum; qui & impar eſſe debet, & per 4 diviſus unitatem relinquere, ſi terminorum p & r alteruter ſit impar. Pone etiam pro k diviſorem aliquem quantitatis $\frac{\beta}{n}$, ſi p ſit par; vel imparis diviſoris dimidium, ſi p ſit impar; vel nihil, ſi dividuum β ſit nihil. Aufer Quotum de $\frac{1}{2}pk$, & reliqui dimidium dic l. Dein pro Q pone $\frac{\alpha+nkk}{2}$, & tenta ſi n dividat $QQ-s$, & Quoti radix ſit rationalis & æqualis l. Si hoc contigerit ad utramque partem æquationis adde $nkkxx+2nklx+nll$, & radicem extrahes utrobique; prodeunte $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}$ in $kx+l$.*

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $x^4+12x-17=0$; & quia p & q hîc deſunt, & r eſt 12, & s eſt -17, ſubſtitutis hiſce numeris fiet $\alpha=0$, $\beta=12$, & $\zeta=-17$; & ipſorum β & 2ζ, ſeu 12 & -34, communis diviſor unicus, nimirum 2, erit n. Porro $\frac{\beta}{n}$ eſt 6, & ejus diviſores 1, 2, 3, & 6 ſucceſſivè tentandi ſunt pro k, & -3, $-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$ pro l reſpectivè. Eſt autem $\frac{\alpha+nkk}{2}$, id eſt kk, æquale Q. Eſt & $\sqrt{\frac{QQ-s}{n}}$, id eſt, $\sqrt{\frac{QQ+17}{2}}=l$. Ubi numeri pares 2 & 6 ſcribuntur pro k, Q fit 4 & 36, & $QQ-s$ numerus erit impar, adeoque dividi non poteſt per n ſeu 2. Quare numeri illi 2 & 6 rejiciendi ſunt. Ubi verò 1 & 3 ſcribuntur pro k, Q fit 1 & 9, & $QQ-s$ fit 18 & 98, qui numeri dividi poſſunt per n, & quotorum radices extrahi. Sunt enim ± 3 & ± 7: quarum tamen ſola -3 congruit cum l. Pono itaque $k=1$, $l=-3$, & $Q=1$; & quantitatem $nkkxx+2nklx+nll$, id eſt $2xx-12x+18$, addo ad utramque partem æquationis; & prodit $x^4+2xx+1=2xx-12x+18$; & extractâ utrobique radice, $xx+1=x\sqrt{2}-3\sqrt{2}$. Quòd ſi radicis extractionem effugere malueris, pone $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$, & invenietur, ut antè, $xx+1=\pm\sqrt{2}\times\overline{x-3}$. Et ex hâc æquatione, ſi radices iterum extrahas, proveniet $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\pm\sqrt{\frac{-1}{2}\mp 3\sqrt{2}}$, *h. e.* ſecundùm ſignorum variationes, $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$, & $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$. Item $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{-3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$; & $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{-3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$. Quæ quidem quatuor ſunt radices æquationis ſub initio propoſitæ, $x^4+12x-17=0$. Sed earum ultimæ duæ ſunt impoſſibiles.

Proponamus

Proponamus jam æquationem $x^4 - 6x^3 - 58xx - 114x - 11 = 0$, De Surdis Divisoribus. & ſcribendo -6, -58, -114, & -11 pro p, q, r, & s reſpectivè, orietur $-67 = \alpha$, $-315 = \beta$, & $-1133\frac{1}{4} = \zeta$. Numerorum β & 2ζ, ſeu -315 & $-\frac{4533}{2}$, communis diviſor eſt unicus 3, adeoque hic erit n; & ipſius $\frac{\beta}{n}$, ſeu -105, diviſores ſunt 3, 5, 7, 15, 21, 35, & 105, qui itaque tentandi ſunt pro k. Quare tento primum 3, & quotum -35, qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, ſeu -105 per 3, ſubduco de $\frac{1}{2}pk$, ſeu -3×3, & reſtat 26; cujus dimidium, 13, eſſe debet l. Sed $\frac{\alpha + nkk}{2}$, ſeu $\frac{-67+27}{2}$, id eſt -20, erit Q, & $QQ - s$ erit 411, qui dividi poteſt per n ſeu 3; ſed quoti 137 radix non poteſt extrahi. Quamobrem rejicio 3, & tento 5 pro k. Quotus qui jam prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, ſeu -105 per 5, eſt -21, & hunc ſubducendo de $\frac{1}{2}pk$ ſeu -3×5, reſtat 6, cujus dimidium 3 erit l. Eſt & Q, ſeu $\frac{\alpha + nkk}{2}$, id eſt $\frac{-67+75}{2}$, numerus 4. Et $QQ - s$, ſeu $16 + 11$ dividi poteſt per n; & Quoti, qui eſt 9, radix extracta 3 congruit cum l. Quamobrem concludo eſſe $l = 3$, $k = 5$, $Q = 4$, & $n = 3$; & ſi $nkkxx + 2nklx + nll$, id eſt $75xx + 90x + 27$ ad utramque partem æquationis addatur, radicem utrobique extrahi poſſe, & prodire $xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n} \times \overline{kx + l}$; ſeu $xx - 3x + 4 = \pm\sqrt{3} \times \overline{5x + 3}$: & extractâ iterum radice $x = \frac{3 \pm 5\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{17 \pm \frac{21\sqrt{3}}{2}}$.

Haud ſecus ſi proponatur æquatio hæcce, $x^4 - 9x^3 + 15xx - 27x + 9 = 0$, ſcribendo -9, $+15$, -27, & $+9$, pro p, q, r, & s reſpectivè, emerget $-5\frac{1}{4} = \alpha$, $-50\frac{5}{8} = \beta$, & $2\frac{7}{64} = \zeta$. Ipſorum β & 2ζ, ſeu $-\frac{405}{8}$ & $\frac{135}{32}$ communes diviſores ſunt 3, 5, 9, 15, 27, 45, & 135; ſed 9 quadratus eſt, & 3, 15, 27, 135 diviſi per numerum 4 non relinquunt unitatem, ut ob imparem terminum p oporteret. His itaque rejectis reſtant ſoli 5 & 45 tentandi pro n. Ponamus primò $n = 5$, & ipſius $\frac{\beta}{n}$, ſeu $-\frac{81}{8}$, diviſores impares dimidiati, nempe $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{2}$, $\frac{81}{2}$, tentandi erunt pro k. Si k ponatur $\frac{1}{2}$, quotus $-\frac{81}{4}$, qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, ſubductus de $\frac{1}{2}pk$, ſeu $-\frac{9}{4}$, relinquit 18 pro $2l$; & $\frac{\alpha + nkk}{2}$, ſeu -2 eſt, Q; &

$QQ - s$,

CAPUT XIX. $QQ-s$, ſeu -5, dividi quidem poteſt per n, ſeu 5; ſed Quoti negativi, -1, radix impoſſibilis eſt, quæ tamen deberet eſſe 9. Quare concludo k non eſſe $\frac{1}{2}$, & tento jam ſi ſit $\frac{3}{2}$. Quotum, qui oritur dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, ſeu $-\frac{81}{8}$ per $\frac{3}{2}$, nempe Quotum $-\frac{27}{4}$, ſubduco de $\frac{1}{2}pk$, ſeu $-\frac{27}{4}$, & reſtat 0. Unde l jam nihil erit. Eſt autem $\frac{\alpha+nkk}{2}$, ſeu 3, æqualis Q, & $QQ-s$ nihil eſt; unde rurſus l, qui hujus $QQ-s$ diviſi per n radix eſt, invenitur nihil. Quamobrem, his ita quadrantibus, concludo eſſe $n=5$, $k=\frac{3}{2}$, $l=0$, & $Q=3$: adeoque addendo ad utramque partem æquationis propoſitæ terminos $nkkxx+2nlkx+nll$ id eſt $\frac{45}{4}xx$, & radicem quadraticam utrobique extrahendo, prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$; id eſt $xx-4\frac{1}{2}x+3=\sqrt{5}\times\frac{3}{2}x$.

Eâdem methodo reducuntur etiam æquationes literales. Ut ſi fuerit $x^4-2ax^3\begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix}xx-2a^3x+a^4=0$, ſubſtituendo $-2a$, $2aa-cc$, $-2a^3$ & $+a^4$ pro p, q, r, & s reſpectivè, obtinebuntur $aa-cc=\alpha$, $-acc-a^3=\beta$, & $\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}aacc-\frac{1}{4}c^4=\zeta$. Quantitatum β & 2ζ diviſor communis eſt $aa+cc$, qui proinde erit n; & $\frac{\beta}{n}$, ſeu $-a$, diviſores habet 1 & a. Sed quia n duarum eſt dimenſionum, & $k\sqrt{n}$ non niſi unius eſſe debet, ideo k nullius erit, adeoque non poteſt eſſe a. Sit ergo $k=1$, & diviſo $\frac{\beta}{n}$ per k, aufer quotum $-a$ de $\frac{1}{2}pk$, ſeu $-a$, & reſtabit nihil pro l. Porro $\frac{\alpha+nkk}{2}$, ſeu aa, eſt Q, & $QQ-s$, ſeu a^4-a^4, nihil eſt; & inde rurſus prodit nihil pro l. Quod arguit quantitates n, k, l, & Q rectè inventas eſſe; & additis ad utramque partem æquationis propoſitæ terminis $nkkxx+2nklx+nll$, id eſt $aaxx+ccxx$, radicem utrobique extrahi poſſe, & extractione illâ prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$; id eſt $xx-ax+aa=\pm x\sqrt{aa+cc}$. Et, extractâ iterum radice, $x=\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+$ vel $-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa\pm\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

Hactenus regulam applicui ad extractionem *radicum ſurdarum:* poteſt tamen eadem ad extractionem etiam *rationalium* applicari, ſi modò pro quantitate n uſurpetur unitas; eoque pacto unâ vice examinare poſſumus, utrùm æquatio, fractis & ſurdis terminis carens, diviſorem aliquem duarum dimenſionum, aut

rationalem aut furdum, admittat. Ut fi æquatio $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0$ proponatur, fubftituendo -1, -5, $+12$, & -6, pro p, q, r, & s refpectivè invenientur $-5\frac{1}{4} = \alpha$, $9\frac{3}{8} = \beta$, & ponendo $n = 1$, Quantitatis $\frac{\beta}{n}$, feu $\frac{75}{8}$, divifores funt 1, 3, 5, 15, 25, 75: quorum dimidia (fiquidem p fit impar) tentanda funt pro k. Et fi pro k tentemus $\frac{5}{2}$, fiet $\frac{1}{2}pk - \frac{\beta}{nk} = -5$, & ejus dimidium $-\frac{5}{2} = l$. Item $\frac{\alpha + nkk}{2} = \frac{1}{2} = Q$, & $\frac{QQ - s}{n} = 6\frac{1}{4}$, cujus radix congruit cum l. De Surdis Divisoribus.

Concludo itaque quantitates n, k, l, Q rectè inventas effe; & additis ad utramque partem æquationis terminis $nkkxx + 2nklx + nll$, id eft $6\frac{1}{4}xx - 12\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{4}$, radicem utrobique extrahi poffe; & extractione illâ prodire $xx + \frac{1}{2}px + Q = \pm\sqrt{n} \times \overline{kx + l}$: id eft, $xx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \pm 1 \times \overline{2\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}}$, feu $xx - 3x + 3 = 0$, & $xx + 2x - 2 = 0$; adeoque per hafce duas æquationes quadraticas, æquationem propofitam quadrato-quadraticam dividi poffe. Sed hujufmodi divifores rationales expeditiùs inveniuntur per aliam methodum fuprà traditam.

Siquando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ multi funt divifores, ita ut omnes pro k tentare moleftum fuerit, poteft eorum numerus citò minui, quærendo omnes divifores quantitatis $\alpha s - \frac{1}{4}rr$. Nam horum alicui, aut imparis alicujus dimidio, debet quantitas Q æqualis effe. Sic in exemplo noviffimo $\alpha s - \frac{1}{4}rr$ eft $-\frac{9}{2}$, è cujus diviforibus 1, 3, 9, aut iifdem dimidiatis, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, aliquis debet effe Q. Quare figillatim tentando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ divifores dimidiatos $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{25}{2}$, & $\frac{75}{2}$ pro k, rejicio omnes qui non efficiunt $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nkk$, feu $-\frac{21}{8} + \frac{1}{2}kk$, id eft Q, effe aliquem è numeris 1, 3, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$. Scribendo autem $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, &c. pro k, prodeunt refpectivè $-\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $+\frac{1}{2}$, $+\frac{51}{2}$, &c. pro Q, è quibus foli $-\frac{3}{2}$ & $\frac{1}{2}$ reperiuntur in prædictis numeris, 1, 3, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, adeoque, cæteris rejectis, aut erit $k = \frac{3}{2}$, & $Q = -\frac{3}{2}$ aut $k = \frac{5}{2}$, & $Q = \frac{1}{2}$. Qui duo cafus examinentur. Atque hactenus de æquationibus *quatuor* dimenfionum.

Si æquatio fex *dimenfionum reducenda eft*, fit ea $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v = 0$, & fac $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$. $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$. $s - \frac{1}{2}p\beta = \gamma$.

$$\gamma - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta. \quad t - \frac{1}{2}\alpha\beta = \eta. \quad v - \frac{1}{4}\beta\beta = \theta.$$
$$\zeta\theta - \frac{1}{4}\eta\eta = \lambda.$$

Dein fumatur pro n, communis aliquis terminorum 2ζ, η, 2θ, divifor

CAPUT XIX. divisor integer, & non quadratus, nec per numerum quadratum, divisibilis, qui etiam per numerum 4 divisus relinquit unitatem; si modò terminorum p, r, t aliquis sit impar. Pro k sumatur divisor aliquis integer quantitatis $\frac{\lambda}{2nn}$, si p sit par, vel divisoris imparis dimidium, si p sit impar, vel nihil si λ nihil sit. Pro Q, quantitas $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}nkk$. Pro l divisor aliquis quantitatis $\frac{Qr-QQp-t}{n}$, si Q sit integer; vel divisoris imparis dimidium, si Q sit fractus denominatorem habens numerum 2; vel nihil, si dividuum istud $\frac{Qr-QQp-t}{n}$ sit nihil. Et pro R quantitas $\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}Qp+nkl$. Dein tenta si $RR-v$ dividi possit per n, & Quoti radix extrahi; & præterea si radix ista æqualis sit tam quantitati $\frac{QR-\frac{1}{2}t}{nl}$ quàm quantitati $\frac{QQ+pR-nll-s}{2nk}$. Si hæc omnia evenerint, dic radicem illam m; & vice æquationis propositæ, scribe hanc $x^3+\frac{1}{2}pxx+Qx+R = \pm\sqrt{n}\times\overline{kxx+lx+m}$. Etenim hæc æquatio, quadrando partes & auferendo utrobique terminos ad dextram, producet æquationem propositam. Quòd si ea omnia in nullo casu evenerint, reductio erit impossibilis, si modò priùs constet, æquationem per divisorem rationalem reduci non posse.

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $x^6-2ax^5+2bbx^4+2abbx^3 \begin{smallmatrix}-2aabb\\+2a^3b\\-4ab^3\end{smallmatrix}\, xx \begin{smallmatrix}+3aab^4\\-a^4bb\end{smallmatrix} = 0$, & scribendo $-2a$, $+2bb$, $+2abb$, $-2aabb+2a^3b-4ab^3$, 0, & $3aab^4-a^4bb$ pro p, q, r, s, t, & v respectivè, prodibunt $2bb-aa=\alpha$. $4abb-a^3=\beta$. $2a^3b+2aabb-4ab^3-a^4=\gamma$. $-b^4+2a^3b+3aabb-4ab^3-\frac{5}{4}a^4=\zeta$. $-\frac{1}{2}a^5+3a^3bb-4ab^4=\eta$. & $-aab^4+a^4bb-\frac{1}{4}a^6=\theta$. Et terminorum 2ζ, η, & 2θ communis divisor est $aa-2bb$, seu $2bb-aa$, perinde ut aa vel $2bb$ majus sit. Sed esto aa majus quàm $2bb$, & $aa-2bb$ erit n. Debet enim n semper affirmativum esse. Porro $\frac{\zeta}{n}$ est $-\frac{5}{4}aa+2ab+\frac{1}{2}bb$; $\frac{\eta}{n}$ est $-\frac{1}{2}a^3+2abb$; & $\frac{\theta}{n}$ est $-\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}aabb$: adeoque $\frac{\zeta}{2n}\times\frac{\theta}{n}-\frac{\eta\eta}{8nn}$ seu, $\frac{\lambda}{2nn}$, est $\frac{1}{8}a^6-\frac{1}{4}a^5b-\frac{1}{8}a^4bb+\frac{1}{2}a^3b^3-\frac{3}{8}aab^4$; cujus divisores sunt 1, a, aa; sed quia $\sqrt{n}\times k$ non nisi unius dimensionis esse potest, & $\sqrt{n}$ unius est, ideo k nullius erit; proinde non nisi numerus esse potest. Quare rejectis a & aa, restat solum 1 pro k. Præterea $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}nkk$ dat nihil pro Q, & $\frac{Qr-QQp-t}{n}$ etiam nihil est; adeoque l, qui ejus divisor esse debet, erit

erit nihil. Denique $\frac{1}{2}r - pQ + nkl$ dat abb pro R. Et $RR - v$ est $-2aab^4 + a^4bb$; quod dividi potest per n, seu $aa - 2bb$, & quoti $aabb$ radix extrahi, & radix illa negativè sumpta, nempe $-ab$, indefinitæ quantitati $\frac{QR - \frac{1}{2}t}{nl}$, seu $\frac{0}{0}$, non est inæqualis; quantitati verò definitæ $\frac{QQ + pR - nll - s}{2nk}$ æqualis est. Quamobrem radix illa $-ab$ erit m; &, loco æquationis propositæ, scribi potest $x^3 + \frac{1}{2}pxx + Qx + R = \sqrt{n} \times \overline{kxx + lx + m}$, i. e. $x^3 - axx + abb = \sqrt{aa - 2bb} \times \overline{xx - ab}$. Cujus conclusionis veritatem probare potes, quadrando partes æquationis inventæ, & auferendo terminos ad dextram ex utrâque pârte. Eâ enim operatione producetur æquatio $x^6 - 2ax^5 + 2bbx^4 + 2abbx^3 - 2aabbxx + 2a^3bxx - 4ab^3xx + 3aab^4 - a^4bb = 0$, quæ reducenda proponebatur.

Si æquatio est octo *dimensionum, sit ea* $x^8 + px^7 + qx^6 + rx^5 + sx^4 + tx^3 + vxx + wx + z = 0$, & fiat $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$. $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$. $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{2}\alpha\alpha = \gamma$. $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$. $v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \varepsilon$. $w - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$. & $z - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta$. Et terminorum 2δ, 2ε, 2ζ, 8η, quære communem divisorem, qui integer sit, & non quadratus, nec per quadratum divisibilis; quique etiam per 4 divisus relinquat unitatem, si modò terminorum alternorum p, r, t, w, aliquis sit impar. Si nullus est ejusmodi divisor communis, certum est æquationem per extractionem surdæ radicis quadraticæ reduci non posse; & si non potest ea ita reduci, vix occurret illarum omnium quatuor quantitatum divisor communis. Opusculum igitur hactenus institutum examinatio quædam est, utrùm æquatio reducibilis sit necne, adeoque, cùm ejusmodi reductiones rarò possibiles sint, finem operi ut plurimùm imponet.

Et simili ratione si æquatio sit decem, duodecim, vel plurium dimensionum, impossibilitas reductionis cognosci potest.

Ut si ea sit $x^{10} + px^9 + qx^8 + rx^7 + sx^6 + tx^5 + vx^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$, faciendum erit $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$, $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$, $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma$, $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$, $v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \varepsilon$, $a - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$, $b - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta$, $c - \frac{1}{2}\gamma\delta = \theta$, $d - \frac{1}{4}\delta\delta = \varkappa$; & quærendus communis divisor terminorum quinque 2ε, 2ζ, 8η, 4θ, $8\varkappa$, qui integer sit & non quadratus; quique etiam per 4 divisus relinquat unitatem, si modò terminorum alternorum p, r, t, a, c aliquis sit impar.

 Sic si *duodecim* dimensionum æquatio sit $x^{12} + px^{11} + qx^{10} + rx^9 + sx^8 + tx^7 + vx^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dxx + ex + f = 0$, faciendum erit $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$, $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$, $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma$, $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$, $v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \varepsilon$, $a - \frac{1}{2}p\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$, $b - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta$, $c - \frac{1}{2}\beta\varepsilon - \frac{1}{2}\gamma\delta = \theta$, $d - \frac{1}{2}\gamma\varepsilon - \frac{1}{4}\delta\delta = \kappa$, $e - \frac{1}{2}\delta\varepsilon = \lambda$, $f - \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon = \mu$; & quærendus communis divisor integer, & non quadratus, terminorum sex 2ζ, 8η, 4θ, 8κ, 4λ, 8μ, qui per 4 divisus relinquat unitatem, si modò terminorum alternorum p, r, t, a, c, e aliquis sit impar.

Atque ita in infinitum progredi licebit, & æquatio proposita semper per extractionem surdæ radicis quadraticæ irreducibilis erit, ubi ejusmodi divisor communis nullus est. Siquando verò ejusmodi divisor n inventus spem faciat futuræ reductionis, potest ea instituti insistendo vestigiis operis, quod in æquatione octo dimensionum subjungimus.

Quære numerum quadratum, cui, per n multiplicato, ultimus æquationis terminus z, sub signo proprio adnexus, quadratum numerum efficit. Id autem expeditè fiet, si ad z, ubi n est par, vel ad $4z$ ubi n est impar, successivè addantur n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, $11n$, & deinceps, donec summa æqualis fiat numero alicui in tabulâ numerorum quadratorum, quam ad manus esse suppono. Et si nullus ejusmodi quadratus numerus priùs occurrit, quàm summæ illius radix quadratica aucta radice quadraticâ excessûs illius summæ supra ultimum æquationis terminum, quadruplo major sit quàm maximus terminorum æquationis propositæ p, q, r, s, t, v, &c. non opus erit rem ultrà tentare. Æquatio enim reduci non potest. Sed si ejusmodi numerus quadratus priùs occurrit, sit ejus radix s, si n est par, vel 2s si n est impar; & $\sqrt{\frac{ss - z}{n}}$ dic b. Debent autem s & b esse numeri integri, si n est par; at si n impar est, possunt esse fracti denominatorem habentes numerum binarium. Et si unus eorum fractus est, alter fractus esse debet. Quod idem de numeris R & m, Q & l, P & k, post inveniendis, observandum est. Et omnes numeri s & b, qui intra præfatum limitem inveniri possunt, in catalogum referendi sunt.

Postea pro k tentandi sunt omnes numeri successivè, qui non efficiunt $nk \pm \frac{1}{2}p$ quadruplo majus quàm maximus terminus æquationis;

quationis; & ponendum eſt in omni caſu $\frac{nkk+\alpha}{2}=$ Q. Dein pro l tentandi ſunt ſucceſſivè numeri omnes, qui non efficiunt $nl \pm$ Q quadruplo majus quàm maximus terminus æquationis: & in omni tentamine ponendum $\frac{-npkk+2\beta}{4}+nkl=$ R. Denique pro m tentandi ſunt ſucceſſivè omnes numeri, qui non efficiunt $nm \pm$ R quadruplo majus quàm maximus terminorum æquationis; & videndum, an in caſu quovis, ſi fiat $s-\text{QQ}-p\text{R}+nll=2\text{H}$, & $\text{H}+nkm=\text{S}$, ſit S aliquis numerorum, qui priùs pro S in catalogum relati erant; & præterea ſi alter numerus ei S reſpondens, qui pro b in eundem catalogum relatus erat, ſit his tribus $\frac{2\text{RS}-w}{2nm}$, $\frac{2\text{QS}+\text{RR}-v-nmm}{2nl}$ & $\frac{p\text{S}+2\text{QR}-t-2nlm}{2nk}$ æqualis. Si hæc omnia in aliquo caſu evenerint, vice æquationis propoſitæ, ſcribenda erit hæcce $x^4+\frac{1}{2}px^3+\text{Q}xx+\text{R}x+\text{S}=\sqrt{n}\times\overline{kx^3+lxx+mx+b}$.

De Surdis Divisoribus.

Exempli gratiâ proponatur æquatio $x^8+4x^7-x^6-10x^5+5x^4-5x^3-10xx-10x-5=0$. Et erit $q-\frac{1}{4}pp=-1-4=-5=\alpha$. $r-\frac{1}{2}p\alpha=-10+10=0=\beta$. $s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=5-\frac{25}{4}=-\frac{5}{4}=\gamma$. $t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=-5+\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}=\delta$. $v-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=-10-\frac{25}{8}=-\frac{105}{8}$. $w-\frac{1}{2}\beta\gamma=-10=\zeta$. $z-\frac{1}{4}\gamma\gamma=-5-\frac{25}{64}=-\frac{345}{64}=\eta$. Ergo 2δ, 2ε, 2ζ, 8η, reſpectivè, ſunt -5, $-\frac{105}{4}$, -20, & $-\frac{345}{8}$, & earum diviſor communis 5; qui per 4 diviſus relinquit 1, perinde ut ob terminum imparem s oportuit. Cùm itaque inventus ſit diviſor communis n, ſeu 5, qui ſpem facit futuræ reductionis, quoniam iſte impar eſt, ad $4z$, ſeu -20, ſucceſſivè addo n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, &c. ſeu 5, 15, 25, 35, 45, &c. & prodeunt − 15. 0. 25. 60. 105. 160. 225. 300. 385. 480. 585. 700. 825. 960. 1105. 1260. 1425. 1600. Ex quibus ſolùm 0. 25. 225, & 1600 quadrati ſunt. Quare horum radices dimidiatæ 0, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, 20, in catalogum referendæ ſunt pro S, & $\sqrt{\frac{\text{SS}-\alpha}{n}}$, id eſt 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, 9, reſpectivè pro b. Sed quia $\text{S}+nb$, ſi ſcribatur 20 pro S & 9 pro b, ſit 65, numerus major quadruplo maximi terminorum æquationis, ideo rejicio 20 & 9, & reliquos ſolùm refero in tabulam, ut ſequitur.

b	1. $\frac{3}{2}$. $\frac{7}{2}$.
S	0. $\frac{5}{2}$. $\frac{15}{2}$.

His ita diſpoſitis, tento pro k numeros omnes, qui non efficiunt $\frac{1}{2}p \pm nk$, ſeu $2 \pm 5k$, majus quadruplo maximi termini æqua-

 tionis

CAPUT XIX. tionis 40; id est numeros, $-8.-7.-6.-5.-4.-3.-2.-1.0.1.2.3.4.5.6.7$, ponendo $\frac{nkk+a}{2}$, seu $\frac{5kk-5}{2}$, id est numeros $\frac{315}{2}.120.\frac{175}{2}.60.\frac{75}{2}.20.\frac{15}{2}.0.-\frac{5}{2}.0.\frac{15}{2}.20.\frac{75}{2}.60.\frac{175}{2}.120$. respectivè pro Q. Imo verò cum $Q \pm nl$, & multò magis Q, non debeat majus esse quàm 40, rejiciendos esse sentio $\frac{315}{2}.120.\frac{175}{2}$ & 60, & qui his respondent $-8.-7.-6.-5.\ 5.\ 6.\ 7$. adeoque solos $-4.-3.-2.-1.0.1.2.3.4$ pro k, & $\frac{75}{2}.20.\frac{15}{2}.0.-\frac{5}{2}.0.\frac{15}{2}.20.\frac{75}{2}$ pro Q respectivè tentandos. Tentemus autem -1 pro k, & 0 pro Q; & in hoc casu, pro l tentandi deinceps erunt successivè omnes numeri, qui non efficiunt $Q \pm nl$ majus quàm 40, id est omnes numeri inter 10 & -10, & pro R respectivè numeri $\frac{2\beta - npkk}{4} + nkl$, seu $-5-5l$ id est $-55.-50.-45.-40.-35.-30.-25.-20.-15.-10.-5.0.5.10.15.20.25.30.35.40.45$, quorum tamen tres priores & ultimum, quia majores quàm 40, negligere licebit. Tentemus autem -2 pro l & 5 pro R; & in hoc casu pro m tentandi præterea erunt omnes numeri, qui non efficiunt $R \pm nm$, seu $5 \pm 5m$, majus quàm 40; id est numeri omnes inter 7 & -9; & videndum, an si ponendo $s - QQ - pR + nll$, id est $5-20+20$, seu $5, = 2H$, sit $H + nkm$, seu $\frac{5}{2} - 5m, = S$: id est, si ex his numeris $\frac{-65}{2}.\frac{-55}{2}.\frac{-45}{2}.\frac{-35}{2}.\frac{-25}{2}.\frac{-15}{2}.\frac{-5}{2}.\frac{5}{2}.\frac{15}{2}.\frac{25}{2}.\frac{35}{2}.\frac{45}{2}.\frac{55}{2}.\frac{65}{2}.\frac{75}{2}.\frac{85}{2}$, aliquis æqualis sit alicui numerorum $0.\pm\frac{5}{2}.\pm\frac{15}{2}$, qui priùs in tabulam pro S relati erant. Et hujusmodi quatuor occurrunt, $-\frac{15}{2}.-\frac{5}{2}.\frac{5}{2}.\frac{15}{2}$, quibus respondent $\pm\frac{7}{2}.\pm\frac{3}{2}.\pm\frac{3}{2}.\pm\frac{7}{2}$ pro b in eâdem tabulâ scripti, ut & $2.1.0.-1$ pro m substituti. Verùm tentemus $-\frac{5}{2}$ pro S, 1 pro m, & $+\frac{3}{2}$ pro b; & fiet $\frac{2RS - vv}{2nm} = \frac{-25+10}{10} = -\frac{3}{2}$, & $\frac{2QS + RR - vv - nmm}{2nl} = \frac{25+10-5}{-20} = -\frac{3}{2}$, & $\frac{pS + 2QR - t - 2nlm}{2nk} = \frac{-10+5+20}{-10} = -\frac{3}{2}$. Quare cùm prodeat omni casu $-\frac{3}{2}$ seu b, concludo numeros omnes rectè inventos esse, adeoque vice æquationis propositæ scribendum esse $x^4 + \frac{1}{2}px^3 + Qxx + Rx + S = \sqrt{n} \times \overline{kx^3 + lxx + mx + b}$, id est $x^4 + 2x^3 + 5x - 2\frac{1}{2} = \sqrt{5} \times \overline{-x^3 - 2xx + x - 1\frac{1}{2}}$. Etenim quadrando partes hujus, producetur æquatio illa octo dimensionum, quæ sub initio proponebatur.

Quòd si tentando casus omnes numerorum, prædicti valores omnes ipsius b nullo in casu inter se consensissent, argumento fuisset, æquationem, per extractionem surdæ radicis quadraticæ, reduci non potuisse.

Deberent

Deberent autem aliqua hîc in operis abbreviationem annotari ; ſed quæ brevitatis cauſâ prætereo, cùm tantarum reductionum perexiguus ſit uſus, & rei poſſibilitatem potiùs quàm praxin commodiſſimam voluerim exponere. Sunt igitur hæ reductiones æquationum per extractionem *ſurdæ radicis quadraticæ*. De Surdis Divisoribus.

Adjungere jam liceret reductiones æquationum per *extractionem ſurdæ radicis cubicæ*, ſed & has, ut quæ perrarò utiles ſint, brevitatis gratiâ prætereo.

Sunt tamen reductiones quædam *cubicarum æquationum* vulgò notæ, quas, ſi penitus præterirem, Lector fortaſſe deſideraret. Proponatur æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$, cujus ſecundus terminus deeſt. Ad hanc enim formam æquationem omnem cubicam reduci poſſe conſtat ex precedentibus. Et ſupponatur x eſſe $= a + b$. Erit $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ (id eſt x^3) $+ qx + r = 0$. Sit $3aab + 3abb$ (id eſt $3abx$) $+ qx = 0$; & erit $a^3 + b^3 + r = 0$. Per priorem æquationem eſt $b = -\frac{q}{3a}$, & cubicè, $b^3 = -\frac{q^3}{27a^3}$. Ergo, per poſteriorem, eſt $a^3 - \frac{q^3}{27a^3} + r = 0$, ſeu $a^6 + ra^3 = \frac{q^3}{27}$; & per extractionem affectæ radicis quadraticæ $a^3 = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$. Extrahe radicem cubicam, & habebitur a. Et ſupra erat $-\frac{q}{3a} = b$, & $a + b = x$. Ergo $a - \frac{q}{3a}$ radix eſt æquationis propoſitæ.

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $y^3 - 6yy + 6y + 12 = 0$. Ad tollendum ſecundum æquationis hujus terminum, ponatur $x + 2 = y$, & orietur $x^3 * - 6x + 8 = 0$; ubi eſt $q = -6$; $r = 8$; $\frac{1}{4}rr = 16$; $\frac{q^3}{27} = -8$; $a^3 = -4 \pm \sqrt{8}$; $a - \frac{q}{3a} = x$; & $x + 2 = y$; id eſt $2 + \sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}}} = y$.

Et hoc modo erui poſſunt radices omnium cubicarum æquationum, ubi q affirmativum eſt ; vel etiam ubi q negativum eſt, & $\frac{q^3}{27}$ non majus quàm $\frac{1}{4}rr$; *id eſt ubi duæ ex radicibus æquationis ſunt impoſſibiles.* At ubi q negativum eſt, & $\frac{q^3}{27}$ ſimul majus quàm $\frac{1}{4}rr$, fit $\sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{q^3}{27}}$ quantitas impoſſibilis; atque adeo æquationis radix x vel y, hoc caſu impoſſibilis erit. Scilicet hoc caſu *tres ſunt radices poſſibiles*, quæ omnes eodem modò ſe habent ad

æquationis

Caput XIX. æquationis terminos q & r, & indifferenter defignantur per literam x vel y, adeoque omnes eâdem deberent lege erui & exprimi, quâ una aliqua eruitur & exprimitur: *fed omnes tres lege præfatâ exprimere impoffibile eft.* Quantitas $a - \frac{q}{3a}$, quâ x defignatur, multiplex effe non poteft, eâque de caufâ Hypothefis quòd x, hoc in cafu ubi triplex eft, æqualis effe poteft binomio $a - \frac{q}{3a}$, feu $a + b$, cujus nominum cubi, $a^3 + b^3$, conjunctim æquentur r, & triplum rectangulum $3ab$ æquetur q, plane impoffibilis eft; & ex hypothefi impoffibili conclufionem impoffibilem colligi, mirum effe non debet.

Eft & alius modus has radices exprimendi. Nimirum de a^3+b^3+r id eft de nihilo, aufer a^3+r, feu $\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$, & reftabit $b^3 = -\frac{1}{2}r \mp \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$. Eft itaque $a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$, & $b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$; vel $a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$, & $b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$; adeoque horum fumma $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$; erit $= x$.

Poffunt etiam æquationum biquadraticarum radices mediantibus cubicis erui & exprimi.

Tollendus eft autem primùm fecundus æquationis terminus. Sit æquatio refultans $x^4 + qxx + rx + s = 0$. Pone hanc multiplicatione duarum, $xx + ex + f = 0$, & $xx - ex + g = 0$, generari; id eft eandem effe cum hâc, $x^4 * \begin{matrix} +f \\ +g \\ -ee \end{matrix} xx \begin{matrix} +eg \\ -ef \end{matrix} x + fg = 0$; &, collatis terminis, fiet $f + g - ee = q$; $eg - ef = r$; & $fg = s$. Quare $q + ee = f + g$; $\frac{r}{e} = g - f$; $\frac{q + ee + \frac{r}{e}}{2} = g$; $\frac{q + ee - \frac{r}{e}}{2} = f$; $\frac{qq + 2eeq + e^4 - \frac{rr}{ee}}{4}$ $(= fg) = s$; &, per reductionem, $e^6 + 2qe^4 \begin{matrix} +qq \\ -4s \end{matrix} ee - rr = 0$. Pro ee fcribe y; & fiet $y^3 + 2qyy \begin{matrix} +qq \\ -4s \end{matrix} y - rr = 0$, æquatio cubica, cujus terminus fecundus tolli poteft, & radix deinceps per regulam præcedentem, vel fecus, extrahi. Dein, habitâ illâ radice, regrediendum erit, ponendo $\sqrt{y} = e$; $\frac{q + ee - \frac{r}{e}}{2} = f$; $\frac{q + ee + \frac{r}{e}}{2} = g$; & æquationes duæ, $xx + ex + f = 0$, & $xx - ex + g = 0$,

$+g=0$, extractis earum radicibus, dabunt quatuor radices æquationis biquadraticæ, $x^4+qxx+rx+s=0$; nimirum $x=-\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}ee-f}$, & $x=\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}ee-g}$. Ubi notandum eſt, quòd ſi æquationis biquadraticæ radices quatuor poſſibiles ſunt, æquationis cubicæ, $y^3+2qyy{+qq \atop -4s}y-rr=0$, radices tres poſſibiles erunt; atque adeo per regulam præcedentem extrahi nequeunt. *Sic & ſi æquationis quinque, vel plurium, dimenſionum radices affectæ in radices non affectas, mediis æquationis terminis quoque pacto ſublatis, convertantur; illa radicum expreſſio ſemper erit impoſſibilis, ubi plures quàm una radix, in æquatione imparium dimenſionum, poſſibiles ſunt, aut plures quàm duæ, in æquatione parium dimenſionum, quæ per extractionem ſurdæ radicis quadraticæ, methodo ſuprà expoſitâ, reduci nequeunt.* De Surdis Divisoribus.

Docuit *Carteſius* æquationem biquadraticam per regulas ultimò traditas reducere. *E.g.* proponatur æquatio à nobis ſuprà reducta, $x^4-x^3-5xx+12x-6=0$. Tolle ſecundum terminum, ſcribendo $v+\frac{1}{4}$ pro x, & orietur $v^4-\frac{43}{8}vv+\frac{75}{8}v-\frac{851}{256}=0$. Ad tollendas fractiones ſcribe $\frac{1}{4}z$ pro v, & orietur $z^4-86zz+600z-851=0$. Hîc eſt $-86=q$; $600=r$; & $-851=s$; adeoque $y^3+2qyy{+qq \atop -4s}y-rr=0$, ſubſtitutis æquipollentibus, fiet $y^3-172yy+10800y-360000=0$. Ubi tentando omnes ultimi termini diviſores $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5$, & deinceps uſque ad 100, invenietur tandem $y=100$. Quod idem multo expeditiùs, per methodum à nobis ſuprà expoſitam, inveniri potuit. Dein habito y, radix ejus 10 erit e, & $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}$, id eſt $\frac{-86+100-60}{2}$, ſeu -23, erit f; & $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}$, ſeu 37, erit g; adeoque æquationes, $xx+ex+f=0$, & $xx-ex+g=0$, ſcripto z pro x, & ſubſtitutis æquipollentibus, evadent $zz+10z-23=0$, & $zz-10z+37=0$. Reſtitue v pro $\frac{1}{4}z$, & orientur $vv+2\frac{1}{2}v-\frac{23}{16}=0$, & $vv-2\frac{1}{2}v+\frac{37}{16}=0$. Reſtitue inſuper $x-\frac{1}{4}$ pro v, & emergent $xx+2x-2=0$, & $xx-3x+3=0$; æquationes duæ, quarum radices quatuor, $x=-1\pm\sqrt{3}$, & $x=1\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}$, eædem ſunt cum radicibus quatuor æquationis biquadraticæ ſub initio propoſitæ, $x^4-x^3-5xx+12x-6=0$. Sed hæ facilius, per methodum inveniendi diviſores à nobis ſuprà explicatam, inveniri potuerunt.

APPENDIX.

ÆQUATIONUM

CONSTRUCTIO LINEARIS.

HActenus æquationum proprietates, transmutationes, limites & omnis generis reductiones, docui. Demonstrationes non semper adjunxi, quoniam satis faciles mihi visæ sunt, & nonnunquam, absque nimiis ambagibus, tradi non possent. Restat jam tantùm, ut æquationum, postquam ad formam commodissimam reductæ sunt, radices in numeris extrahere doceam. Et hîc præcipua difficultas est, in figuris duabus vel tribus prioribus obtinendis. Id quod commodissimè per æquationis constructionem aliquam, seu Geometricam, sive Mechanicam, consit. Quâ de causâ non pigebit hujusmodi constructiones aliquas subjungere.

Veteres, ut ex Pappo discimus, trisectionem anguli, & inventionem duarum mediè proportionalium, sub initio per rectam lineam & circulum, frustrà aggressi sunt. Postea considerare cœperunt alias permultas lineas, ut Conchoidem, Cissoidem, & Conicas sectiones, & per harum aliquas solverunt Problemata. Tandem repenitius examinatâ, & Conicis sectionibus in Geometriam receptis, Problemata distinxerunt in tria genera: *Plana* quæ per lineas a plano originem derivantes, Rectam nempe & Circulum solvi possint; *Solida*, quæ per lineas ortum à solidi, id est Coni, consideratione derivantes, solvebantur; & *Linearia*, ad quorum solutionem requirebantur lineæ magis compositæ. Et juxta hanc distinctionem, problemata solida per alias lineas quàm Conicas sectiones solvere à Geometriâ alienum est; præsertim si nullæ aliæ lineæ præter rectam, circulum, & Conicas sectiones in Geometriam recipiantur. At Recentiores longiùs progressi receperunt lineas omnes in Geometriam, quæ per æquationes exprimi possunt, & pro dimensionibus æquationum distinxerunt lineas illas in genera, legemque tulerunt, non licere Problema per lineam superioris generis construere, quod construi potest per lineam inferioris. In lineis contemplandis, & eruendis earum proprietatibus, distinctionem earum in genera, juxta dimensiones æquationum, per quas

ÆQUATIONUM CONSTRUCTIONES.

quas definiuntur, laudo. At æquatio non eſt, ſed deſcriptio, quæ curvam Geometricam efficit. Circulus linea Geometrica eſt, non quòd per æquationem exprimi poteſt; ſed quòd deſcriptio ejus poſtulatur. Æquationis ſimplicitas non eſt, ſed deſcriptionis facilitas, quæ lineam ad conſtructiones Problematum priùs admittendam eſſe indicat. Nam æquatio ad Parabolam ſimplicior eſt, quàm æquatio ad circulum; & tamen circulus, ob ſimpliciorem deſcriptionem, priùs admittitur. Circulus & Coni ſectiones, ſi æquationum dimenſiones ſpectentur, ejuſdem ſunt ordinis; & tamen circulus, in conſtructione problematum, non connumeratur cum his, ſed ob ſimplicem deſcriptionem deprimitur ad ordinem inferiorem lineæ rectæ; ita ut per circulum conſtruere, quod per rectas conſtrui poteſt, non ſit illicitum; per Conicas verò ſectiones conſtruere, quod per circulum conſtrui poteſt, vitio vertatur. Aut igitur legem à dimenſionibus æquationum in circulo obſervandam eſſe ſtatue, & ſic diſtinctionem inter problemata plana & ſolida ut vitioſam tolle; aut concede, legem illam in lineis ſuperiorem generum non ita obſervandam eſſe, quin aliquæ, ob ſimpliciorem deſcriptionem, præferantur aliis ejuſdem ordinis, &, in conſtructione Problematum, cum lineis inferiorum ordinum connumerentur. In conſtructionibus quæ ſunt æquè Geometricæ, præferendæ ſemper ſunt ſimpliciores. Hæc lex omni exceptione major eſt. Ad ſimplicitatem verò conſtructionis expreſſiones Algebraicæ nil conferunt. Solæ deſcriptiones linearum hîc in cenſum veniunt. Has ſolas conſiderabant Geometræ, qui circulum conjungebant cum rectâ. Prout hæ ſunt faciles, vel difficiles, conſtructio facilis vel difficilis redditur. Adeòque à rei naturâ alienum eſt, leges conſtructionibus aliunde præſcribere. Aut igitur lineas omnes præter rectam & circulum, & fortè Conicas ſectiones, è Geometriâ cum Veteribus excludamus, aut admittamus omnes ſecundum deſcriptionis ſimplicitatem. Si Trochoides in Geometriam reciperetur, liceret ejus beneficio angulum in datâ ratione ſecare. Numquid ergo reprehenderes, ſiquis hâc lineâ ad dividendum angulum in ratione numeri ad numerum uteretur, & contenderes, hanc lineam per æquationem non definiri, lineas verò quæ per æquationes definiuntur adhibendas eſſe? Igitur ſi an-

APPENDIX. gulus *e.g.* in 10001 partes dividendus esset, teneremur curvam lineam æquatione plusquam centum dimensionum definitam in medium afferre, quam tamen nemo mortalium describere, nedum intelligere, valeret; & hanc anteponere Trochoidi, quæ linea notissima est, & per motum rotæ, vel circuli, facillimè describitur. Quod quàm absurdum sit quis non videt? Aut igitur Trochoides in Geometriam non est admittenda, aut, in constructione Problematum, curvis omnibus difficilioris descriptionis anteferenda. Et eadem est ratio de reliquis curvis. Quo nomine trisectiones anguli per Conchoidem, quas *Archimedes* in Lemmatis & *Pappus* in collectionibus posuere, præ aliorum hàc de re inventis omnibus laudamus; siquidem lineas omnes præter rectam & circulum è Geometriâ excludere debeamus, aut secundum descriptionis simplicitatem admittere, & Conchoides, simplicitate descriptionis, nulli curvæ præter circulum cedit. Æquationes sunt expressiones computi Arithmetici, & in Geometriâ locum propriè non habent, nisi quatenus quantitates verè Geometricæ (id est lineæ, superficies, solida & proportiones) aliquæ aliis æquales enunciantur. Multiplicationes, Divisiones, & ejusmodi computa in Geometriam recèns introducta sunt; idque inconsultò, & contra primum institutum scientiæ hujus. Nam qui constructiones Problematum per rectam & circulum, à primis Geometris adinventas, considerabit, facilè sentiet, Geometriam excogitatam esse, ut expedito linearum ductu effugeremus computandi tædium. Proinde hæ duæ scientiæ confundi non debent. Veteres tam sedulò distinguebant eas ab invicem, ut in Geometriam terminos Arithmeticos nunquam introduxerint. Et recentes, utramque confundendo, amiserunt simplicitatem, in quâ Geometriæ elegantia omnis consistit. Est itaque *Arithmeticè* quidem simplicius quod per simpliciores æquationes determinantur; at *Geometricè* simplicius est, quod per simpliciorem ductum linearum colligitur; & in Geometriâ prius & præstantius esse debet, quod est ratione Geometricâ simplicius. Mihi igitur vitio vertendum non erit, si cum Mathematicorum Principe *Archimede*, aliisque Veteribus, Conchoidem ad Solidorum problematum constructionem adhibeam. Attamen siquis aliter senserit, sciat me hic de constructione non Geometricâ, sed qualicunque, sollicitum esse, quâ

2 radices

radices æquationum in numeris proximè assequar. Cujus rei gratiâ præmitto hoc Problema Lemmaticum. ÆQUATIONES CONSTRUCTIONES.

Inter datas duas lineas, AB, AC, *rectam datæ longitudinis,* BC, *ponere quæ producta transeat per datum punctum* P.

SI circa polum P gyret linea BC, & simul termino ejus C incedat super rectâ AC, ejus alter terminus B describet Conchoidem Veterum. Secet hæc lineam AB in puncto B. Junge PB, & ejus pars BC erit recta quam ducere oportuit. Et eâdem lege linea BC duci potest, ubi vice rectæ AC linea aliqua curva adhibetur.

Sicui constructio hæcce per Conchoidem minùs placeat, potest alia per Conicam sectionem ejus vice substitui. A puncto P ad rectas AD, AE age PD, PE constituentes parallelogrammum EADP, & à punctis C ac D ad rectam AB demitte perpendicula CF, DG, ut & à puncto E ad rectam AC versus A productam perpendiculum EH; & dictis $AD = a$. $PD = b$. $BC = c$. $AG = d$. $AB = x$, & $AC = y$. Erit AD. AG :: AC. AF, adeoque $AF = \frac{dy}{a}$. Erit & AB. AC :: PD. CD, seu $x.y :: b.a-y$. Ergo $by = ax - yx$, quæ æquatio est ad Hyperbolam. Rursus per 13. II. *Elem.* erit $BCq = ACq + ABq - 2FAB$, id est $cc = yy + xx - \frac{2dxy}{a}$. Prioris æquationis partes ductas in $\frac{2d}{a}$ aufer de partibus hujus, & restabit $cc - \frac{2bdy}{a} = yy + xx - 2dx$, æquatio ad circulum, ubi x & y ad rectos sunt angulos. Quare si hasce duas lineas, Hyperbolam & Circulum, ope harum æquationum componas, earum intersectione habebis x & y, seu AB & AC, quæ positionem rectæ BC determinant. Componentur autem lineæ illæ ad hunc modum.

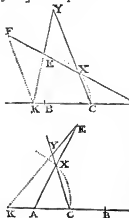
Duc rectas duas quasvis KL æqualem AD, & KM æqualem PD continentes angulum rectum MKL. Comple parallelogrammum KLMN, & asymptotis LN, MN per punctum K describe Hyperbolam IKX.

In

APPENDIX.

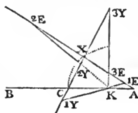
In KM verſus K productâ cape KP æqualem AG & KQ æqualem BC. Et in KL productâ verſus K cape KR æqualem AH, & RS æqualem RQ. Comple parallelogrammum PKRT, & centro T intervallo TS deſcribe circulum. Secet hic Hyperbolam in puncto X. Ad KP demitte perpendiculum XY, & erit XY æqualis AC & KY æqualis AB. Quæ duæ lineæ AC & AB, vel una earum cum puncto P, determinant poſitionem quæſitam rectæ BC. Cui conſtructioni demonſtrandæ, & ejus caſibus ſecundum caſus Problematis determinandis non immoror.

Hâc, inquam, conſtructione ſolvi poteſt Problema ſicui ita viſum ſit. Sed hæc ſolutio magis compoſita eſt quàm ut uſibus ullis inſervire poſſit. Nuda ſpeculatio eſt, & ſpeculationes Geometricæ tantum habent elegantiæ quantum ſimplicitatis, tantumque laudis merentur quantum utilitatis ſecum afferunt. Eâ de causâ conſtructionem per Conchoidem præfero ut multo ſimpliciorem, & non minùs Geometricam; & quæ reſolutioni æquationum à nobis propoſitæ optimè conducit. Præmiſſo igitur præcedente Lemmate conſtruimus Geometricè Problemata cubica, & quadrato-quadratica [*utpote quæ ad cubica reduci poſſunt*] ut ſequitur.



Proponatur æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$. *cujus terminus ſecundus deeſt, tertius verò ſub ſigno ſuo deſignatur per* $+q$ *&* *quartus per* $+r$.

Duc quamlibet KA quam dic n. In KA utrinque productâ cape $KB = \frac{q}{n}$, ad eaſdem partes cum KA ſi habeatur $+q$, aliter ad contrarias. Biſeca BA in C, & centro K radio KC fac circulum CX, cui inſcribe rectam CX æqualem $\frac{r}{nn}$, & produc eam utrinque. Dein junge AX, & produc eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX inſcribe EY ejuſdem longitudinis



gitudinis cum CA, quæque producta transfeat per punctum K, & XY erit radix æquationis. Et ex his radicibus affirmativæ erunt quæ cadunt ad partes X versus C, & negativæ quæ cadunt ad partes contrarias, si habeatur $+r$, & contrò si habeatur $-r$. *Æquationum Constructiones.*

Demonstratio.

Ad demonstrationem præmittimus Lemmata sequentia.

LEM. I. *Est* YX *ad* AK *ut* CX *ad* KE. Etenim age KF parallelam CX, & ob similia triangula ACX, AKF, & EYX, EKF, erit AC ad AK ut CX ad KF; & YX ad YE, seu AC, ut KF ad KE; adeóque ex æquo perturbatè YX ad AK ut CX ad KE. Q. E. D.

LEM. II. *Est* YX *ad* AK *ut* CY *ad* AK + KE. Nam componendo est YX ad AK ut YX + CX, id est CY ad AK + KE. Q. E. D.

LEM. III. *Est* KE − BK *ad* YX *ut* YX *ad* AK.

Nam per 12 II. *Elem.* est $YKq - CKq = CYq - CY \times CX = CY \times YX$; hoc est, si Theorema resolvatur in proportionem, CY ad YK − CK ut YK + CK ad YX. Sed est $YK - CK = YK - YE + CA - CK = KE - BK$. Et $YK + CK = YK - YE + CA + CK = KE + AK$. Adeoque est CY ad KE − BK ut KE + AK ad YX. Sed per *Lemma secundum* erat CY ad KE + AK ut YX ad AK. Ergo ex æquo est YX ad KE − BK ut AK ad YX. Seu KE − BK ad YX ut YX ad AK. Q. E. D.

His præmissis demonstrabitur Theorema ut sequitur. In *primo Lemmate* erat YX ad AK ut CX ad KE, seu $KE \times YX = AK \times CX$. In *tertio* erat KE − BK ad YX ut YX ad AK. Unde, si prioris rationis termini ducantur in YX, fiet $KE \times YX - BK \times YX$ ad YXq ut YX ad AK, id est $AK \times CX - BK \times YX$ ad YXq ut YX ad AK; & ductis extremis & mediis in se $AKq \times CX - AK \times BK \times YX = YX$ *cub.* Denique pro YX, AK, BK, & CX restitutis x, n, $\frac{q}{n}$, & $\frac{r}{nn}$ orietur $r - qx = x^3$. Q. E. D. Quod verò ad signorum variationes attinet, istis secundum casus Problematum determinandis non immoror.

Proponatur jam æquatio cujus tertius terminus deest $x^3 + pxx + r = 0$. Et ad ejus constructionem assumpto quolibet n, cape in rectâ aliquâ longitudines duas $KA = \frac{r}{nn}$, & $KB = p$; idque ad easdem partes si

r & p

APPENDIX. r & p habeant eadem signa, aliter ad contrarias. Biseca BA in C, & centro K radio KC describe circulum cui, inscribe CX æqualem n, & produc eam utrinque. Item junge AK, & produc eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX inscribe EY ejusdem longitudinis cum CA, ita ut ea si producatur transeat per K, & KE erit radix æquationis. Radices autem affirmativæ sunt ubi punctum Y cadit à parte puncti X versus C, & negativæ ubi punctum Y cadit ad alteras partes puncti X; si modò habeatur $+r$, & contrà si habeatur $-r$.

Ad hujus Propositionis demonstrationem Schemata & Lemmata de priori propositione mutuò sumantur, & *Demonstratio* erit ut sequitur.

Per *Lemma* 1, erat YX ad AK ut CX ad KE, seu $YX \times KE = AK \times CX$; & per *Lemma* 3, $KE - KB$ ad YX ut YX ad AK, aut (sumpto KB ad contrarias partes) $KE + KB$ ad YX ut YX ad AK; adeóque $KE + KB$ in KE ad $YX \times KE$, seu $AK \times CX$, ut YX ad AK, seu CX ad KE. Quare ductis extremis & mediis in se, est KE *cub.* $+ KB \times KEq = AK \times CXq$, & ipsarum KE, KB, AK, & CX restitutis valoribus suprà assignatis, $x^3 + pxx = r$.

Proponimus jam æquationem trium dimensionum $x^3 + pxx + qx + r = 0$, *nullo termino carentem, & cujus tres radices non sunt omnes affirmativæ, neque omnes negativæ.*

Et primò si terminus q *negativus* est, in rectâ aliquâ KB capiantur longitudines duæ $KA = \frac{r}{q}$, & $KB = p$, idque ad easdem partes puncti K si p & $\frac{r}{q}$ habent signa diversa; aliter ad contrarias. Biseca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale radici quadraticæ termini q: Et inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum, inscribatur recta EY, quæ æqualis sit rectæ AC, & producta transeat per punctum K, atque KE erit radix æquationis; quæ quidem affirmativa erit si punctum X cadat inter puncta A & E, negativa verò si punctum E cadat ad partes puncti X versus A.

Quòd si terminus q *affirmativus* est, in rectâ KB capiantur longitudines illæ duæ

KA =

KA $=\sqrt{\frac{-r}{p}}$, & KB $=\frac{q}{KA}$, idque ad easdem partes puncti K, si $\sqrt{\frac{-r}{p}}$ & $\frac{q}{KA}$ habent signa diversa; aliter ad contrarias: Biseca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale termino p: & inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum, inscribatur recta EY quæ æqualis sit rectæ AC, & producta transeat per punctum K, atque XY erit radix æquationis; quæ quidem negativa erit si punctum x cadat inter puncta A & F, affirmativa verò si punctum Y cadat ad partes puncti X versus punctum C.

Æquationum Constructiones.

Demonstratio casûs prioris.

Per *Lemma primum* erat KE ad CX ut AK ad YX, & ita (componendo) est KE + AK, id est KY + KC ad CX + YX, id est CY. Sed in triangulo rectangulo KCY est YCq æquale YKq − KCq, id est æquale KY + KC in KY − KC, & resolvendo terminos æquales in proportionales, KY+KC ad CY ut CY ad KY−KC, seu KE+AK ad CY ut CY ad EK−KB. Quare cùm in hâc proportione fuerit KE ad CX; duplicetur proportio, & erit KEq ad CXq ut KE+AK ad KE−KB; & ductis extremis & mediis in se KE *cub.* −KB×KEq = CXq×KE+CXq×AK. Et restitutis valoribus suprà assignatis $x^3-pxx=qx+r$.

Demonstratio casûs secundi.

Per *Lemma primum* est KE ad CX ut AK ad YX, ductisque extremis & mediis in se, fit KE×YX=CX×AK. Scribe ergo in superioribus KE×YX pro CX×AK, & fiet KE *cub.* −KB×KEq = CXq×KE + CX × KE × YX. Et applicatis omnibus ad KE erit KEq − KB × KE = CXq+CX×YX: ductisque omnibus in AK, habebitur AK×KEq− AK×KB×KE = AK×CXq+AK×CX×YX: Ac rursus scripto KE × YX pro CX×AK, fiet AK×KEq−AK×KB×KE = KE×YX×CX+KE×YXq: & applicatis omnibus ad KE orietur AK×KE−AK×KB = YX×CX+ YXq: ductisque omnibus in YX emerget AK×KE×YX−AK×KB×YX = YXq × CX + YX *cub.* Et pro KE × YX scriptis in primo termino CX×AK, fiet CX×AKq−AK×KB×YX = CX×YXq+YX *cub.* seu quod perinde est YX *cub.* +CX×YXq+AK×KB×YX−CX×AKq = 0. Atque pro YX, CX, AK & KB substitutis valoribus suprà assignatis x, p, $\sqrt{\frac{-r}{p}}$, $q\sqrt{\frac{p}{-r}}$ emerget tandem $x^3+pxx+qx+r=0$, æquatio construenda.

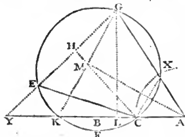
Solvuntur

Appendix.

Solvuntur etiam hæ æquationes ducendo rectam lineam datæ longitudinis inter circulum & aliam rectam positione datos, eâ lege ut recta illa ducta convergat ad punctum datum.

Proponatur enim æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$, *cujus terminus secundus deest.*

Duc rectam KA ad arbitrium. Eam dic n. In KA utrinque productâ cape $KB = \frac{q}{n}$, idque ad easdem partes puncti K cum lineâ KA si modò habeatur $-q$, aliter ad diversas. Biseca BA in C, & centro A intervallo AC describe circulum CX. Ad hunc apta lineam rectam $CX = \frac{r}{nn}$, & per puncta K, C, & X describe circulum KCXG. Junge AX, & junctam produc donec ea iterum secet circulum ultimò descriptum KCXG in puncto G. Denique inter hunc ultimò descriptum circulum & rectam KC utrinque productam inscribe rectam EY ejusdem longitudinis cum rectâ AC; ita ut ea convergat ad punctum G. Et acta recta EC erit una ex radicibus æquationis. Radices autem affirmativæ sunt quæ cadunt in majori circuli segmento KGC, & negativæ quæ in minori KFC si habeatur $-r$; & contrà si habeatur $+r$ affirmativæ in minori segmento KFC, negativæ in majori KGC reperientur.



Ad hujus verò constructionis demonstrationem præmittimus Lemmata sequentia.

LEM. I. *Positis quæ in constructione superiore, est* CE *ad* KA *ut* CE + CX *ad* AY, *&* CX *ad* KA.

Nam rectâ KG ductâ, est AC ad AK ut CX ad KG, idque ob similia triangula ACX, AKG. Sunt etiam triangula YEC, YKG similia: quippe quæ communem habent angulum ad Y, & angulos ad G & C in eodem circuli KCG segmento EGCK, atque adeo æquales. Inde fit CE ad EY ut KG ad KY, id est CE ad AC ut KG ad KY, eò quòd EY & AC juxta Hypothesin æquantur. Collata autem hacce cum superiore proportionalitate colligitur ex æquo perturbatè, quòd sit CE ad KA ut CX ad KY, & vicissim CE ad CX ut

KA

KA ad KY. Unde componendo fit CE+CX ad CX ut KA+KY ad KY, id est ut AY ad KY, & viciffim CE+CX ad AY ut CX ad KY hoc eft ut CE ad KA. Q. E. D. Æquationum Constructiones.

LEM. II. *Demiſſo ad lineam* GY *perpendiculo* CH, *fiet rectangulum* 2HEY *æquale rectangulo* CE×CX.

Nam demiffo etiam ad lineam AY perpendiculo GL, triangula KGL, ECH rectos habentia angulos ad L & H, & angulos ad K & E in eodem circuli CGK fegmento CKEG, adeoque æquales, æquiangula funt & proinde fimilia. Eft ergo KG ad KL ut EC ad EH. Porro, à puncto A ad lineam KG demiffo perpendiculo AM, ob æquales AK, AG bifecabitur KG in M, & triangula KAM KGL ob angulum ad K communem, & angulos ad M & L rectos fient fimilia: & inde eft AK ad KM ut KG ad KL. Sed ut eft AK ad KM ita eft 2AK ad 2KM feu KG, & ita (ob fimilia triangula AKG, ACX) eft 2AC ad CX; & (ob æquales AC & EY) ita eft 2EY ad CX. Ergo eft 2EY ad CX ut KG ad KL. Sed erat KG ad KL ut EC ad EH, ergo eft 2EY ad CX ut EC ad EH, atque adeo rectangulum 2HEY (ductis nimirum extremis & mediis in fe) æquale eft rectangulo EC×CX. Q. E. D.

Affumpfimus hic lineas AK, AG æquales effe. Nimirum rectangula CAK, XAG (per *Corol. Prop.* 36. *lib.* III. *Elem.*) æqualia funt, atque adeo ut CA eft ad XA ita AG eft ad AK. Sed CA, XA æquales funt per Hypothefin; ergo & AG, AK.

LEM. III. *Conſtructis omnibus ut ſupra, tres lineæ* BY, CE, KA, *ſunt continue proportionales.*

Nam (per *Prop.* 12. *lib.* II. *Elem.*) eft $CYq = EYq + CEq + 2EY \times EH$. Et ablato utrinque EYq fit $CYq - EYq = CEq + 2EY \times EH$. Sed $2EY \times EH$ (per *Lem.* 2.) æquale eft rectangulo $CE \times CX$, & addito utrinque CEq fit $CEq + 2EY \times EH = CEq + CE \times CX$. Ergo $CYq - EYq$ æquale eft $CEq + CE \times CX$, id eft $CY + EY$ in $CY - EY$ æquale eft $CEq + CE \times CX$. Et refolutis æqualibus rectangulis in latera proportionalia fit $CE + CX$ ad $CY + EY$ ut $CY - EY$ ad CE. Sunt autem tres lineæ EY, CA, CB æquales, & inde $CY + EY = CY + CA = AY$, & $CY - EY = CY - CB = BY$. Scribantur itaque AY pro $CY + EY$, & BY pro $CY - EY$, & fiet $CE + CX$ ad AY ut BY ad CE. Sed *(per Lem.* 1.) eft CE ad KA ut $CE + CX$ ad AY, ergo eft CE ad KA ut BY ad CE, hoc eft lineæ tres BY, CE, KA, funt continue proportionales. Q. E. D.

APPENDIX. Tandem ope horum Lemmatum conſtructio ſuperioris Problematis ſic *demonſtratur.*

Per Lemma I. eſt CE ad KA ut CX ad KY, adeoque $KA \times CX = KY \times CE$, & applicatis his æqualibus extremorum & mediorum rectangulis ad CE ſit $\frac{KA \times CX}{CE} = KY$. His lateribus æqualibus adde BK & æqualia erunt $BK + \frac{KA \times CX}{CE}$ & BY. Unde per *Lemma tertium* eſt $BK + \frac{KA \times CX}{CE}$ ad CE ut CE ad KA, & inde, ductis extremis & mediis in ſe provenit CE*q* æquale $BK \times KA + \frac{KAq \times CX}{CE}$, & omnibus præterea ductis in CE fit CE *cub.* æquale $BK \times KA \times CE + KAq \times CX$. CE erat radix æquationis dicta x, KA erat n, KB $\frac{q}{n}$, & CX $\frac{r}{nn}$. His pro CE, KA, KB, & CX ſubſtitutis oritur $x^3 = qx + r$, ſeu $x^3 - qx - r = 0$, æquatio conſtruenda; ubi q & r negativa prodeunt ſumptis KA & KB ad eaſdem partes puncti K, & radice affirmativa in majori ſegmento CGK exiſtente. Hic *unus caſus* eſt Conſtructionis demonſtrandæ. Ducatur KB ad partes contrarias, id eſt, mutetur ſignum ejus ſeu ſignum ipſius $\frac{q}{n}$, vel quod perinde eſt, ſignum termini q, & habebitur conſtructio æquationis $x^3 + qx - r = 0$: *Qui caſus eſt alter.* In his caſibus CX, & radix affirmativa CE cadunt ad eaſdem partes lineæ AK. Cadant CX & radix negativa ad eaſdem mutato ſigno ipſius CX ſeu $\frac{r}{nn}$ vel (quod perinde eſt) ſigno ipſius r, & habebitur *caſus tertius* $x^3 + qx + r = 0$, ubi radices omnes ſunt negativæ. Et mutato rurſus ſigno ipſius KB ſeu $\frac{q}{n}$ vel ſolius q, incidetur in *caſum quartum* $x^3 - qx + r = 0$. Quorum omnium caſuum conſtructiones percurrere licebit, & ſigillatim demonſtrare ad modum caſus primi. Nos uno caſu demonſtrato cæteros leviter attingere ſatis eſſe putavimus. Hi verbis iiſdem mutato ſolum linearum ſitu demonſtrantur.

Conſtruenda jam ſit æquatio cubica $x^3 + pxx * \div r = 0$, *cujus tertius terminus deeſt.*

In figura ſuperiore aſſumpta longitudine quavis n, capias in recta quavis infinita AY, KA, & KB quarum KA valeat $\frac{r}{nn}$, & KB valeat p. Has cape ad eaſdem partes puncti K, ſi modo ſigna terminorum p & r ſint eadem, ſecus ad contrarias. Biſeca BA in C, & centro

& centro K intervallo KC describe circulum CXG. In eo aptes rectam CX, æqualem longitudini assumptæ n. Junge AX & producjunctam ad G ita ut fiat AG æqualis AK, & per puncta K, C, X, G, describe circulum. Denique inter hunc circulum & rectam KC utrinque productam inscribe rectam EY ejusdem longitudinis cum recta AC ea lege ut hæc inscripta recta transeat per punctum G si modo ipsa producatur: & acta recta KY erit una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ cadunt ad partes puncti K versus punctum A si modo habeatur $+r$; sin habeatur $-r$, affirmativæ sunt quæ cadunt ad partes contrarias. Et si affirmativæ radices jacent ex una parte puncti A, negativæ sunt quæ jacent ex altera. Æquationum Constructiones.

Demonstratur autem hæc constructio ope Lemmatum trium novissimorum in hunc modum.

Per *Lemma tertium* sunt BY, CE, KA continue proportionales; & per *Lemma primum* ut est CE ad KA ita est CX ad KY. Ergo BY est ad CE ut CX ad KY. BY idem est quod KY−KB. Ergo KY−KB est ad CE ut CX ad KY. Sed ut est KY−KB ad CE ita est KY−KB in KY ad CE in KY, idque per *Prop.* 1. *lib.* VI. *Elem.* & ob proportionales CE ad KA ut CX ad KY est CE in KY æquale KA in CX. Ergo KY−KB in KY est ad KA in CX (ut KY−KB ad CE, hoc est) ut CX ad KY. Et ductis extremis & mediis in se invicem fit KY−KB in KYq æquale KA in CXq: id est KY *cub.* −KB×KY *quad.* æquale KA×CX *quad.* Erat autem in constructione, KY radix æquationis dicta x, KB æqualis p, KA æqualis $\frac{r}{nn}$, & CX æqualis n. Scribantur igitur x, p, $\frac{r}{nn}$, & n pro KY, KB, KA, & CX respective, & fiet $x^3-pxx=r$, seu $x^3-pxx-r=0$.

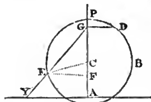
Resolvi potest constructio demonstranda in hasce quatuor æquationum casus, $x^3-pxx-r=0$, $x^3-pxx+r=0$, $x^3+pxx-r=0$, & $x^3+pxx+r=0$. Casum primum jam demonstratum dedi, cæteri tres iisdem verbis mutato tantum linearum situ demonstrantur. Nimirum uti sumendo KA & KB ad easdem partes puncti K, & radicem affirmativam KY ad contrarias partes, jam prodiit KY *cub.* −KB×KYq=KA×CXq, & inde $x^3-pxx-r=0$: sic sumendo KB ad contrarias partes puncti K, prodibit simili argumentationis progressu KY *cub.* +KB×KYq=KA×CXq, & inde $x^3+pxx-r=0$.

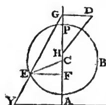
 Et

APPENDIX. Et in hisce duobus casibus si mutetur situs radicis affirmativæ KY sumendo eam ad alteram partem puncti K, per similem argumentationis seriem devenietur ad alteros duos casus KY *cub.* $+KB \times KYq = -KA \times CXq$, seu $x^3+pxx+r=0$, & KY *cub.* $-KB \times KYq = -KA \times CXq$, seu $x^3-pxx+r=0$. Qui omnes casus erant demonstrandi.

Proponatur jam æquatio cubica $x^3+pxx+qx+r=0$, *nullo (nisi forte tertio) termino carens.* Ea construetur ad hunc modum.

Cape ab arbitrium longitudinem n. Ejus dimidio æqualem duc rectam quamvis GC, & ad punctum G erige perpendiculum GD æquale $\sqrt{\frac{r}{p}}$. Deinde si termini p & r habent contraria signa, centro C intervallo CD describe circulum PBE. Sin eadem sunt eorum signa, centro D intervallo GC describe circulum occultum secantem rectam GA in H; dein centro C intervallo GH describe circulum PBE. Tum fac GA $= -\frac{q}{n}-\frac{r}{np}$, eamque duc in linea GC ad partes puncti G versus C si modo quantitas $-\frac{q}{n}-\frac{r}{np}$ (signis terminorum p, q, r, in æquatione construendâ probe observatis) affirmativa obvenerit: secus age GA ad alteras partes puncti G, & ad punctum A erecto perpendiculo AY, inter hoc & circulum PBE superius descriptum inscribe lineam EY æqualem termino p, ea lege ut hæc inscripta convergat ad punctum G. Quo facto & productâ illâ EY ad G, erit linea EG una ex radicibus æquationis construendæ. Quæ quidem radices affirmativæ sunt ubi punctum E cadit inter puncta G & Y, & negativæ ubi E cadit extra, si modo habeatur $+p$; & contra si $-p$.





Demonstrationi hujus constructionis præmittimus *Lemmata* sequentia.

LEM. I. *Demisso ad* AG *perpendiculo* EF *& acta recta* EC, *est* $EGq+GCq=ECq+2CGF$.

Nam per *Prop.* 12. *lib.* II. *Elem.* est $EGq=ECq+GCq+2GCF$. Addatur utrinque GCq & fiet $EGq+GCq=ECq+2GCq+2GCF$. Sed

$2GCq + 2GCF$ eſt $2GC$ in $GC + CF$ id eſt $2CGF$. Ergo $EGq + GCq =$ *Æquationum Constructiones.*
$ECq + 2CGF$. Q. E. D.

LEM. II. *In conſtructionis caſu primo ubi circulus* PBE *tranſit per punctum* D, *eſt* $EGq - GDq = 2CGF$.

Nam per *Lemma primum* eſt $EGq + GCq = ECq + 2CGF$, & ablato utrinque GCq, fit $EGq = ECq - GCq + 2CGF$. Sed $ECq - GCq$ idem eſt quod $CDq - GCq$, hoc eſt idem quod GDq. Ergo $EGq = GDq + 2CGF$, & ſubducto utrobique GDq, fit $EGq - GDq = 2CGF$. Q. E. D.

LEM. III. *In conſtructionis caſu ſecundo, ubi circulus* PBE *non tranſit per punctum* D, *eſt* $EGq + GDq = 2CGF$.

Namque in *Lemmate primo* erat $EGq + GCq = ECq + 2CGF$. Aufer utrinque ECq & fiet $EGq + GCq - ECq = 2CGF$. Sed $GC = DH$ & $EC = CP = GH$: ergo $GCq - ECq = DHq - GHq = GDq$, atque adeo $EGq + GDq = 2CGF$. Q. E. D.

LEM. IV. *Eſt* $2CGF$ *in* $GY = 2CG$ *in* AGE.

Namque ob ſimilia triangula GEF, GYA eſt GF ad GE ut AG ad GY; hoc eſt (per *Prop.* I. *lib.* VI. *Elem.*) ut $2CG \times AG$ ad $2CG \times GY$. Ducantur extrema & media in ſe, & fiet $2CG \times GY \times GF = 2CG \times AG \times GE$. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum conſtructio Problematis ſic demonſtratur.

In caſu *primo* eſt (per *Lem.* 2.) $EGq - GDq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq \times GY - GDq \times GY = 2CGF \times GY$ (hoc eſt per *Lem.* 4.) $= 2CG \times AGE$. Pro GY ſcribe $EG + EY$, & fiet $EG\ cub. + EY \times EGq - GDq \times EG - GDq \times EY = 2CGA \times EG$, ſeu $EG\ cub. + EY \times EGq \begin{smallmatrix} -GDq \\ -2CGA \end{smallmatrix} \times EG - GDq \times EY = 0$.

In caſu *ſecundo* eſt (per *Lem.* 3.) $EFq + GEq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq \times GY + GDq \times GY = 2CGF \times GY$ (hoc eſt per *Lem.* 4.) $= 2CG \times AGE$. Pro GY ſcribe $EG + EY$, & fiet $EG\ cub. + EY \times EGq + GDq \times EG + GDq \times EY = 2CGA \times EG$, ſeu $EG\ cub. + EY \times EGq \begin{smallmatrix} +GDq \\ -2CGA \end{smallmatrix} \times EG + GDq \times EY = 0$.

Jam vero erat EG radix æquationis conſtructæ dicta x; item $GD = \sqrt{\frac{r}{p}}$, $EY = p$, $2CG = n$, & $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$, id eſt in caſu primo ubi terminorum p & r diverſa ſunt ſigna: at in caſu ſecundo ubi alterutrius p vel r mutatur ſignum fiet $-\frac{q}{n} + \frac{r}{np} = GA$. Scribantur igitur

APPENDIX. tur pro EG, GD, EY, 2CG, & GA quantitates x, $\sqrt{\frac{r}{p}}$, p, n, & $-n \mp \frac{r}{np}$,

& casu *primo* fiet $x^3+px^2 \begin{matrix} -\frac{r}{p} \\ +q+\frac{r}{p} \end{matrix} x-r=0$, id est $x^3+pxx+qx-r=0$,

casu autem *secundo* $x^3+px^2 \begin{matrix} +\frac{r}{p} \\ +q-\frac{r}{p} \end{matrix} x+r=0$, id est $x^3+pxx+qx+r=0$,

Est igitur in utroque casu EG vera longitudo radicis x. Q. E. D.

Subdistinguitur autem casus uterque in casus plures particulares: Nimirum prior in hosce $x^3+px^2+qx-r=0$, $x^3+pxx-qx-r=0$, $x^3-pxx+qx+r=0$, $x^3-pxx-qx+r=0$, $x^3+px^2-r=0$, & $x^3-pxx+r=0$; posterior in hosce $x^3+pxx+qx+r=0$, $x^3+pxx-qx+r=0$, $x^3-pxx+qx-r=0$, $x^3-pxx-qx-r=0$, $x^3+pxx+r=0$, & $x^3-pxx-r=0$. Quorum omnium demonstrationes verbis iisdem ac duorum jam demonstratorum, mutato tantum linearum situ, compinguntur.

Hæ sunt Problematum constructiones præcipuæ per inscriptionem rectæ longitudine datæ inter circulum, & rectam lineam positione datam, eâ lege, ut inscripta ad datum punctum convergat. Inscribitur autem talis recta, ducendo *Conchoidem* veterum, cujus Polus sit punctum illud, ad quod recta inscribenda debet convergere, Regula seu Asymptotos recta altera positione data, & intervallum longitudo rectæ inscribendæ. Secabit enim hæc Conchoides circulum præfatum in puncto E, per quod recta inscribenda duci debet. Suffecerit vero in rebus practicis, rectam illam, inter circulum & alteram positione datam rectam, ratione quâcunque mechanicâ interponere.

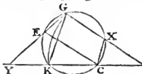
In hisce autem constructionibus notandum est quod quantias n, ubique indeterminata & ad arbitrium assumenda relinquitur; id adeo ut singulis problematis constructiones commodius aptentur. Hujus rei exempla in inventione duarum medie proportionalium, & anguli trisectione dabimus.

Inveniendæ sint inter a & b duæ medie proportionales x & y. Quoniam sunt $a.\ x.\ y.\ b$ continue proportionales erit aa ad xx ut x ad b, adeoque $x^3=aab$, seu $x^3-aab=0$. Hic desunt æquationis termini p & q, & loco termini r habetur $-aab$. Igitur in constructionum formulâ primâ, ubi recta EY ad datum punctum K convergens

convergens inferitur inter alias duas positione datas rectas EX & YC, & recta CX ponitur æqualis $\frac{r}{nn}$ id est æqualis $\frac{-aab}{nn}$, assumo *n* æqualem *a*, & sic fit CX æqualis $-b$. Unde talis emerget constructio. Æquationum Constructiones.

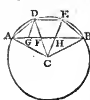
Duco quamvis KA æqualem *a*, eamque bisceo in C, centroque K intervallo KC describo circulum CX ad quem apto rectam CX æqualem *b* & inter rectas AX, CX infinite productas pono EY æqualem CA, & convergentem ad punctum K. Sic erunt KA, XY, KE, CX, continue proportionales, id est XY & KE duæ mediæ proportionales inter *a* & *b*. Constructio nota est.

Inter altera autem constructionum formula ubi recta EY ad datum punctum G convergens ponitur inter circulum GECX & rectam AK, estque CX $= \frac{r}{nn}$ id est (in hoc Problemate $= \frac{-aab}{nn}$), pono ut prius $n=a$, & sic fit CX $=b$, cæteraque peraguntur ut sequitur.



Duco rectam quamvis KA æqualem *a*, eamque bisceo in C & centro A intervallo AK describo circulum KG ad quem apto rectam KG æqualem $2b$ constituendo triangulum æquicrurum AKG. Dein per puncta C, K, G circulum describo & inter hujus perimetrum & rectam productam AK inscribo rectam EY æqualem KC, & convergentem ad punctum G. Quo facto continue proportionales erunt AK, EC, KY, $\frac{1}{2}$KG, id est EC & KY duæ mediæ proportionales erunt inter datas *a* & *b*.

Secandus jam sit angulus in partes tres æquales. Sitque angulus secandus ACB, *partes ejus inveniendæ* ACD, DCE, ECB.



Centro C intervallo CA describatur circulus ADEB secans rectas CA, CD, CE, CB in A, D, E, B. Jungantur AD, DE, EB ut & AB secans rectas CD, CE in F & H, & ipsi CE parallela agatur DG occurrens AB in G. Ob similia triangula CAD, ADF, DFG, continue proportionales sunt CA, AD, DF, FG. Ergo si dicatur AC$=a$,

& AD

APPENDIX. & AD$=x$, fiet DF $=\frac{xx}{a}$, & FG $=\frac{x^3}{aa}$. Eſt autem AB $=$ BH $+$ HG $+$ FA $-$ GF $=3$AD $-$ GF $=3x-\frac{x^3}{aa}$. Dic AB$=b$, & fiet $b=3x-\frac{x^3}{aa}$, ſeu $x^3-3aax+aab=0$. Hic deeſt æquationis terminus ſecundus p, & loco q & r habentur $-3aa$ & aab. Ergo in conſtructionum formula prima ubi erat $p=0$, KA $=n$, KB $=\frac{q}{n}$, & CX $=\frac{r}{nn}$, id eſt in problemate jam conſtruendo KB $=-\frac{3aa}{n}$, & CX $=\frac{aab}{nn}$, ut hæ quantitates evadant quam ſimpliciſſimæ pono $n=a$, & ſic fit KB $=-3a$, & CX$=b$. Unde talis emergit Problematis *conſtructio*.

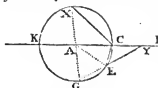
Ago quamvis KA$=a$, & ad contrarias partes KB$=3a$. Biſeco BA in C, centroque K intervallo KC deſcribo circulum, cui inſcribo rectam CX $=b$. Et actâ rectâ AX, inter ipſam infinite productam & rectam CX pono rectam EY æqualem AC, & convergentem ad punctum K. Sic fit XY $=x$. Quinetiam ob æquales circulos ADEB, CXA, & æquales ſubtenſas AB, CX, nec non æquales ſubtenſarum partes BH, XY, æquales erunt anguli ACB, CKX, ut & anguli BCH, XKY, atque adeo anguli CKX tertia pars erit angulus XKY. Dati igitur cujuſvis anguli CKX pars tertia XKY invenietur ponendo inter chordas CX, AX infinitè productas rectam EY æqualem diametro AC, & convergentem ad circuli centrum K.

Hinc ſi à circuli centro K ad ſubtenſam CX demittas perpendiculum KH, erit angulus HKY tertia pars anguli HKX, adeo ut ſi detur quilibet angulus HKX inveniri poſſit ejus pars tertia HKY demittendo à quolibet lateris utriuſvis KX puncto X ad latus alterum KH perpendiculum XH, & lateri KH ducendo parallelam XE, dein rectam YE duplam ipſius KX, & convergentem ad punctum K ponendo inter rectas XH & XE. *Vel ſic.* Detur angulus quilibet AXK. Ad latus alterutrum AX erigatur perpendiculum XH, & à lateris alterius XK puncto quovis K agatur

gatur recta KE cujus pars YE interjacens lateri AX producto, & ejus perpendiculo XH sit dupla lateris XK, & erit angulus KEA tertia pars anguli dati AXK. Tum rursus erecto perpendiculo EZ, & acta KF cujus pars ZF inter EF & EZ sit dupla ipsius KE, fiet angulus KFA tertia pars anguli KEA, & sic pergitur per continuam anguli trisectionem in infinitum. Exstat autem hæc trisectio apud *Pappum, lib.* 4. *Prop.* 32. Æquationum Constructio-nes.

Quod si angulum per alteram constructionum formulam ubi recta inter aliam rectam & circulum ponenda est, trifariam dividere malueris: hic etiam erunt $KB = \frac{q}{n}$, & $CX = \frac{r}{nn}$, id est in problemate de quo nunc agimus $KB = \frac{-3aa}{n}$, & $CX = \frac{aab}{nn}$, adeoque ponendo $n = a$ fiet $KB = -3a$, & $CX = b$. Et inde talis emerget *constructio.*

A puncto quovis K ducantur ad easdem partes rectæ duæ $KA = a$, & $KB = 3a$. Biseca AB in C, centroque A intervallo AC describe circulum. In eo pone rectam $CX = b$. Junge AX, & junctam produc donec ea iterum secet circulum jam descriptum in G. Tum inter hunc circulum & rectam KC infinite productam pone rectam EY æqualem rectæ AC, & convergentem ad punctum G, & acta recta EC erit longitudo quæsita x, qua tertia pars anguli dati subtenditur.

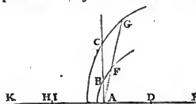


Talis constructio consequitur formulam superius allatam: quæ tamen sic evadet concinnior. Ob æquales circulos ADEB & KXG, & æquales subtensas CX & AB, æquales sunt anguli CAX sive KAG & ACB, adeoque CE subtensa est tertiæ partis anguli KAG. Quare dato quovis angulo KAG, ut ejus inveniatur pars tertia CAE, pone inter circulum KGC, & anguli latus KA infinité productum rectam EY æqualem circuli semidiametro AG, & convergentem ad punctum G. Sic docuit *Archimedes* angulum trifariam secare. Eædem constructiones facilius explicari possint quam hic factum est; sed in his volui ostendere quomodo ex generalibus Problematum constructionibus superius Lemma Archim. 8.

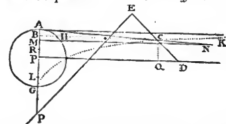
 expositis

APPENDIX. expositis constructiones simplicissimas particularium Problematum derivare liceat.

Præter constructiones hic expositas adjungere liceret quamplurimas. *Ut si inter a & b inveniendæ essent duæ medié proportionales.* Age quamvis AK=*b*, & huic perpendiculare AB=*a*. Biseca AK in I, & in eâdem AK, subtensæ BI æqualem pone AH; ut & in lineâ AB productâ subtensæ BH æqualem AC. Tum in lineâ AK ad alteras partes puncti A cape AD cujusvis longitudinis, & huic æqualem DE, centrisque D & E, intervallis DB, EC describe circulos duos BF, CG, & inter eos pone rectam FG æqualem rectæ AI, & convergentem ad punctum A, & erit AF, prima duarum medié proportionalium quas invenire oportuit.



Docuerunt Veteres inventionem duarum medie proportionalium per *Cissoidem*; sed lineæ hujus descriptionem commodam manualem nemo, quod scio, apposuit. Sit AG diameter & F centrum circuli ad quem *Cissois* pertinet. Ad punctum F erigatur normalis FD, eaque producatur in infinitum. Et producatur FG ad P, ut FP æqualis sit circuli Diametro. Moveatur norma rectangula PED eâ lege ut crus ejus EP perpetuó transeat per punctum P, & crus alterum ED circuli Diametro AG seu FP æquale, termino suo D tangat semper lineam FD, & cruris hujus medium punctum C describet *Cissoidem* desideratam GCK ut supra exposui. Quare si inter duas quasvis *a* & *b* inveniendæ sint duæ mediæ proportionales: cape AM=*a*, erige perpendiculum MN = *b*. Junge AN; & lege præfatâ moveatur norma PED, usque dum punctum ejus C incidat in rectam AN. Tum demisso ad AP perpendiculo CB, cape *t* ad BH, & *u* ad BG, ut est



MN

MN ad BC, & ob continue proportionales AB, BH, BG, BC erunt etiam continue proportionales a, t, v, b.

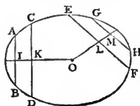
Æquationum Constructiones.

Simili normæ applicatione construi possunt etiam alia Problemata solida. Verbi gratiâ proponatur æquatio cubica $x^3 \mp pxx + qx - r = 0$: ubi q semper affirmativum sit, r negativum, & p signi utriusvis. Fac AG $= \frac{r}{q}$, eamque biseca in F, & cape FR & GL$=\frac{1}{2}p$, idque versus A si habeatur $+p$ aliter versus P. Erige insuper normalem FD, inque eâ cape FQ$=\sqrt{q}$ huic etiam erige normalem QC. In normæ autem crure ED, cape ED & EC ipsis AG & AR æquales respectivè, & applicetur deinceps norma ad Schema sic ut punctum ejus D tangat rectam FD, & punctum C rectam QC, tum si compleatur parallelogrammum BQ; erit LB æquationis radix quæsita x.

Hactenus constructionem solidorum Problematum, per operationes, quarum praxis manualis maxime simplex est & expedita, exponere visum fuit. Sic Veteres, postquam confectionem horum problematum per compositionem locorum solidorum assecuti fuerant, sentientes ejusmodi constructiones, ob difficilem Conicarum sectionum descriptionem, inutiles esse, quærebant constructiones faciliores per Conchoidem, Cissoidem, extensionem filorum, & figurarum adaptiones quascunque mechanicas: prælatâ mechanicâ utilitate inutili speculationi Geometricæ, ut ex *Pappo* discimus. Sic magnus ille *Archimedes* trisectionem anguli, per coni sectiones, à superioribus Geometris expositam, neglexit, & in Lemmatis suis angulum, modo à nobis superius exposito, trifariam secare docuit. Si veteres problemata, per figuras, eâ tempestate in Geometriam non receptas, construere maluerint, quanto magis præferendæ nunc sunt illæ figuræ, in Geometriam æque ac ipsæ coni sectiones à plerisque receptæ.

Verumtamèn novo huic Geometrarum generi haud assentior, qui figuras hasce omnes in Geometriam recipiunt. Eorum regula admittendi lineas omnes ad constructionem Problematum, eo ordine, quo æquationes, quibus lineæ illæ definiuntur, numero dimensionum ascendunt, arbitraria est, & in Geometriâ fundamentum non habet. Imo falsa est, propterea quod circulus, hâc lege, cum coni sectionibus conjungendus esset, quem tamen Geometræ omnes cum lineâ rectâ conjungunt. Vacil-

APPENDIX. lante autem hâc regulâ, tollitur fundamentum admittendi certo ordine lineas omnes Analyticas in Geometriam. In Geometriam planam, meo quidem judicio, lineæ nullæ præter rectam & circulum admitti debent; nisi forte linearum distinctio aliqua prius excogitetur, quâ linea circularis conjungatur cum rectâ, & à reliquis omnibus segregetur. Quinimo ne tum quidem augenda est Geometria plana numero linearum. Nam figuræ omnes sunt planæ, quæ admittuntur in Geometriam planam, id est quas Geometræ postulent in plano describere. Et problema omne planum est, quod per figuras planas construi potest. Sic igitur admissis in Geometriam planam conicis sectionibus, alisque magis compositis figuris, problemata omnia solida, & plus quam solida, quæ per has figuras construi possunt, evadent plana. Sunt autem problemata omnia plana ejusdem ordinis. Linea recta Analyticè simplicior est quam circulus; hoc non obstante problemata ejusdem sunt ordinis, quæ per rectas solas, & quæ per circulos construuntur. Solis postulatis reducitur circulus ad eundem ordinem cum rectâ. Et multo magis Ellipsis, quæ minus differt à circulo, quam circulus à rectâ, postulando consimiliter descriptionem ejus in plano, reduceretur ad eundem ordinem cum circulo. Siquis, speculando Ellipsin, incideret in problema aliquod solidum, et ipsum beneficio ejusdem Ellipseos & circuli construeret; hoc problema jam pro plano habendum esset: eo, quod Ellipsis jam ante in plano descripta haberi supponitur, & constructio omnis, quæ superest, absolvitur per circuli solius descriptionem. Eâdem de causâ problemata quævis plana per datam Ellipsin construere licitum est. Verbi gratiâ si datæ Ellipseos ADFG requireretur centrum o, ducerem parallelas duas AB, CD Ellipsi occurrentes in A, B, C, D, aliasque duas EF, GH Ellipsi occurrentes in E, F, G, H. Has bisecarem in I, K, L, M, & junctas IK, LM producerem, usque ad concursum suum in o. Legitima est hæc constructio plani problematis per Ellipsin. Nil refert quod Ellipsis Analyticè definiatur per æquationem duarum dimensionum. Nil quod Ellipsis Geometricè generetur sectione figuræ solidæ. Hypothesis sola, quod Ellipsis jam descripta habetur in plano, problemata omnia solida, per ipsam constructa, reducit ad ordinem planorum, efficitque, ut plana omnia



omnia per ipſam legitimè conſtruantur. Et eadem eſt ratio Poſtulati. Quod vi poſtulatorum fieri poteſt, ut jam factum, & datum aſſumere conceſſum eſt. Poſtuletur igitur Ellipſin in plano deſcribere, & ad ordinem planorum problematum reducentur, ea omnia, quæ per Ellipſin conſtrui poſſunt, planaque omnia per Ellipſin licebit conſtruere.

Æquationum Constructiones.

Neceſſe eſt igitur aut Problemata plana & ſolida inter ſe confundi, aut lineas omnes rejici è Geometriâ planâ præter rectam & circulum, & ſiqua forſan alia detur aliquando, in ſtatu conſtruendi alicujus Problematis. Verum genera problematum confundi, nemo certe permiſerit. Rejiciantur igitur è Geometriâ planâ ſectiones Conicæ, aliæque figuræ omnes præter rectam & circulum, & quas contigerit in ſtatu problematum dari. Alienæ ſunt igitur à Geometriâ deſcriptiones illæ omnes conicarum ſectionum in plano, quibus hodierni Geometræ tantoperè indulgent. Nec tamen ideo Coni ſectiones è Geometriâ rejiciendæ erunt. Hæ in plano non deſcribuntur Geometricè, generantur vero in ſolidi Geometrici ſuperficie plane. Conus conſtituitur Geometrice, & plano Geometrico ſecatur. Tale Coni ſegmentum figura Geometrica eſt, eundemque habet locum in Geometriâ ſolidâ ac ſegmentum circuli in planâ, & hâc ratione baſis ejus, quam Coni ſectionem vocant, figura Geometrica eſt. Locum igitur habet Coni ſectio in Geometriâ, quatenus ea ſuperficies eſt ſolidi Geometrici. Aliâ autem nullâ ratione Geometricâ, quam ſolidi ſectione, generatur, & ideo non niſi in Geometriam ſolidam antiquitùs admiſſa fuit. Talis autem Conicarum ſectionum generatio difficilis eſt, & in rebus practicis, quibus Geometria potiſſimum inſervire debet, prorſus inutilis. Ideo veteres ſe ad varias figurarum in plano deſcriptiones mechanicas receperunt, & nos ad eorum exemplar conſtructiones præcedentes concinnavimus. Sunto conſtructiones illæ Mechanicæ: ſic & conſtructiones per Coni ſectiones, in plano ut jam moris eſt deſcriptas, Mechanicæ ſunt. Sunto conſtructiones per datas Coni ſectiones Geometricæ: ſic & conſtructiones per alias quaſcunque

APPENDIX. cunque figuras datas Geometricæ ſunt, & ejuſdem ordinis cum conſtructionibus planorum Problematum. Nullâ ratione preferendæ ſunt in Geometriâ Sectiones conicæ figuris aliis, niſi quatenus illæ à ſectione Coni, praxi ad ſolutionem problematum prorſus inutili, derivantur. Verumtamen ne conſtructiones per Conicas ſectiones omnino præteream, viſum fuit aliqua de his ſubjungere, in quibus etiam praxi manuali non incommodæ conſulatur.

Conicarum ſectionum ſimpliciſſima eſt Ellipſis. Hæc notior eſt, & circulo magis affinis, & praxi manuali facilius deſcribitur in plano. Parabolam præferunt plerique, ob ſimplicitatem æquationis, per quam ea exprimitur. Verum hâc ratione Parabola ipſi etiam circulo præferenda eſſet, contra quam ſit. Falſa eſt igitur argumentatio à ſimplicitate æquationum. Æquationum ſpeculationi nimium indulgent hodierni Geometræ. Harum ſimplicitas eſt conſiderationis Analyticæ. Nos in compoſitione verſamur, & compoſitioni leges dandæ non ſunt ex Analyſi. Manuducit Analyſis ad Compoſitionem: ſed Compoſitio non prius verè conſit, quam liberatur ab omni Analyſi. Inſit compoſitioni vel minimum Analyſeos, & compoſitionem veram nondum aſſecutus es. Compoſitio in ſe perfecta eſt, & à miſturâ ſpeculationum Analyticarum abhorret. Pendet Figurarum ſimplicitas à ſimplicitate geneſeos & Idearum, & æquatio non eſt, ſed deſcriptio, ſive Geometrica ſive Mechanica, quâ figura generatur, & redditur conceptu facilis. Ellipſi igitur primum locum tribuentes, docebimus jam, quomodo æquationes per ipſam conſtruere licet.

Proponatur æquatio quævis cubica $x^3 = pxx + qx + r$, *ubi* p, q *&* r *datas terminorum æquationis coefficientes cum ſignis ſuis* $+$ *&* $-$ *ſignificant, & alteruter terminorum* p *&* q, *vel etiam uterque deeſſe poteſt.* Sic enim æquationum omnium cubicarum conſtructiones unâ illâ operatione quæ ſequitur exhibebimus.

A puncto D in rectâ quavis datâ cape duas quaſcunque rectas BC, BE ad eaſdem partes; ut & inter ipſas mediam proportionalem BD. Et BC dicta n, cape etiam in eâdem rectâ $BA = \frac{q}{n}$, idque verſus punctum C ſi habeatur $-q$, aliter ad partes contrarias.

Ad

Ad punctum A erige perpendiculum AI, inque eo cape AF æ- Æquationum Constructiones.
qualem p, FG æqualem AF, FI æqualem $\frac{r}{nn}$, & FH in ratione ad FI ut est BC ad BE. FH vero & FI capiendæ sunt ad partes puncti F versus G si termini p & r habent eadem signa, aliter ad partes versus A. Compleantur parallelogramma IACK & HAEL, centroque K, & intervallo KG describatur circulus. Tum in lineâ HL capiatur ad utramvis partem puncti H longitudo HR, quæ sit ad HL ut BD ad BE: agatur GR secans EL in S, & moveatur lineâ GRS puncto ejus R super lineâ HL, & puncto S super lineâ EL incedente, donec tertium ejus punctum G describendo Ellipsin, occurrat circulo, quemadmodum videre est in positione $\gamma\varrho\sigma$. Nam dimidium perpendiculi γX ab occursus illius puncto γ in rectam AE demissi erit radix æquationis. Potest autem Regulæ GRS vel $\gamma\varrho\sigma$ terminus G vel γ, circulo in tot punctis occurrere quot sunt possibiles radices. Et è radicibus hæ sunt affirmativæ quæ cadunt ad eas partes rectæ AE ad quas recta FI ducitur à puncto F, & illæ negativæ quæ cadunt ad contrarias partes lineæ AE, si modo habeatur $+r$: & contra si habeatur $-r$.

Demonstratur autem hæc constructio subsidio *Lemmatum* sequentium.

LEM. I. *Positis quæ in superiore constructione, est* $2\text{CAX} - \text{AX}q = \gamma\text{X}q - 2\text{AI} \times \gamma\text{X} + 2\text{AG} \times \text{FI}$.

Namque ex natura circuli est $\text{K}\gamma q - \text{CX}q$, æquale quadrato ex $\gamma\text{X} - \text{AI}$. Sed est $\text{K}\gamma q$ æquale $\text{GI}q + \text{AC}q$, & $\text{CX}q$ æquale quadrato ex $\text{AX} - \text{AC}$ hoc est æquale $\text{AX}q - 2\text{CAX} + \text{AC}q$, atque adeo horum differentia $\text{GI}q + 2\text{CAX} - \text{AX}q$, æquatur quadrato ex $\gamma\text{X} - \text{AI}$, id est ipsi $\gamma\text{X}q - 2\text{AI} \times \gamma\text{X} + \text{AI}q$. Auferatur utrinque $\text{GI}q$, & manebunt æqualia $2\text{CAX} - \text{AX}q$, & $\gamma\text{X}q - 2\text{AI} \times \gamma\text{X} + \text{AI}q - \text{GI}q$. Verum $\text{AI}q$ (per *Prop.* 4. *Lib.* II. *Elem.*) æquale est $\text{AG}q + 2\text{AGI} + \text{GI}q$, atque

APPENDIX. adeo $AIq - GIq$ æquale eſt $AGq + 2AGI$, hoc eſt æquale $2AG$ in $\frac{1}{2}AG + GI$, ſeu æquale $2AG \times FI$, & proinde $2CAX - AXq$, æquale eſt $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$. Q. E. D.

LEM. II. *Poſitis quæ in ſuperiore conſtructione, eſt* $2EAX - AXq$ *æquale* $\frac{FI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \times X\gamma + 2AG \times FI$.

Notum eſt enim quod punctum γ motu regulæ $\gamma\varrho\sigma$ ſuperius aſſignato deſcribit Ellipſin cujus centrum eſt L, & axes duo cum rectis LE & LH coincidunt, quorum qui in LE æquatur $2\gamma\varrho$ ſive $2GR$, & alter in LH æquatur $2\gamma\sigma$ ſive $2GS$. Et horum ratio ad invicem ea eſt quæ lineæ HR ad lineam HL, ſive lineæ BD ad lineam BE. Unde latus tranſverſum eſt ad latus rectum principale ut BE ad BC ſive ut FI ad FH. Quare cum γT ordinatim applicetur ad HL, erit ex natura Ellipſeos $GSq - LTq$ æquale $\frac{FI}{FH} T\gamma q$. Eſt autem LT æquale $AE - AX$, & $T\gamma$ æquale $X\gamma - AH$. Scribantur horum quadrata pro LTq & $T\gamma q$, & fiet $GSq - AEq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq$. Eſt autem $GSq - AEq$ æquale quadrato ex $GH + LS$, propterea quod GS hypotenuſa eſt trianguli rectanguli cujus latera ſunt ipſis AE & $GH + LS$ æqualia. Eſt & (ob ſimilia triangula RGH, RSL) LS ad GH ut LR ad HR, & componendo $GH + LS$ ad GH ut HL ad HR, & duplicando rationes, quadratum ex $GH + LS$, eſt ad GHq ut HLq ad HRq, hoc eſt (per conſtructionem) ut BEq ad BDq, id eſt ut BE ad BC, ſeu FI ad FH, adeoque quadratum ex $GH + LS$ æquale eſt $\frac{FI}{FH} GHq$. Eſt itaque $GSq - AEq$ æquale $\frac{FI}{FH} GHq$, atque adeo $\frac{FI}{FH} GHq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq$. Auferatur utrinque $\frac{FI}{FH} GHq$, & reſtabit $2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq - GHq$. Eſt autem $AH = AG + GH$, adeoque $AHq = AGq + 2AGH + GHq$ & ſubducto utrinque GHq reſtat $AHq - GHq = AGq + 2AGH$, hoc eſt $= 2AG$ in $\frac{1}{2}AG + GH$, ſeu $= 2AG \times FH$, atque adeo eſt $2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + 2AG \times FH$, i. e. $= \frac{FI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \times X\gamma + 2AG \times FI$. Q. E. D.

LEM. III. *Iiſdem poſitis eſt* AX *ad* $X\gamma - AG$ *ut* $X\gamma$ *ad* 2BC.

Nam ſi de æqualibus in *Lemmate ſecundo* ſubducantur æqualia in *Lemmate primo*, reſtabunt æqualia $2CE \times AX$ & $\frac{HI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH$

×

$\times X\gamma + 2AI \times X\gamma$. Ducatur pars utraque in FH, & fiet $2FH \times CE \times AX$ æquale $HI \times X\gamma q - 2FI \times AH \times X\gamma + 2AI \times FH \times X\gamma$. Eſt autem $AI = AH + HI$, adeoque $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2FI \times AH - 2FHA - 2FHI$. Sed $2FI \times AH - 2FHA = 2AHI$, & $2AHI - 2FHI = 2HI \times AF$. Ergo $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2HI \times AF$, adeoque $2FH \times CE \times AX = HI \times X\gamma q - 2HI \times AF \times X\gamma$. Et inde HI ad FH ut $2CE \times AX$ ad $X\gamma q - 2AF \times X\gamma$. Sed per conſtructionem HI eſt ad FH ut CE ad BC, atque adeo ut $2CE \times AX$ ad $2BC \times AX$ & proinde $2BC \times AX$ & $X\gamma q - 2AF \times X\gamma$ (per *Prop.* 9. *lib.* V. *Elem.*) erunt æqualia. Æqualium vero rectangulorum proportionalia ſunt latera, AX ad $X\gamma - 2AF$, id eſt ad $X\gamma - AG$ ut $X\gamma$ ad 2BC. Q. E. D. Æquationum Constructiones.

LEM. IV. *Iiſdem poſitis, eſt* 2FI *ad* $AX - 2AB$ *ut* $X\gamma$ *ad* 2BC.

Nam de æqualibus in Lemmate tertio, nimirum $2BC \times AX = X\gamma q - 2AF \times X\gamma$, ſubducantur æqualia in *Lemmate primo*, & reſtabunt æqualia $-2AB \times AX + AXq = 2FI \times X\gamma - 2AG \times FI$, hoc eſt AX in $AX - 2AB = 2FI$ in $X\gamma - AG$. Æqualium vero rectangulorum proportionalia ſunt latera 2FI ad $AX - 2AB$ ut AX ad $X\gamma - AG$, hoc eſt (per *Lemma tertium*) ut $X\gamma$ ad 2BC. Q. E. D.

Præſtratis his Lemmatibus, Conſtructio Problematis ſic tandem demonſtratur.

Per *Lemma quartum* eſt $X\gamma$ ad 2BC ut 2FI ad $AX - 2AB$, hoc eſt (per *Prop.* I. *lib.* VI. *Elem.*) ut $2BC \times 2FI$ ad $2BC \times \overline{AX - 2AB}$, ſeu ad $2BC \times AX - 2BC \times 2AB$. Sed per *Lemma tertium* eſt AX ad $X\gamma - 2AF$ ut $X\gamma$ ad 2BC, ſeu $2BC \times AX = X\gamma q - 2AF \times X\gamma$, adeoque $X\gamma$ eſt ad 2BC ut $2BC \times 2FI$ ad $X\gamma q - 2AF \times X\gamma - 2BC \times 2AB$. Et ductis extremis & mediis in ſe, fit $X\gamma$ *cub.* $- 2AF \times X\gamma q - 4BC \times AB \times X\gamma = 8BCq \times FI$. Addantur utrinque $2AF \times X\gamma q + 4BC \times AB \times X\gamma$, & fiet $X\gamma$ *cub.* $= 2AF \times X\gamma q + 4BC \times AB \times X\gamma + 8BCq \times FI$. Erat utem in conſtructione demonſtrandâ, $\frac{1}{2}X\gamma$ radix æquationis dicta x, nec non $AF = p$, $BC = n$, $AB = \frac{q}{n}$, & $FI = \frac{r}{nn}$, adeoque $BC \times AB = q$. Et $BCq \times FI = r$. Quibus ſubſtitutis fiet $x^3 = px^2 + qx + r$. Q. E. D.

Corol. Hinc ſi AF & AB ponantur nulla, per *Lemma* tertium & quartum fiet 2FI ad AX ut AX ad $X\gamma$ & $X\gamma$ ad 2BC. Unde conſtat inventio duarum mediè proportionalium inter datas quaſlibet FI & BC.

Scholium. Hactenus æquationis cubicæ constructionem per Ellipsin solummodo exposui: sed regula suâ naturâ generalior est, sese ad omnes coni sectiones indifferenter extendens. Nam si loco Ellipseos velis Hyperbolam adhiberi, cape lineas BC, BE ad contrarias partes puncti B, dein puncta A, F, G, I, H, K, L & R determinentur ut antè; excepto tantùm quòd FH debet sumi ad partes ipsius F contra I, & quòd HR non in lineâ HL, sed in lineâ AI ad utramque partem puncti H capi debet, & vice rectæ GRS duæ aliæ rectæ à puncto L ad puncta duo R & R hinc inde duci pro asymptotis Hyperbolæ. Cum istis itaque asymptotis LR, LR describe Hyperbolam per punctum G, ut & circulum centro K intervallo KG: & dimidia perpendiculorum ab eorum intersectionibus ad rectam AE demissorum erunt radices æquationis propositæ. Quæ omnia, signis + & − probè mutatis, demonstrantur ut priùs.

Quòd si Parabolam velis adhiberi, abibit punctum E in infinitum, atque adeo nullibi capendum erit, & punctum H cum puncto F coincidet, eritque Parabola circa axem HL cum latere recto principali BC per puncta G & A describenda, sito vertice ad partes puncti F ad quas punctum B situm est respectu puncti C.

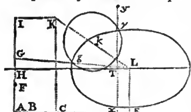
Sic sunt constructiones per Parabolam, si simplicitatem analyticam spectes, simplicissimæ omnium. Eæ per Hyperbolam proximum locum obtinent, & ultimum locum tenent quæ per Ellipsin absolvuntur. Quòd si praxeos manualis in describendis figuris spectetur simplicitas, mutandus est ordo.

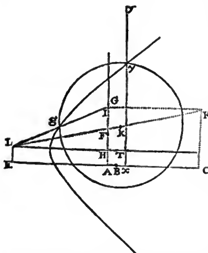
In hisce autem constructionibus observandum venit, quòd proportione lateris recti principalis ad latus transversum determinatur species Ellipseos & Hyperbolæ; & proportio illa eadem est quæ linearum BC & BE, atque adeo assumi potest: Parabolæ verò species est, unica quam artifex ponendo BE infinitè longam assequitur. Sic igitur penes artificem est, æquationem quamcunque cubicam per conicam sectionem imperatæ speciei construere. A figuris autem specie datis, ad figuras magnitudine datas devenietur, augendo vel diminuendo in ratione datâ lineas omnes, quibus figuræ specie dabantur, atque ita æquationes omnes cubicas, per datam quamvis Conicam sectionem, construere licebit. Id quod sic pleniùs explico.

Proponatur

Proponatur æquationem quamcunque cubicam $x^3 = pxx. \ qx. \ r.$ ope datæ cujuſcunque ſectionis conicæ conſtruere. Æquationum Constructio.

A puncto quovis B in rectâ quâvis infinitâ BCE, cape duas quaſcunque longitudines BC, BE ad eaſdem partes ſi data Coni ſectio ſit Ellipſis, ad contrarias ſi ea ſit Hyperbola. Sit autem BC ad BE ut datæ ſectionis latus rectum principale ad latus tranſverſum; & BC nominatâ n, cape $BA = \frac{q}{n}$, idque verſus C ſi habeatur $-q$, aliter ad partes contrarias. Ad punctum A erige perpendiculum AI, inque eo cape AF æqualem p & FG æqualem AF; item FI æqualem $\frac{r}{nn}$. Capiatur verò FI verſus G ſi termini p & r habent eadem ſigna, aliter verſus A. Dein fac ut ſit FH ad FI ut BC ad BE, & hanc FH cape à puncto F verſus I ſi ſectio ſit Ellipſis, aut ad partes contrarias ſi ea ſit Hyperbola. Porro compleantur parallelogramma IACK & HAEL, & hæ omnes jam deſcriptæ lineæ transferantur ad datam ſectionem Conicam, aut quod perinde eſt, his ſuperponatur curva, ita ut axis ejus ſive tranſverſa diameter principalis conveniat cum rectâ LH & centrum cum puncto L. His ita conſtitutis agatur recta KL ut & recta GL ſecans conicam ſectionem in g. In LK cape Lk quæ ſit ad LK ut Lg ad LG, centroque k & intervallo kg deſcribe circulum. A punctis ubi hic ſecuerit curvam impoſitam demitte perpendicula ad lineam LH, cujuſmodi ſit γT. Denique verſus γ, cape TX quæ





APPENDIX. quæ ſit ad Tγ ut LG ad Lg, & hæc TY producta ſecet rectam AB in X, eritque recta $\frac{1}{2}$XY una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ jacent ad partes rectæ AB ad quas recta FI jacet à puncto F, & negativæ quæ jacent ad contrarias partes, ſi modò habeatur $+r$, & contrà ſi $-r$ obvenerit.

Hoc modo conſtruuntur æquationes cubicæ per Ellipſes & Hyperbolas datas: Quòd ſi detur Parabola, capienda eſt BC æqualis lateri recto ipſius. Dein punctis A, F, G, I & K inventis ut antè, centro K intervallo KG deſcribendus eſt circulus, & Parabola ita applicanda ad Schema jam deſcriptum (aut Schema ad Parabolam) ut ipſa tranſeat per puncta A & G, & axis ejus ipſi AC parallelus per punctum F, cadente vertice ad partes puncti illius F ad quas punctum B cadit à puncto C. His ita conſtitutis, ſi perpendicula ab ejus occurſibus cum circulo demittantur ad lineam BC, eorum dimidia erunt radices æquationis conſtruendæ.

Et notes quòd ubi ſecundus æquationis terminus deeſt, & latus rectum Parabolæ ponitur numerus binarius, hæc conſtructio evadet eadem cum illà quam Carteſius attulit in Geometrià ſuâ, præterquam quòd lineamenta hîc ſunt illorum duplicia.

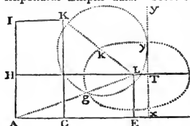
Hæc eſt conſtructionum regula generalis. Verùm ubi problemata particularia proponuntur, conſulendum eſt conſtructionum formulis ſimpliciſſimis. Libera enim manet quantitas n, cujus aſſumptione conſtructio plerumque ſimplicior reddi poteſt. Ejus rei exemplum unum ſubjungo.

Detur Ellipſis, & inter datas lineas a & b inveniendæ ſint duæ mediæ proportionales. Sit earum prima x, & $a.\ x.\ \frac{xx}{a}.\ b$ erunt continuè proportionales, adeoque $ab=\frac{x^3}{a}$, ſeu $x^3=aab$, æquatio eſt quam conſtruere oportet. Hîc deſunt termini p, & q, & terminus r eſt aab, adeoque BA & AF nullæ ſunt, FI & eſt $\frac{aab}{nn}$. Ut terminus noviſſimus evadat ſimplicior aſſumatur $n=a$, & fiet $\text{FI}=b$. Deinde conſtructio ita ſe habebit.

A puncto quovis A in rectâ quâvis infinitâ AE cape $\text{AC}=a$, & ad eaſdem partes puncti A cape AC ad AE ut eſt Ellipſeos latus rectum principale ad latus tranſverſum. Tum in perpendiculo

AI

AI cape AI = b, & AH ad AI ut eſt AC ad AE. Compleantur parallelogramma IACK, HAEL. Jungantur LA, LK. Huic ſchemati imponatur Ellipſis data. Secet ea rectam AL in puncto g, Fiat *Æquationum Constructiones.*



Lk ad LK ut Lg ad LA. Centro k intervallo kg deſcribatur circulus ſecans Ellipſin in γ. Ad AE demittatur perpendiculum γX ſecans HL in T, & producatur id ad Y ut ſit TY ad Tγ ſicut LA ad Lg. Sic fiet $\frac{1}{2}$XY prima duarum mediè proportionalium x. Q. E. I.

FINIS ARITHMETICÆ UNIVERSALIS.

TOMI PRIMI

PARS SECUNDA,

IN QUA CONTINENTUR

TRACTATUS OMNES

AD

FUNDAMENTA GEOMETRIÆ SUBLIMIORIS

PERTINENTES.

MONITUM EDITORIS.

CUM in eâ diu fuerim opinione, fore ut sublimioris Geometriæ scientia faciliùs atque meliùs ex ipsius Newtoni libris quàm aliunde ferè haurienda esset, modò ea suppleta essent quæ Newtonus reliquit imperfecta, et pauca quædam accuratiùs exposita, quæ ille breviùs dixit quàm ut discentibus perspicua essent; nonnulla Newtonianis adjungere decrevimus, quæ tironibus viam complanare possint, modò ipsi à Mathesi elementariâ satis instructi ad hæc sublimiora accedant. Exigit igitur instituti ratio, ut quo ordine hæc omnia sint legenda, si quis tempore brevissimo minimoque labore fructus studiorum maximos percipere cupiat, breviter exponam.

CUI *igitur nova sit quæ in hisce traditur disciplina, is omnium primum Tractatum ipsius Newtoni de Rationibus Primis Ultimisque diligenter velim perlegat.*

2. *Dein nostram Fluxionum Geometriam.*

3. *Newtoni Introductionem ad Quadraturam Curvarum, et libri ipsius de Quadraturis initium, absolutam usque secundi Problematis enodationem.*

4. *Analysin per æquationes numero terminorum infinitas, collatis Geometriæ Analyticæ locis cognatis, ad quæ notationes nostræ legentes ablegant.*

5. *Nostram Infinitorum Logisticam.*

6. *Excerpta ex Epistolis Newtoni ad Series Infinitas Fluxionesque pertinentia.*

7. *Newtoni Geometriam Analyticam, ab initio doctrinæ fluxionalis absolutum usque nonum Problema.*

8. *Librum de Quadratura Curvarum, ab initio resumptum, finem usque; conferendo Geometriæ Analyticæ loca cognata.*

9. *Methodum Differentialem.*

10. *Enumerationem linearum tertii ordinis. Nos verò in condendis demonstrationibus nostris, eam nobis legem tulimus, ut non aliis unquam tanquam cognitis uteremur, præter ea quæ non cognovisse lectori non licebit, qui ordinem legendi à nobis præscriptum observaverit.*

DE

RATIONIBUS

PRIMIS ULTIMISQUE

E

LIBRO PRIMO PRINCIPIORUM.

DE

RATIONIBUS

PRIMIS ULTIMISQUE

E

LIBRO PRIMO PRINCIPIORUM.

LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propiùs ad invicem accedunt, quàm pro datâ quâvis differentiâ, fiunt ultimò æquales.

SI negas; fiant ultimò inæquales, & sit earum ultima differentia D. Ergo nequeunt propiùs ad æqualitatem accedere quàm pro datâ differentiâ D: contra hypothesin (*).

LEMMA

(*) Siquis ea quæ sub Lemmatis Primi titulo hic proferuntur, pro definitione potiùs haberi velit, quâ nimirum constituit Newtonus quidnam sit ultima illa, quam sæpè adeo locuturus est, sive magnitudinum sive rationum æqualitas, is sententiæ suæ me certè haud magnoperè refragantem habiturus est. Quid enim? Si duarum magnitudinum, A, B, quarum illam A minorem ponamus, harum si major B fixa maneat, minor A sensim increscat, eâ quidem lege, ut licèt nunquam ea major evadat quàm B, intra certum tamen tempus minùs abiit à B quàm pro differentiâ ullâ quam minimam quis posuerit, quidni habeatur illa A alteri B ultimò æqualis? Cùm dari nequeat magnitudo ulla illâ B vel tantillo minor, quam A ultimò non exuperabit; cùm tamen ipsam B nunquam ei exuperare liceat. Vel si, manente magnitudine minore A, major B sensim minuatur, eâ quidem lege, ut licet nunquam ea minor fiat quàm A, intra certum tamen tempus minùs exuperet A, quàm pro differentiâ ullâ quam minimam quis posuerit, quidni habeatur illa B alteri A ultimò æqualis? Cùm dari nequeat magnitudo ulla illâ A vel tantillo major, quâ altera B ultimò minor non fiat; cùm tamen ipsâ A nunquam ea fiat minor.

A B

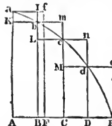
Rursùm duæ magnitudines, A, B, increscendo vel decrescendo quovis modo mutationes subeant. Sint datæ duæ, C, D; sitque E magnitudo cui mutabilis B ultimò æqualis fiat. Sit etiam alia F, quæ habeat ad E rationem eam quam C ad D. Jam si magnitudini mutabili, A, ita sit muta-

tionum

DE RATIONIBUS

LEMMA II.

Si in figurâ quâvis AacE, *rectis* Aa, AE *&* *curvâ* acE *comprehensâ, inscribantur parallelogramma quotcunque,* Ab, Bc, Cd, *&c. sub basibus* AB, BC, CD, *&c. æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, *&c. figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, *&c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quòd ultimæ rationes, quas habent ad se invicem figura inscripta* AKbLcMdD, *circumscripta* Aalbmcndo E, *& curvilinea* AabcdE, *sunt rationes æqualitatis.*



Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum Kl, Lm, Mn, Do, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi Kb & altitudinum summâ Aa, id est, rectangulum ABla. Sed hoc rectangulum, eò quòd latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lemma 1) figura inscripta & circumscripta, & multo magis figura curvilinea intermedia, fiunt ultimò æquales. Q. E. D.

LEMMA III.

Eædem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, *&c. sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim AF æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum FAaf. Hoc erit majus quàm differentia figuræ inscriptæ

F A B E

C D

tionum suarum omnium terminus atque finis, ut illi F ultimò æqualis fiat, his positis, quidni ratio illius C ad D, magnitudinis A ad B ultima dicatur ratio? Vel quidni dicantur rationes illæ, C ad D, A ad B, ultimò æquales? Siquidem illa A cuivis magnitudini ultimò inæqualis fiat, quæ ad ultimam ipsius B magnitudinem rationem habeat aliam atque C habet ad D. Si neges, inquit Newtonus, magnitudines, A, B, in casu primo habendas esse ultimò æquales, necesse est contrarium velis; eas habendas esse ultimò inæquales. Si hoc velis, necesse erit aliquam inter eas ponas differentiam ultimam: nam inæqualium est semper aliquid quo alterum ab altero absit: neque propiùs quam pro differentiâ illâ, quam ultimam habituræ sunt, magnitudines ultimò inæquales accedere poterunt. Hoc autem contrarium est legi mutationum à nobis constitutæ. Haud igitur inæquales ultimò habendæ sunt magnitudines, quarum mutationes legi, quam tulimus, obtemperant. Si non inæquales,

ſcriptæ & figuræ circumſcriptæ; at latitudine ſuâ AF in infinitum diminutâ, minus fiet dato quovis rectangulo. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſumma ultima parallelogrammorum evaneſcentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.

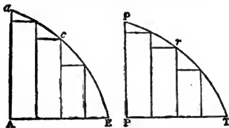
Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evaneſcentium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, &c. comprehenditur, coincidit ultimò cum figurâ curvilineâ.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea circumſcripta, quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *ac*E,) non ſunt rectilineæ, ſed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

Si in duabus figuris A*ac*E, P*pr*T, *inſcribantur (ut ſuprà) duæ parallelogrammorum ſeries, ſitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma in alterâ, ſingulorum ad ſingula, ſint eædem; dico quòd figuræ duæ* A*ac*E, P*pr*T, *ſunt ad invicem in eâdem illâ ratione.*



Etenim ut ſunt parallelogramma ſingula ad ſingula, ita (componendo) fit ſumma omnium ad ſummam omnium, & ita figura ad figuram; exiſtente nimirum figurâ priore (per lem-

quales, æquales certè. Namque Æqualis & Inæqualis haud ſanè novimus intermedium quid, cui nec æquali nec inæquali eſſe liceat. Jam verò ſi magnitudines illæ A, B jure optimo cenſeantur ultimò æquales, rationes etiam, ſecundum eandem legem noſtram mutabiles, nihilo ineptiùs ultimò æquales dici, id etiam invictis argumentis obtinebimus. Quid enim? Cùm in caſu ſecundo magnitudinum mutabilium, A, B, datæ, F, E, ſint ultimæ magnitudines, hoc eſt cùm A fiat ultimò æqualis illi F, necnon B ultimò æqualis illi E, nonne dicendum A eſſe ultimò ad F ut B ultimò ad E. Id verò ſi rectè dicitur, nonne Euclides ipſe dicere jubebit, eſſe permutando A ultimò ad B ſicut F ad E. Quòd ſi illud etiam rectè dicitur, cùm ſit præterea F ad E ut C ad D (id enim poſuimus) nonne iterum ex Euclidis mente dicendum erit, eſſe A ad B ultimò ſicut C ad D, ſive rationes, A ad B, C ad D, eſſe ultimò æquales. Evicimus igitur, inquit Newtonus, magnitudines rationeſque mutabiles, quarum mutationes legem à nobis conſtitutam ſervant, habendas eſſe ultimò æquales.

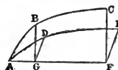
De Ratio-
nibus

ma III) ad summam priorem, & figurâ posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. Q. E. D. [b].

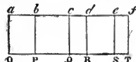
Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eâdem illâ datâ ratione. Nam si in lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut partes, summæ partium

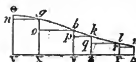
(a) *Cor. H.* 1. Si duæ curvæ (ABC, ADE) axem habeant communem (AF) hujus autem curvæ ordinatæ ad ordinatas alterius datam aliquam rationem gerant, binas utique semper conferendo, quæ ex eodem axis puncto eductæ sint, areæ curvarum AFC, AFE, datam ordinatarum inter se rationem habebunt. Nempe hoc dico; à puncto G in axe curvarum, AF, pro lubitu assumpto eductâ ad perpendiculum rectâ GB, quæ curvis duabus, ABC, ADE, illi in puncto B, huic in puncto D, occurrat, si rectis BG, DG, data aliqua ratio intercedat, quæ eadem obtineat à quocunque demum axis puncto ordinata educatur, eadem arearum etiam, AFC, AFE, inter ipsas ratio erit.

Cor. H. 2. Quòd si recta GB non ad perpendiculum, sed cum datâ quâvis ad axem communem AF inclinatione, educatur, idem obtinebit.



Cor. H. 3. Si verò curvæ duæ, ABC, ADE, eo modo ad se mutuò sint affectæ, ut rectæ, GB, GD, à puncto aliquo G in axe communi, AF, ordinatim eductæ, datis quidem sed diversis ad axem illam inclinationibus, datam inter se rationem gerant; quæ eadem obtineat, à quocunque demum axis puncto ordinatæ illæ educantur; vel sic etiam areis ABCF, ADEF, data quædam ratio intercedet; ea nimirum, quam rectæ à punctis B, D in axem AF ad perpendiculum demissæ inter se habent.





S t

(c) Sint duæ quantitates AB, CD cujuscunque generis quæ in partes quotcunque dividantur, AE, EF, FG, GH, HB; CK, KL, LM, MN, ND; quæ partes totidem in hâc et in illâ sint. Si partes illæ, numero earum infinitè aucto, magnitudinibus verò singularum infinitè imminutis, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque ordine ad cæteras, hoc est si AE ad CK, EF ad KL, FG ad LM, GH ad MN, HB ad ND, datam inter se rationem habeant; hoc si fiat, dicit Newtonus inter quantitates ipsas, AB, CD, eandem rationem datam obtinere, quæ partium evanescentium communis est.

DEMONSTRATIO AD MENTEM NEWTONI.

Exponatur recta OP datæ cujuslibet longitudinis; et in eâdem rectâ, infinitè productâ, capiatur PQ, ad quam OP rationem habeat eandem ac AE ad EF; et QR, ad quam PQ, rationem habeat quam EF

partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultimâ ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultimâ ratione partis ad partem (c). PRIMIS ULTIMISQUE.

LEMMA V.

Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuò respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quàm rectilinea; & areæ sunt in duplicatâ ratione laterum.

EF ad FG; et as, ad quam Qa rationem habeat quam FG ad GH; et ST, ad quam as rationem habeat quam OH ad HA. Rectam OT ad perpendiculum insistat Oa datæ cujuslibet longitudinis, et rectangulum Oafτ compleatur; cujus cum lateribus parallelæ ducantur Pb, Qc, ad, se. Exponatur alia recta VΔ rectæ OT æqualis, in quâ capiantur partes, VX, Xy, yz, zΓ, ΓΔ, partibus OP, PQ, QR, RS, ST, ordine æquales. Rectam VΔ ad puncta V, X, y, z, Γ, Δ, rectæ Vn, Xg, yh, zk, Γl, Δm, ad perpendiculum insistant.

Capiantur Xg, yh, zk, Γl, Δm, ad quas Oa rationes habeat quas AE ad CK, AF ad KL, FG ad LM, GH ad MN, HA ad ND; et rectangula Vg, Xh, yk, zl, Γm compleantur. Jam cùm OP sit ad PQ ut AE ad EF, componendo erit OQ : PQ = AF : FE. Sed PQ : QR = EF : FG. Id enim factum est. Igitur ex æquo OQ : QR = AF : FG, et componendo, OR : QR = AG : GF. Sed, QR : RS = FG : GH. Igitur ex æquo, OR : RS = AG : GH, et componendo OS : SR = AH : HG. Sed RS : ST = GH : HA. Igitur ex æquo OS : ST = AH : HA, et componendo OT : TS = AA : AH. Atque hinc colligitur rectam OT esse ad partes suas, OP, PQ, QR, RS, ST, sicut quantitas AA ad partes suas, AE, EF, FG, GH, HA, ordine sumendas. Et cùm parallelogramma ejusdem altitudinis sint inter se ut bases, rectangula Ob, Pc, Qd, Re, Sf erunt inter se et ad rectangulum totum Of, ut AE, EF, FG, GH, HA, partes quantitatis AA, inter se et ad totam. Atqui propter rectas VX, OP æquales, rectangula Vg, Ob, sunt inter se ut rectæ Xg, Pb; et Xg, Pb, sunt ut CK, AE; ita enim factæ sunt. Rectangulum igitur Vg ad Ob et CK ad AE. Et ex modò ostensis, Ob : Of = AE : AA. Quare ex æquo erit Vg, Of ut CK ad AA. Rursum propter æquales Xy, PQ, erit rectangulum Xh ad Qc ut yh ad Pc, id est ut KL ad AF. Et ex modò ostensis, Qc : Of = EF : AA. Quare ex æquo, Xh : Of = KL : AA. Sed jam ostensum est Vn esse ad Pa ut CK ad AA. Ergo duo rectangula Xh, Vn simul sumpta erunt ad rectangulum Of, ut CK, KL simul sumptæ ad AA (per 24. 5. Elem.) Rursùm propter æquales yz, QR, rectangulum zp : Rc = zk : Qc = LM : FG. Et ex modò ostensis, Rc : Of = FG : AA. Quare ex æquo zp : Of = LM : AA. Tria igitur rectangula simul sumpta zp, yo, Xn erunt ad Of, ut tres ML, LK, CK simul sumptæ, hoc est ut CL ad AA (per 24. 5. Elem.) Atque eandem eundo argumentationis viam eò tandem pervenietur, esse omnia rectangula Δr, Γq, zp, yo, Xn simul sumpta ad rectangulum Of sicut quantitas CO ad quantitatem AA. Atque hæc ita erunt quotcunque fuerint rectangula illa, et quantacunque fuerit cujusque magnitudo. Quare et figura ΔVΘm, cui rectangulorum illorum omnium summa, numero eorum infinitè aucto, magnitudinibus singulorum infinitè imminutis, ultimò fit æqualis, hæc etiam erit ad rectangulum Of sicut CO ad AA.

Sit jam ratio illa data, quæ ultima est evanescentium partium quantitatis AA ad partes quantitatis CO simul evanescentes, ea quam recta s habet ad rectam t.

Jam numero partium quantitatum, AA, CO, infinitè crescente, magnitudinibus singularum infinitè decrescentibus, rectangulorum Ob, Pc, Qd, Re, Sf necnon Vg, Xh, yk, zl, Γm omnium infinitè pariter augeri, magnitudines singularum infinitè pariter diminui, ex constructione et è demonstratis satis patet. Cùm vero recta Oa semper sit ad rectam Xg ut AE ad CK (id enim posuimus) et cùm AE fiat ultimò ad CK, ut s ad t, erit Oa ad Xg ultimò ut s ad t. Sed ut Oa ad Xg ita semper erit rectangulum Ob ad rectangulum Vg, propter OP, VX semper æquales. Ergo Ob ad Vg ultimò ut s ad t. Ac simili ratione rectangula reliqua Pc, Qd, Re, Sf ad reliqua Xh, yk, zl, Γm, ordine sumenda, fient ultimò ut s ad t. Ergo ut s ad t ita erit rectangulum Of ad figuram ΘVΔm (per Lemma). Sed ex suprà ostensis rectangulum Of ad figuram ΘVΔm ut AA ad CO. Habet igitur AA ad CO rationem eam quam s ad t; hoc est, datam illam, quæ partium evanescentium ultimò fit communis. Q. E. D.

De Rationibus

LEMMA VI.

Si arcus quilibet positione datus, ACB, *subtendatur chordâ* AB, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ continuæ* (d), *tangatur à rectâ utrinque productâ* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant, & coeant; dico, quòd angulus* BAD, *sub chordâ & tangente contentus, minuetur in infinitum, & ultimò evanescet.*

Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus ACB cum tangente AD angulum rectilineo æqualem; & propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypothesin.

LEMMA VII.

Iisdem positis; dico quòd ultima ratio arcûs, chordæ, & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis.

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper AB & AD ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & secanti BD parallela agatur *bd*. Sitque arcus A*cb* semper similis arcui ACB. Et punctis A, B coeuntibus, angulus *d*A*b*, per lemma superius, evanescet; ideoque rectæ semper finitæ A*b*, A*d*, & arcus intermedius A*cb* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ AB, AD, & arcus intermedius ACB evanescent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. Q. E. D.

Corol. 1. Unde si per B ducatur tangenti parallela BF, rectam quamvis AF per A transeuntem perpetuò secans in F, hæc BF ultimò

DEFINITIO.

(d) Curvæ cujuspiam, EAC, curvatura in puncto quovis, A, *continua* dicitur, si recta quævis, FA, quæ curvæ in puncto illo occurrat, angulos hinc inde faciat, FAE, FAC, quorum simul sumptorum summa duos rectos propiùs quàm pro datâ quâvis differentiâ accedat.

(e) Si

ultimò ad arcum evaneſcentem ACB rationem habebit æqualitatis; eo quòd completo parallelogrammo AFDB rationem ſemper habet æqualitatis ad AD.

PRIMIS ULTIMISQUE.

Corol. 2. Et ſi per B & A ducantur plures rectæ BE, BD, AF, AG, ſecantes tangentem AD & ipſius parallelam BF; ratio ultima abſciſſarum omnium AD, AE, BF, BG, chordæque & arcûs AB ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR (c) *cum arcu* ACB, *chordâ* AB, *& tangente* AD, *triangula tria* RAB, RACB, RAD *conſtituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico, quòd ultima forma triangulorum evaneſcentium eſt ſimilitudinis, & ultima ratio æqualitatis. (Vide fig. Lemma* VI.)

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur ſemper AB, AD, AR ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipſique RD parallela agi *rbd*, & arcui ACB ſimilis ſemper ſit arcus *Acb*. Et coeuntibus punctis A, B, angulus *bAd* evaneſcet, & propterea triangula tria ſemper finita *rAb*, *rAcb*, *rAd* coincident, ſuntque eo nomine ſimilia & æqualia. Unde & hiſce ſemper ſimilia & proportionalia RAB, RACB, RAD fient ultimò ſibi invicem ſimilia & æqualia. Q. E. D.

Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

LEMMA IX.

Si recta AE *& curva* ABC *poſitione datæ ſe mutuò ſecent in angulo dato,* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* BD, CE, *curvæ occurrentes in* B, C, *dein puncta* B, C *ſimul*

(c) Intellige rectam AR poſitione datam; rectam verò BR eâ lege mobilem, ut cum aliâ aliquâ, poſitione datâ, ſemper ea parallela maneat.

4 *accedant*

DE RATIONIBUS

accedant ad punctum A: *dico, quòd areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimò ad invicem in duplicatâ ratione laterum.*

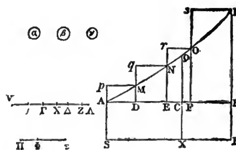
Etenim dum puncta B, C accedunt ad punctum A, intelligatur semper AD produci ad puncta longinqua *d* & *e*; ut sint A*d*, A*e* ipsis AD, AE proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis DB, EC parallelæ, quæ occurrant ipsis AB, AC productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva A*bc* ipsi ABC similis, tum recta A*g*, quæ tangat curvam utramque in A, & secet ordinatam applicatas DB, EC, *db*, *ec* in F, G, *f*, *g*. Tum, manente longitudine A*e*, coeant puncta B, C cum puncta A; &, angulo *c*A*g* evanescente, coincident areæ curvilineæ A*bd*, A*ce*

(ᶠ) Ideoque (per Lemma 5.) erunt, &c.

Hæc sic emendarem, " ideòque erunt in duplicatâ ratione laterum A*d*, A*e*. Sed his areis proportionales semper sunt areæ ABD, ACE, (per Lemma 5.) et his lateribus latera AD, AE. Ergo &c."

Nimirum areas curvilineares A*bd*, A*ce*, cum rectilinearibus A*fd*, A*ge* ultimò congruentes, habere inter se ultimò rationem laterum A*d*, A*e* duplicatam satis patet ex similitudine triangulorum A*fd*, A*ge*, et ex propositione 19 Libri 6 Elementorum Euclidis. Et arearum curvilinearium A*bd*, A*ce*, ABD, ACE constans analogia è lemmate quinto ad hunc modum colligenda est. Areæ curvilineæ ABD, A*bd* inter se sunt similes (id enim ponitur). Ergo ABD : A*bd* = AD² : A*d*² (per Lemma 5.) Simili ratione ACE : A*ce* = AE² : A*e*², (per Lemma 5ᵐ.) Sed AD² : A*d*² = AE² : A*e*²; nimirum cùm rectæ quatuor AD, A*d*, AE, A*e* proportione inter se conveniant. Ergo ABD : A*bd* = ACE : A*ce* (per V. 11. El.) Permutando ABD : ACE = A*bd* : A*ce*.

T H E O R E M A.



(ᵍ) Exponatur recta AB datæ cujusvis longitudinis, quæ in puncto C ita dividatur, ut pars AC sit ad totam AB, ut tempus quoddam *t* ad tempus majus T. Jam dividatur recta AB in partes quotvis, AD, DE, EF, FB; quæ sint inter se et ad totam AB ut temporis T portiones totidem, ordine sumendæ, inter se & ad totum tempus T. Rectam AB in punctis D, E, C, F, B, rectæ, DM, EN, FO, BP, ad perpendiculum insistant; capiantur que DM, EN, FO, BP, quæ sint inter se sicut velocitates, quas corpus quodpiam

ACe cum rectilineis A*fd*, A*ge*; ideoque (per Lemma v.) erunt in duplicatâ ratione laterum A*d*, A*e*: ſed his areis proportionales ſemper ſunt areæ ABD, ACE, & his lateribus latera AD, AE (f). Ergo & areæ ABD, ACE ſunt ultimò in duplicatâ ratione laterum AD, AE. Q. E. D. PRIMIS ULTIMISQUE.

LEMMA X.

Spatia, quæ corpus urgente quâcunque vi finitâ deſcribit, ſive vis illa determinata & immutabilis ſit, ſive eadem continuò augeatur vel continuò diminuatur, ſunt ipſo motûs initio in duplicatâ ratione temporum.

Exponantur tempora per lineas AD, AE, & velocitates genitæ per ordinatas DB, EC; & ſpatia his velocitatibus deſcripta, erunt ut areæ ABD, ACE his ordinatis deſcriptæ (g), hoc eſt, ipſo motûs initio

quodpiam *a*, urgente vi quâpiam finitâ uteunque mutabili, temporibus AD, AE, AF, AB adeptum fuerit. Idque ſemper fieri intelligatur, dum partium AD, DE, EF, FB numerus infinitè augeatur magnitudinibus ſingularum infinitè decreſcentibus: ductâque curvâ, quæ per omnium perpendiculorum puncta extrema A, M, N, O, P, tranſeat, et a puncto C eductâ ad perpendiculum rectâ CQ, quæ curvæ in Q occurrat, ſpatia quæ corpus *a* urgente vi illâ temporibus *t*, T tranſiverit, arearum ACQ, AAP inter ſe proportionem gerent.

Sint enim VX, VA ſpatia, quæ corpus *a* urgente vi illâ temporibus *t*, T tranſivit. Rectam AS in puncto A recta datæ longitudinis, AS, ad perpendiculum inſiſtat. Puta corpus quoddam, *β*, toto tempore T velocitate æquabili latum, quæ ad velocitatem rectâ AP expoſitam datæ rectæ AS ad rectam AP rationem habeat; puta, inquam, corpus *β*, hâc velocitate latum, tempore T ſpatium ΠΣ tranſiiſſe. Capiantur rectæ, *vy*, *y*Γ, ΓΔ, ΔA, æquales ſpatiis quæ corpus quodlibet tertium *γ* temporibus AO, OS, EF, FB, velocitatibus DM, EN, FO, BP latum, deſcriberet. Hoc eſt corpori *γ*, in loco V quieſcenti, puta ictu quodam ſubito velocitatem omnem DM ſimul imprimi; quâ corpus illud *γ* totum tempus AD curſu recto *v*A perſeverans ſpatium *vy* abſolvat. Sub fine autem temporis AD, ſimul ac corpus in locum *y* pervenerit, puta velocitatem primùm impreſſam, OM, novo ictu accedente, in velocitatem EN ſubitò mutari. Et corpus novâ hâc velocitate totum tempus DE curſu recto perſeverans ſpatium *y*Γ conficiat. Et ſub fine temporis DE, ſimul ac corpus in locum Γ pervenerit, puta velocitatem EN novo rurſum ictu in aliam, FO, mutari. Atque idem ſemper fieri intelligatur; nimirum ut ſub fine temporis cujuſque ex illis AO, OS, EF, FB, quæ tempus totum AB, ſive T, conſtituunt, corporis *γ* velocitas in illam ſubitò mutetur, quam corpus *a* ſub fine temporis proximè ſequentis acquiſierit: et velocitatibus hiſce diverſis, temporibus illis AD, DE, EF, FB ordine ſuccedentibus, corpus *γ* ſpatia *vy*, *y*Γ, ΓΔ, ΔA ordine conficiat; donec, conſumpto tandem toto tempore AB, in locum A pervenerit. Compleantur rectangula AS, AS, FR, E*q*, O*p*. Jam ſpatium V*y* habet ad ſpatium ΠΣ rationem compoſitam è rationibus temporis ad tempus et velocitatis ad velocitatem; hoc eſt rectæ AD ad AS, et DM ad AS, ſive rationem rectanguli AM ad rectangulum AS. Ac ſimili ratione ſpatium *y*Γ erit ad ſpatium ΠΣ ut rectangulum ON ad rectangulum AS. Ergo ſpatia V*y*, *y*Γ ſimul ſumpta erunt ad ſpatium ΠΣ ut rectangula AM, DN ſimul ſumpta ad rectangulum AS. (per 24. 5. Elem.) Rurſum ſpatium ΓΔ ad ſpatium ΠΣ ut rectangulum EO ad rectangulum AS. Ergo tria ſpatia V*y*, *y*Γ, ΓΔ, ſive ſpatium *v*Δ, ad ΠΣ, ut tria rectangula AM, DN, EO ſimul ſumpta ad rectangulum AS. Atque eâdem argumentationis viâ eò tandem perventum erit, eſſe omnia rectangula AM, DN, EO, FP, ſimul ſumpta ad rectangulum

De Rationibus initio (per Lemma IX) in duplicatâ ratione temporum AD, AE. Q. E. D.

Corol. 1. Et hinc facilè colligitur, quòd corporum, similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus describentium, errores, qui viribus quibusvis æqualibus ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur per distantias corporum à figurarum similium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus, sine viribus istis, pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proximè.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus, datam aliquam inter se ipsas proportionem servantibus, ad similes figurarum similium partes similiter applicatis, generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum est de spatiis quibusvis quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt. Hæc sunt, ipso motûs initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motûs initio, descripta directè, & quadrata temporum inversè.

Corol. 5. Et quadrata temporum sunt ut descripta spatia directè, & vires inversè.

SCHOLIUM.

Si quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur inter se, & earum aliqua dicatur esse ut est alia quævis directè vel inversè: sensus est, quòd prior augetur vel diminuitur in eâdem ratione cum posteriore, vel cum ejus reciprocâ. Et si earum aliqua dicatur esse ut sunt aliæ duæ vel plures directè vel inversè:

gulum ES ut spatia omnia Vy, yΓ, ΓΔ, ΔA simul sumpta ad spatium ΠΣ. Hinc, si partium AD, DE, EF, FB numerus infinitè augeatur, magnitudinibus singularum infinitè decrescentibus, (ex quo fiet ut spatiorum etiam, Vy, yΓ, ΓΔ, ΔA numerus pariter infinitè crescet, singulorum verò magnitudines infinitè diminuentur) summa rectangulorum omnium, AM, DN, EO, FP, quæ ultimò scilicet evanescentium fit, hoc est (per Lemma 3.) area AKP, erit ad rectangulum ES, ut ultima spatiorum omnium Vy, yΓ, ΓΔ, ΔA evanescentium summa ad spatium ΠΣ.

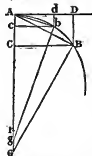
Sed summa ultima spatiorum omnium Vy, yΓ, ΓΔ, ΔA evanescentium, sive longitudo rectæ VA quæ ultimò fit, rectæ VZ æqualis est. Numero enim partium, sive temporum, AD, DE, EF, FB, infinitè crescente, æqualis erit ultimò velocitas, quæ, tempore quovis finito, corpori y accesserit, ei quæ eodem tempore corpori a. Si igitur recta VA non fit ultimò æqualis rectæ VZ, sint illæ rectæ ultimò inæquales. Corpus igitur a, quod urgente vi finitâ secundum legem quandam mutabili, motu à puncto V incepto, cursu recto tempore T perseveravit, sub fine temporis T in locum Z devenerit. Et corpus aliud y, quod urgente eâdem vi finitâ juxta eandem legem mutabili, motu ab

inversè: sensus est, quòd prima augetur vel diminuitur in ratione, quæ componitur ex rationibus, in quibus aliæ, vel aliarum reciprocæ, augentur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B directè & C directè & D inversè: sensus est, quòd A augetur, vel diminuitur, in eâdem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$; hoc est, quòd A & $\frac{BC}{D}$ sunt ad invicem in ratione datâ. PRIMIS ULTIMISQUE.

LEMMA XI.

Subtensa evanescens anguli contactûs, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactûs habentibus, est ultimò in ratione duplicatâ subtensæ arcûs contermini.

Cas. 1. Sit arcus ille AB, tangens ejus AD, subtensa anguli contactûs ad tangentem perpendicularis BD, subtensa arcûs AB. Huic subtensæ AB & tangenti AD perpendiculares erigantur AG, BG, occurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta *d*, *b*, *g*, sitque J intersectio linearum BG, AG ultimò facta, ubi puncta D, B accedunt usque ad A. Manifestum est, quòd distantia GJ minor esse potest quàm assignata quævis. Est autem (ex naturâ circulorum per puncta ABG, A*bg* transeuntium) AB *quad.* æquale AG × BD, & A*b quad.* æquale A*g* × *bd*; ideoque ratio AB *quad.* ad A*b quad.* componitur ex rationibus AG ad A*g* & BD ad *bd*. Sed quoniam GJ assumi potest minor longitudine quâvis assignatâ, fieri potest, ut ratio AG ad A*g* minùs differat à ratione æqualitatis, quàm pro differentiâ quâvis assignatâ; ideoque ut ratio AB *quad.* ad A*b quad.* minùs



ab eodem puncto V incepto, eodem cursu recto eodem tempore perseveravit, sub ejusdem temporis fine in alium locum A devenerit. Quod est absurdum. Non igitur sunt inæquales rectæ VZ et spatiorum V*y*, *y*Γ, ΓΔ, AA summa quæ ultima evanescentium fit. Æquales igitur. Ergo area ABP erit ad rectangulum BS ut VZ ad ΠΣ.

Jam verò recta CQ producta rectæ SA in X occurrat, et capiatur ΠΦ æqualis spatio, quod corpus velocitate æquabili AS latum, tempore *t*, seu AC, absolveret. Atque eodem argumento quo hactenus usi sumus, ostendere licet aream ACQ esse ad rectangulum CS ut spatium VX ad spatium ΠΦ. Invertendo CS : ACQ = ΠΦ : VX.

Cùm igitur sit ABP : BS = VZ : ΠΣ
et BS : CS = BA : AC = T : *t* = ΠΣ : ΠΦ
et CS : ACQ = ΠΦ : VX.
Erit, ex æquo, ABP : ACQ = VZ : VX. Q. E. D.

2. differat

De Rationibus differat à ratione BD ad *bd* quàm pro differentiâ quâvis assignatâ. Est ergo, per Lemma 1, ratio ultima AB *quad.* ad A*b* *quad.* eadem cum ratione ultimâ BD ad *bd.* Q. E. D.

Cas. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima BD ad *bd* quæ priùs, ideoque eadem ac AB *quad.* ad A*b* *quad.* Q. E. D.

Cas. 3. Et quamvis angulus D non detur, sed recta BD ad datum punctum convergat, vel aliâ quâcunque lege constituatur; tamen anguli D, *d*, communi lege constituti, ad æqualitatem semper vergent; & propiùs accedent ad invicem quàm pro differentiâ quâvis assignatâ, ideoque ultimò æquales erunt, per Lem. 1; & propterea lineæ BD, *bd* sunt in eâdem ratione ad invicem ac priùs. Q. E. D.

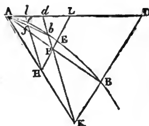
Corol. 1. Unde cùm tangentes AD, A*d*, arcus AB, A*b*, & eorum sinus BC, *bc* fiant ultimò chordis AB, A*b* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimò ut subtensæ BD, *bd*.

Corol. 2. Eorundem quadrata sunt etiam ultimò ut sunt arcuum sagittæ, quæ chordas bisecant, & ad datum punctum convergunt. Nam sagittæ illæ sunt ut subtensæ BD, *bd* (h).

Corol. 3. Ideoque sagitta est in duplicatâ ratione temporis quo corpus datâ velocitate describit arcum.

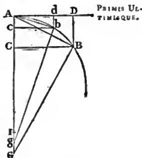
Corol. 4. Triangula rectilinea ADB, A*db* sunt ultimò in triplicatâ ratione laterum AD, A*d*, inque sesquiplicatâ laterum DB, *db*; utpote in compositâ ratione laterum AD & DB, A*d* & *db* existentia.

Sic



(h) Sagittæ, EF, *ef*, chordas, AB, A*b*, medias dividentes, in dato puncto H concurrant. Jungatur AH, et in AH productâ capiatur HK = AH; junctæque K*b*, KB et productæ contingenti AD in punctis *d*, D occurrant. Eidem contingenti occurrant sagittæ, *fe*, FE, productæ in punctis *l*, L. Ex constructione AH : AK = AF : AB. Sunt igitur HF, KB, sive FL, BD inter se parallelæ. Coeuntibus igitur punctis B, A ratio ultima evanescentis EL ad BD evanescentem, quadrati ex evanescente AE ad quadratum ex evanescente AB ultima erit (per Lemma). Eadem igitur quæ est quadrati ex AF ad quadratum ex AB, sive unitatis ad quaternarium: fiunt enim AF, AE ultimò æquales. Sed propter rectas BD, FL parallelas, erit BD ad

Sic & triangula ABC, A*bc* ſunt ultimò in triplicatâ ratione laterum BC, *bc*. Rationem verò ſeſquiplicatam voco triplicatæ ſubduplicatam, quæ nempe ex ſimplici & ſubduplicatâ componitur.



PRIMIS ULTIMISQUE.

Corol. 5. Et quoniam DB, *db* ſunt ultimò parallelæ & in duplicatâ ratione ipſarum AD, A*d*: erunt areæ ultimæ curvilineæ ADB, A*db* (ex naturâ parabolæ) ([1]) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum ADB, A*db*; & ſegmenta AB, A*b* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ et hæc ſegmenta erunt in duplicatâ ratione tum tangentium AD, A*d*, tum chordarum & arcuum AB, A*b*.

SCHOLIUM.

Cæterùm in his omnibus ſupponimus angulum contactûs nec infinitè majorem eſſe angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus ſuis, nec iiſdem infinitè minorem; hoc eſt, curvaturam ad punctum A, nec infinitè parvam eſſe, nec infinitè magnam; ſeu intervallum AJ finitæ eſſe magnitudinis. Capi enim poteſt DB ut AD^3: quo in caſu circulus nullus, per punctum A, inter tangentem AD & curvam AB, duci poteſt, proindeque angulus contactûs erit infinitè minor circularibus. Et ſimili argumento ſi fiat DB ſucceſſivè ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur ſeries angulorum contactûs pergens in infinitum, quorum quilibet poſterior eſt infinitè minor priore. Et ſi fiat DB ſucceſſivè ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia ſeries infinita angulorum contactûs, quorum primus eſt ejuſdem generis cum circularibus, ſecundus infinitè major, & quilibet poſterior infi-

ad FL, ut AB ad AF hoc eſt ut quaternarius ad binarium. Quare ex æquo ratio ultima rectæ EL ad FL unitatis erit ad binarium. Ergo FE, EL ſiunt ultimò æquales, ac proinde EF erit ultimò ad BD ſicut unitas ad quaternarium. Simili ratione oſtendetur eſſe *ef* ad *bd* ultimò ſicut unitas ad quaternarium. Quare ultimò EF : BD = *ef* : *bd*; et permutando, ultimò, EF : *ef* = BD : *bd*. Sed BD, *bd* ad datum punctum K vergunt. Quare (per Lemma II.) punctis, B, *b*, in A coeuntibus, quadrata ex ſubtenſis evaneſcentibus AB, A*b* ſunt ultimò inter ſe ſicut evaneſcentes BD, *bd*: hoc eſt, ſicut ſagittæ EF, *ef* evaneſcentes. Q. E. D.

([1]) *Ex natura parabolæ.* Etenim cùm BD, *bd* evaneſcentes rationem inter ſe ultimam habeant evaneſcentium AD, A*d* duplicatam, arcus evaneſcens AB, cujuſcunque demum generis curva AB fuerit, ab evaneſcente arcu parabolico ultimò non differt.

De Rationibus.

nitè major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series, utrinque in infinitum pergens, angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinitè major minorve priore. Ut si inter terminos AD^2 & AD^3 inseratur series $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum, ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem ([k]).

Quæ de curvis lineis, deque superficiebus comprehensis, demonstrata sunt, facilè applicantur ad solidorum superficies curvas, & contenta. Præmisi verò hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonstrationes, more veterum geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis, & propterea methodus illa minùs geometrica censetur; malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasque nascentium, id est, ad limites summarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonstrationes, quâ potui brevitate, præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilium; & principiis demonstratis jam tutiùs utemur. Proinde in sequentibus, siquando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium lemmatum semper revocari.

Objectio est, quòd quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æquè contendi posset, nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est: per velocitatem ultimam intelligi eam, quâ corpus movetur, neque antequam attingit lo-

([k]) Vide Keil. Introduct. ad Veram Physicam. Lect. 4.

cum ultimum & motus ceſſat, neque poſtea, ſed tunc cùm attingit; id eſt, illam ipſam velocitatem quâcum corpus attingit locum ultimum, & quâcum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium, intelligendam eſſe rationem quantitatum, non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quâcum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quâcum naſcuntur. Et ſumma prima & ultima eſt quâcum eſſe (vel augeri aut minui) incipiunt & ceſſant. Extat limes, quem velocitas in fine motûs attingere poteſt, non autem transgredi. Hæc eſt velocitas ultima. Et par eſt ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & ceſſantium. Cúmque hic limes ſit certus & definitus, problema eſt verè geometricum, eundem determinare. Geometrica verò omnia, in aliis geometricis determinandis ac demonſtrandis, legitimè uſurpantur. PRIMIS ULTIMISQUE.

Contendi etiam poteſt, quòd ſi dentur ultimæ quantitatum evaneſcentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & ſic quantitas omnis conſtabit ex indiviſibilibus, contrà quàm *Euclides* de incommenſurabilibus, in libro decimo elementorum, demonſtravit. Verùm hæc objectio falſæ innititur hypotheſi. Ultimæ rationes illæ quibuſcum quantitates evaneſcunt, reverâ non ſunt rationes quantitatum ultimarum, ſed limites, ad quos quantitatum, ſine limite decreſcentium, rationes ſemper appropinquant; & quas propiùs aſſequi poſſunt, quàm pro datâ quâvis differentiâ, nunquam verò tranſgredi; neque priùs attingere quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ, quarum data eſt differentia, augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis; nec tamen ideò dabuntur quantitates ultimæ, ſeu maximæ, quarum iſta eſt ratio. In ſequentibus igitur, ſiquando, facili rerum conceptui conſulens, dixero quantitates quàm minimas, vel evaneſcentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, ſed cogita ſemper diminuendas ſine limite.

DE ANALYSI

PER ÆQUATIONES NUMERO TERMINORUM

INFINITAS.

ARGUMENTA CAPITUM HUJUS LIBRI.

DE

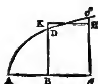
D E A N A L Y S I

PER ÆQUATIONES NUMERO TERMINORUM INFINITAS.

METHODUM generalem, quam, de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensurandâ, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam, potiùs quàm accuratè demonstratam, habes.

CAPUT PRIMUM.

CAPUT PRIMUM.



BASI AB Curvæ alicujus AD, sit Applicata BD perpendicularis: Et vocetur $AB = x$, $BD = y$, & sint a, b, c, &c. Quantitates datæ, & m, n, Numeri Integri. Deinde,

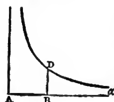
Curvarum Simplicium Quadratura.

R E G U L A I.

Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *Erit* $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} =$ *Areæ* ABD.

Res Exemplo patebit.

1. Si x^2 $(= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$, hoc est, $a = 1 = n$, & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3 =$ ABD.
2. Si $4\sqrt{x}$ $(= 4x^{\frac{1}{2}}) = y$; Erit $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $(= \frac{8}{3}\sqrt[2]{x^3} =$ ABD.
3. Si $\sqrt[3]{x^5}$ $(= x^{\frac{5}{3}}) = y$; Erit $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$ $(= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}) =$ ABD.
4. Si $\frac{1}{x^2}$ $(= x^{-2}) = y$; id est, si $a = 1 = n$, & $m = -2$;



Erit $(-\frac{1}{1}x^{-\frac{1}{1}} =) -x^{-1}$ $(= -\frac{1}{x}) = \alpha$BD, infinitè versus α protensæ; quam Calculus ponit negativam, propterea quòd jacet ex alterâ parte lineæ BD.

5. Si $\frac{1}{\sqrt{x^3}}(= x^{-\frac{3}{2}}) = y$; Erit $(-\frac{2}{1}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{-\sqrt{x}} =$ BDα.
6. Si $\frac{1}{x}$ $(= x^{-1}) = y$; Erit $\frac{1}{0}x^{\frac{0}{1}} = \frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0} \times 1 = \frac{1}{0} =$ Infinitæ; qualis est Area Hyperbolæ ex utrâque parte lineæ BD.

Caput Secundum.

CAPUT SECUNDUM.

Compositarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

REGULA II.

Si valor ipsius y *ex pluribus istiusmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis, quæ à singulis Terminis emanant.* (a)

Exempla

Regulæ Primæ.

(a) Duabus hisce regulis, quæ ex Problemate Secundo Quadraturæ Curvarum facilè sunt deducendæ, omnis ferè Arithmetica Infinitorum Wallisii summatim comprehensa est. Ac Primam quidem Wallisius ipse allegavit; Arithmet. inf. prop. 64 & 102; Secundam verò, si minùs verbis, saltem exemplis patefecit. Demonstrationem prioris syntheticam, simplicitate et elegantiâ planè admirabilem, haud ingratum certè Geometris fecero, si è Fermatio apponam.

"Unico, quod notissimum est, Proportionis Geometricæ attributo tota hæc methodus innititur.

"Theorema hoc est. *Datâ quâvis proportione geometricâ, cujus termini decrescant in infinitum, est ut differentia terminorum progressionem constituentium ad minorem terminum, ita maximus progressionis terminus ad reliquos omnes in infinitum sumptos.*

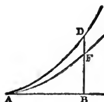
"Hoc posito, proponatur primò HYPERBOLÆ quadranda. Exponatur si placet hyperbola, cujus ea sit proprietas, ut sit semper ut quadratum rectæ HA ad quadratum rectæ AG ita recta OK ad rectam HI; et ut quadratum OA ad quadratum AH ita recta HI ad rectam ON. Aio spatium infinitum, cujus basis GE, & curva ES ex uno latere, ex alio vero asymptotos infinita GOA, æquari spatio rectilineo dato. Fingantur termini progressionis Geometricæ in infinitum extendendæ, quorum primus sit AG, secundus AH, tertius AO, in infinitum: et ad se per approximationem tantum accedant, quantum satis sit, ut juxta methodum Archimedeam parallelogrammum rectilineum $GE \times GH$, quadrilineo mixto GHIE adæquetur. Item ut priora ea intervallis rectis proportionalium, GH, HO, OM, & similia, sint ferè inter se æqualia; ut commodè per ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον, per circumscriptiones et inscriptiones, Archimedea demonstrandi ratio institui possit: quod semel monuisse sufficiat.

"His positis, cùm sit $AG : AH = AH : AO = AO : AM$, erit pariter ut AO ad AH ita intervallum GH ad HO, et ita intervallum HO ad OM, &c. Parallelogrammum autem $AG \times GH$ erit ad parallelogrammum $HI \times HO$, ut parallelogrammum $HI \times HO$ ad parallelogrammum $NO \times OM$. Cùm enim ratio parallelogrammi $GE \times GH$ ad $HI \times HO$ componatur ex ratione rectæ GE ad rectam HI, et ex ratione rectæ GH ad HO; sit autem $GH : HO = AG : AH$, ut prædiximus: ergo, ratio parallelogrammi $GE \times GH$ ad parallelogrammum $HI \times HO$ componitur ex ratione GE ad HI, et ex ratione AG ad AH. Sed $GE : HI = AH^2 : AG^2$ (ex hyp.) et $AH^2 : AG^2 = AO : AG$, propter proportionales. Ergo ratio parallelogrammi $GE \times GH$ ad $HI \times HO$ componitur ex ratione AO ad AG et AG ad AH. Sed ratio AO ad AH componitur ex illis duabus. Ergo parallelogrammum $GE \times GH$ ad parallelogrammum $HI \times HO$ ut AO ad AH, sive ut AH ad AG. Similiter probabitur parallelogrammum $HI \times HO$ esse ad parallelogrammum $NO \times OM$ ut AM ad AO, hoc est ut AH ad AG. Ergo parallelogramma $EO \times GH$, $HI \times HO$, $NO \times OM$, &c in infinitum sumpta erunt continuè proportionalia, in ratione rectæ HA ad GA. Est igitur, ex theoremate hujus methodi constitutivo, ut GH, differentia terminorum, ad minorem terminum GA, ita primum parallelogrammum $EO \times GH$ ad reliqua in infinitum parallelogramma; hoc est, ex adæquatione Archimedeâ, ad figuram sub HI asymptoto HA, et curvâ IND, in infinitum extendendâ, contentam. Sed ut HG ad GA ita, sumptâ communi latitudine rectâ GE, parallelogrammum $GE \times GH$ ad parallelogrammum $GE \times GA$. Ergo parallelogrammum $GE \times GA$, quod est spatium rectilineum datum, adæquatur figuræ prædictæ. Cui si addas parallelogrammum $GE \times GH$, quod propter minutissimos τμηματισμοὺς evanescit, et abit in nihilum, superest verissimum et Archimedeâ licet prolixiore demonstratione facillimè firmandum, parallelogrammum AE, in hâc hyperbolæ specie, æquari figuræ sub base GE, asymptoto OA, curvâ ED, in infinitum producendâ, contentæ. Nec operosum ad omnes omninò hujusmodi hyperbolas, unâ demptâ, inventionem extendere.

"Sit

Exempla Prima.

Quadratura Compositarum.



1. Si $x^2+x^{\frac{3}{2}}=y$; Erit $\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ ABD.

Etenim si semper sit $x^2=$ BF, et $x^{\frac{3}{2}}=$ FD, erit, ex præcedente Regulâ, $\frac{1}{3}x^3=$ superficiei AFB descriptæ per lineam BF, et $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ AFD descriptæ per DF; Quare $\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ toti ABD.

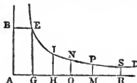
2. Sic si $x^2-x^{\frac{3}{2}}=y$; Erit $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ ABD.

3. Et si $3x-2x^2+x^3-5x^4=y$; Erit $\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4-x^5=$ ABD.

Exempla

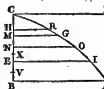
Demonstratio Fermatiana.

" Sit ea alterius, si placet, hyperbolæ proprietas, ut sit GE ad HI ut cubus rectæ HA ad cubum rectæ AG, & sic de reliquis. Expositâ ex more infinitâ proportionalium, ut suprà, serie, fient proportionalia parallelogramma EH, IO, NM ut suprà in infinitum. In hoc verò casu parallelogrammum primum erit ad secundum, et secundum ad tertium, &c. ut recta AO ad AG, quod statim compositio proportionum manifestabit. Erit igitur ut parallelogrammum EH ad figuram, ita recta OG ad AG; & sumptâ communi latitudine GE, ita parallelogrammum OG × GE ad parallelogrammum AG × GE. Est igitur ut parallelogrammum OG × GE ad parallelogrammum AG × GE, ita parallelogrammum EG × GH ad figuram. Et vicissim ut parallelogrammum OG × GE, ad parallelogrammum EG × GH, ita AG × GE ad figuram. Ut autem parallelogrammum OG × GE ad EG × GH ita OG ad GH, sive 2 ad 1 ex adæquatione: intervalla enim basi proxima facta sunt ex constructione fere (*sive ultimo*) æqualia inter se. Ergo, in hac hyperbolâ, parallelogrammum EGA, quod est æquale spatio rectilineo dato, est duplum figuræ sub base GE, asymptoto GB, et curvâ ESO in infinitum protensâ.



" Similis in quibuslibet aliis casibus habebit locum demonstratio; nisi quòd in primariâ, sive Apollonianâ et simplici hyperbolâ, deficit eâ solâ ratione methodus, quia in hâc parallelogramma, EH, IO, NM sunt semper inter se æqualia; atque ideo cùm termini progressionis constitutivi sint inter se æquales, nulla inter eos est differentia, quæ totum in hoc negotio conficit mysterium.

" Eâdem ratione PARABOLÆ omnes omninò quadrantur; nec est ulla, quæ ab artificio nostræ methodi, ut fit in hyperbolis, possit esse immunis.

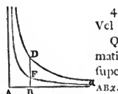


" Sit semiparabola primaria AGBE cujus diameter CB, semibasis AB: sumptis autem applicatis IE, ON, GM, &c. sit semper ut quadratum AB ad quadratum IE, ita recta BC, ad CE; et ut quadratum IE ad quadratum ON ita recta EC ad CN: et sic in infinitum. Intelligantur, ex more methodi, rectæ BC, EC, NC, MC, HC, in infinitum, continuè proportionales. Erunt etiam, ut superiùs probatum est, proportionalia parallelogramma, AE, IN, OM, GH in infinitum. Ut cognoscatur ratio parallelogrammi AE ad parallelogrammum IN, recurrendum ex methodo ad compositionem proportionum. Componitur autem ratio parallelogrammi AE ad parallelogrammum IN ex ratione AB ad IE et ex ratione BE ad EN. Cùm autem sit ut AB quadratum ad IE quadratum, ita BC ad CE; si inter BC & CE sumatur media proportionalis CV, item inter EC, & CN, media proportionalis XC, erunt continuè proportionales BC, VC, EC, XC, NC: et ut BC ad EC ita quadratum BC ad quadratum CV. Sed BC : EC = AB^2 : IE^2. Ergo BC : CV^2 = AB : IE^2, et BC : CV = AB : EI. Ratio igitur parallelogrammi AE ad parallelogrammum IN componetur ex ratione BC ad VC, sive VC ad CE, sive EC ad CX, et ex ratione BE ad EN, sive BC ad CE. Ratio autem quæ componitur ex his duabus rationibus, BC nempe ad CE, et CE ad CX, est eadem quæ ratio BC ad CX. Igitur parallelogrammum AE est ad

 " parallelo-

CAPUT SECUNDUM.

Exempla Secunda.



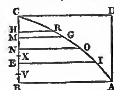
4. Si $x^{-2}+x^{-\frac{3}{2}}=y$; Erit $-x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}=\alpha$BD. Vel si $x^{-2}-x^{-\frac{3}{2}}=y$; Erit $-x^{-1}+2x^{-\frac{1}{2}}=\alpha$BD.

Quarum signa si mutaveris, habebis Affirmativum valorem ($x^{-1}+2x^{-\frac{1}{2}}$ vel $x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}$) superficiei αBD, modò tota cadat supra basim ABα.

5. Sin

REGULÆ PRIMÆ

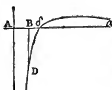
" parallelogrammum IN ut BC ad CX. [*Atque eadem erit ratio parallelogrammi* IN *ad parallelogrammum* OM, *et parallelogrammi* OM *ad parallelogrammum* GH, &c.] Ideoque ex theoremate methodi " constitutivo parallelogrammum AB erit ad figuram IRCHB ut recta BX ad rectam XC; ideoque



" ut idem parallelogrammum AE ad totam figuram AIGRCB ita " recta BX ad totam diametrum BC. Ut autem recta BX ad totam diametrum BC, ita, sumptâ communi latitudine AB, parallelogrammum AB × BX ad parallelogrammum AB × BC, sive " parallelogrammum BD, ductâ AD diametro parallelâ occurrente " tangenti CH in O. Ergo ut parallelogrammum AE ad totam " figuram semiparabolicam ABCB, ita parallelogrammum AB × BX " ad parallelogrammum BD. Et vicissim ut parallelogrammum " AE ad parallelogrammum AB × BX ita, figura ad parallelogrammum BD. Ut autem parallelogrammum AE ad AB × BX, ita, " propter communem latitudinem, recta BE ad BX. Ergo ut BE ad BX ita figura ad parallelogrammum. Est autem BE ad BX, propter adæqualitatem, & sectiones minutissimas, quæ " rectas BV, VE, EX, intervalla proportionalium repræsentantes, ferè inter se supponit æquales, " ut 2 ad 3. Ergo figura semiparabolica ABCB ad parallelogrammum BD, ut 2 ad 3.

" Rursum, sit curva AICA, cujus basis AB diameter CB, ejus generis parabola, ut cubus applicatæ AB sit ad cubum applicatæ IE ut " quadratum rectæ BC ad quadratum rectæ CE, et reliqua ponantur " ut suprà. Series nempe proportionalium rectarum BC, CE, CN, " CM, &c. item series proportionalium parallelogrammorum AE, IN, " OM, &c. in infinitum. Inter BC et EC sumantur duæ mediæ proportionales, CV, CR. Item inter EC & CN sumantur etiam duæ " mediæ proportionales CS, CT. Constat ex constructione, cùm ratio " BC ad EC sit eadem rationi EC ad NC, fore quoque continuè proportionales rectas BC, CV, CR, CE, CS, CT, CN. Est autem AB³:IE³= " CB²:CE²=CB:NC Cùm autem sint, ut suprà probavimus, septem continuè proportionales, BC, " CV, CR, CE, CS, CT, CN, ergo prima, tertia, quinta, septima erunt etiam continuè proportionales: Ideoque erit BC ad RC ut RC ad CS, et ut CS ad CN. Ut igitur prima BC ad quartam " NC ita cubus primæ BC ad cubum secundæ RC. Sed ut BC ad NC ita probavimus esse cubum AB " ad cubum IE. Ergo AB³:IE³=BC³:RC³, et AB:IE=BC:RC. Cùm igitur ratio parallelogrammi " AB ad parallelogrammum IN, componatur ex ratione AB ad IE, et ex ratione BE ad EN, sive " BC ad EC; eadem parallelogrammorum ratio componetur ex ratione BC ad RC et EC ad NC. " Ut autem BC prima septem proportionalium ad EC quartam, ita RC tertia, ad CT sextam. " Ergo parallelogrammi AE ad parallelogrammum IN ratio componitur ex ratione BC ad RC et " RC ad TC: hoc est parallelogrammum AE est ad parallelogrammum IN ut BC ad CT. Parallelogrammum igitur AE, ex prædemonstratis, est ad figuram IGCA ut BT ad CT; ideoque ut " parallelogrammum AE ad totam figuram AICB, ita recta BT ad rectam BC, sive AB × BT, ad " AB × BC, vel BD. Et vicissim parallelogrammum AE ad AB × BT, sive recta BE ad rectam BT, ut " figura AICA ad parallelogrammum BO. Recta autem BT continet quinque intervalla TS, SE, " ER, RV, VB, quæ inter se, propter nostram methodum, censentur æqualia. Recta autem BE " continet tria ex iis intervallis, nempe ER, RV, VB. Ergo BE est ad BT, ac propterea figura " AICA ad parallelogrammum BD, ut 3 ad 5.

" CANON verò universalis inde nullo negotio elicietur. Patet nempe semper fore parallelogrammum BO ad figuram AICB ut aggregatum exponentium potestatum applicatæ et diametri " ad



5. Sin aliqua pars cadat infra (quod fit cùm Curva decuſſat ſuam Baſin inter B et α, ut hîc vides in δ,) iſtâ parte à parte ſuperiori ſubductâ, habebis valorem Differentiæ:(b) Earum verò Summam ſi cupis, quære utramque Superficiem ſeorſim, et adde. Quod idem in reliquis hujus Regulæ exemplis notandum volo. QUADRATURA COMPOSITARUM.

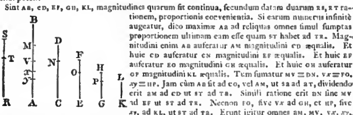
Exempla

" ad exponentem poteſtatis applicatæ. Ut in hoc exemplo videre eſt, in quo poteſtas applicatæ AA eſt cubus, cujus exponens 3; poteſtas autem diametri eſt quadratum, cujus exponens 2. Ergo debet eſſe AO ad AIEA, ut jam demonſtravimus, & perpetuò conſtabit, ut ſumma 3 & 2, hoc eſt 5, ad 3, exponentem applicatæ. DEMONSTRATIO FERMATIANA.

" In hyperbolis autem Canon non minori facilitate invenietur univerſalis. Erit enim in quâcunque hyperbolâ, parallelogrammum AO (vid. fig. p. 259.) ad figuram in infinitum protenſam, AGRD, ut differentia poteſtatum applicatæ & diametri ad exponentem poteſtatis applicatæ." Nempe verbis hic dicit Fermatius quæ Newtonus, Regulâ ſuâ Primâ, ſymbolis.

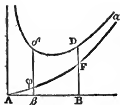
Cæterùm Theorema, ex quo deductæ ſunt Fermatii demonſtrationes, ad hunc ferè modum oſtendi poteſt.

Sint AB, CD, EF, GH, KL, magnitudines quarum ſit continua, ſecundum datam duarum RS, RT rationem, proportionis convenientia. Si earum numerus infinitè augeatur, dico maximæ AB ad reliquas omnes ſimul ſumptas proportionem ultimam eam eſſe quam ST habet ad TR. Magnitudini enim AB auferatur AM magnitudini CD æqualis. Et huic CD auferatur CN magnitudini EF æqualis. Et huic EF auferatur EO magnitudini GH æqualis. Et huic GH auferatur GP magnitudini KL æqualis. Tum ſumatur MV = DN. Vx = FO. xy = HP. Jam cùm AB ſit ad CD, vel AM, ut SR ad RT, dividendo erit BM ad CD ut ST ad TR. Simili ratione erit DN ſive MV ad EF ut ST ad TR. Necnon FO, ſive Vx ad GH, et HP, ſive xy, ad KL, ut ST ad TR. Erunt igitur omnes BM, MV, Vx, xy, ſimul ſumptæ, ſive By, ad omnes CD, EF, GH, KL, ſimul ſumptas ut ST ad TR. (per 12. 5. Elem.) Et quotcunque fuerint magnitudines illæ AB, CD, EF, GH, KL proportione inter ſe continuè convenientes, hæc ratio ſummæ differentiarum By ad ſummam omnium à maximâ manet. Quare major erit AB quam ut habeat ad omnium reliquarum ſummam rationem eam quam ST ad TR. Sed eo minùs quidem major quo minor fuerit Ay. Et Ay ultimæ reliquarum KL ſemper eſt æqualis, ut ex conſtructione ſatis patet. Et numero omnium infinitè creſcente, ultima illarum infinitè minuetur, & minor fiet ultimò quâvis datâ. Quare magnitudo Ay minor fit ultimo quâvis datâ. Quare magnitudo By ipſi AB fit ultimò æqualis; & rationes magnitudinis AB ad ſummam omnium CD, EF, GH, KL, ſimul ſumptas, & alterius By ad eandem ſummam fiunt ultimò æquales. (Newton De Rat. prim. & ult. 1.) Sed By ad ſummam illam rationem eam quam ST ad TR ſemper habet, ex ſuprà oſtenſis. Eadem igitur ratio ST ad TR magnitudinis AB ad omnes CD, EF, GH, KL ultima erit. Q. E. D.



(b) Sit Curva CDE cujus abſciſſa AB, x, ordinatim applicata BC, y. Naturam vero curvæ hæc æquatio definiat, $x^{-2} - x^{-\frac{3}{2}} = y$. Talis quidem curva baſin AA ſecabit. Secet in D. Dico quantitatem $2x^{-\frac{1}{2}} - x^{-1}$, quæ ex calculo ſecundum regulam Newtonianam peracto pro areâ provenerit, arearum CDA, αDA differentiam eſſe. Per D ducatur DF cum ordinatis (BC) curvæ CDE parallela. Et capiatur DF = 1 = AD. In BC, ordinatâ quâvis curvæ CDE, capiatur BG = x^{-2}. Et per GF ſcribatur curva GFH quam punctum G perpetuò tangit; ſive cujus ea ſit natura, ut $x^{-2} = z$, deſignante x abſciſſam AB, z ordinatam BG. Jam per regulam primam $-x^{-1}$ = areæ HGAα. Sed cùm GB = x^{-2}, et BC = $x^{-2} - x^{-\frac{3}{2}}$, erit GC = $x^{-\frac{3}{2}}$. Et $-2x^{-\frac{1}{2}}$ = areæ HFGCE curvis

Exempla Tertia.



6. Si $x^2+x^{-2}=y$; Erit $\frac{1}{3}x^3-x^{-1}$ = Superficiei descriptæ. Sed hîc notandum est, quòd dictæ Superficiei partes sic inventæ jacent ex diverso latere lineæ BD.

Nempe, posito x^2 = BF, & x^{-2} = FD; Erit $\frac{1}{3}x^3$ = ABF Superficiei per BF descriptæ, & $-x^{-1}$ = DFα Superficiei descriptæ per DF.

7. Et hoc semper accidit, cùm indices $(\frac{m+n}{n})$ rationum Basis x in valore Superficiei quæsitæ, sint variis Signis affecti. In hujusmodi Casibus, pars aliqua BDδβ Superficiei media (quæ sola dari poterit, cùm Superficies sit utrinque infinita) sic invenitur.

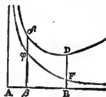
8. Subtrahe Superficiem ad minorem Basin Aβ pertinentem, à Superficie ad majorem Basin AB pertinente, & habebis βBDδ Superficiem differentiæ Basium insistentem. Sic in hoc Exemplo *(Vide Fig. præcedentem.)* Si AB = 2, & Aβ = 1; Erit βBDδ $=\frac{17}{6}$.

Etenim Superficies ad AB pertinens (viz. ABF−DFα) erit $\frac{8}{3}-\frac{1}{2}$, sive $\frac{13}{6}$; et superficies ad Aβ pertinens (viz. Aφβ−δφα) erit $\frac{1}{3}-1$, sive $-\frac{2}{3}$: et earum differentia (viz. ABF−DFα−Aφβ+δφα=βBDδ) erit $\frac{13}{6}+\frac{2}{3}$, sive $\frac{17}{6}$.

9. Eodem modo, si Aβ=1, AB=x; erit βBDδ$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x^3-x^{-1}$.

10. Sic si $2x^3-3x^5-\frac{2}{3}x^{-4}+x^{-\frac{3}{5}}=y$, & Aβ=1; Erit βBDδ$=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^6+\frac{2}{9}x^{-3}+\frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}}-\frac{49}{18}$.

11. Denique notari poterit, quòd si quantitas x^{-1} in valore ipsius y reperiatur, iste terminus (cùm hyperbolicam superficiem generat) seorsim à reliquis considerandus est.



Ut si $x^2+x^{-3}+x^{-1}=y$: sit x^{-1} = BF, & x^2+x^{-3}=FD, ac Aβ = 1; et erit δφFD$=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^{-2}$, utpote quæ ex terminis x^2+x^{-3} generatur.

Quare

curvis duabus HFG, CDE interceptæ. Hinc $2x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}$ arearum HGBA, HGCDE differentia erit. Sed duarum HGBA, HGCDE, eadem quæ duarum CDE, ADE differentia erit; nempe cùm pars ADCGH utrque

Quare, ſi reliqua ſuperficies $\beta\varphi$FB, quæ hyperbolica eſt, ex calculo aliquo ſit data, dabitur tota βBDδ. QUADRATURA COMPOSITARUM.

CAPUT TERTIUM.

Aliarum Omnium Quadratura.

REGULA III.

Sin valor ipſius y, vel aliquis ejus Terminus ſit præcedentibus magis compoſitus, in Terminos Simpliciores reducendus eſt; operando in Literis, ad eundem Modum quo Arithmetici, in Numeris Decimalibus, dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes ſolvunt; & ex iſtis Terminis quæſitam Curvæ Superficiem, per præcedentes Regulas, deinceps elicies.

Exempla Dividendo.

1. SIT $\frac{aa}{b+x} = y$, curvâ nempe exiſtente Hyperbolâ.

Jam ut Æquatio iſta à Denominatore ſuo liberetur, Diviſionem ſic inſtituo.

$$b + x)\ aa + 0\ \left(\frac{aa}{b} - \frac{aax}{b^2} + \frac{aax^2}{b^3} - \frac{aax^3}{b^4}\ \&c.\right.$$

$$aa + \frac{aax}{b}$$

$$0 - \frac{aax}{b} + 0$$

$$- \frac{aax}{b} - \frac{aax^2}{b^2}$$

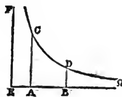
$$0 + \frac{aax^2}{b^2} + 0$$

$$+ \frac{aax^2}{b^2} + \frac{aax^3}{b^3}$$

$$0 - \frac{aax^3}{b^3} + 0$$

$$- \frac{aax^3}{b^3} - \frac{aax^4}{b^4}$$

$$0 + \frac{aax^4}{b^4}$$



utrique ſit communis. Ergo $2x^{-\frac{1}{2}} - x^{-1}$ = differentiæ arearum CBD, ADE. Q. E. D. [*E Commentariis Joannis Stewart Abredonenſis.*]

CAPUT TERTIUM.

Et sic vice hujus, $y = \frac{aa}{b+x}$, nova prodit, $y = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4}$, &c. serie istâc infinitè continuatâ; adeoque (per Regulam Secundam) area quæsita ABDC æqualis erit ipsi $\frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4}$ &c. (c) infinitæ etiam seriei, cujus tamen Termini pauci initiales sunt in usum quemvis satis exacti, si modò x sit aliquoties minor quàm b.

2. Eodem modo, si sit $\frac{1}{1+xx} = y$, dividendo prodibit $y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8$ &c. Unde (per Regulam Secundam) erit ABDC $= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$ &c.

3. Vel si Terminus xx ponatur in divisore primus, hoc modo, $xx + 1$, prodibit $x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8}$ &c. pro valore ipsius y; unde (per Regulam Secundam) erit BDΩ $= -x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{5}x^{-5} + \frac{1}{7}x^{-7}$ &c. Priori modo procede cùm x est satis parva, posteriori cùm satis magna supponitur.

4. Denique si $\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x} = y$; dividendo prodit $2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13x^2 + 34x^{\frac{5}{2}}$ &c. unde erit ABDC $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^2 + \frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{13}{3}x^3$ &c.

Exempla Radicem Extrahendo.

5. Si sit $\sqrt{aa+xx} = y$, radicem sic extraho,

$$aa + xx \left(a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}\right. \text{ \&c.}$$

$$\underline{aa}$$

$$0 + xx$$

$$\underline{xx + \frac{x^4}{4a^2}}$$

$$0 - \frac{x^4}{4a^2}$$

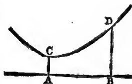
$$\underline{-\frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6}}$$

$$0 + \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6}$$

$$\underline{+\frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{16a^6} - \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}}}$$

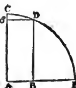
$$0 - \frac{5x^8}{64a^6} + \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}}$$

&c.



Unde,

Undé, pro æquatione $\sqrt{aa + xx} = y$, nova producitur, viz. $y = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. Et (per Reg. 2.) area quæsita ABDC erit $= ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ &c. Et hæc est quadratura hyperbolæ (d). QUADRATURA COMPOSITARUM.

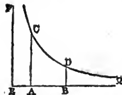


6. Eodem modo, si sit $\sqrt{aa - xx} = y$, ejus radix erit $a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. Adeoque area quæsita ABDC erit æqualis $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ &c. Et hæc est Quadratura Circuli (e).

7. Vel si ponas $\sqrt{x - xx} = y$, erit radix æqualis infinitæ seriei $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}}$ &c. Et area quæsita ABD æqualis erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$ &c. sive $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5$ &c. Et hæc est Areæ Circuli Quadratura (f).

8. Si $\frac{\sqrt{1 + ax^2}}{\sqrt{1 - bx^2}} = y$, (Cujus Quadratura dat Longitudinem curvæ Ellipticæ (g), extrahendo radicem utramque prodit

1 +



(c) Sit hyperbola ΩDC quæ centrum habeat E, asymptotas ad perpendiculum compositas EF, EΩ. In asymptotâ alterutrâ, puta EΩ, datum intelligatur punctum A. Sitque BD cum alterâ asymptotâ parallela. Jam è naturâ curvæ rectangulum EB × BD dabitur. Si igitur rectangulum illud datum symbolum aa designet; rectam datam EA; litera b; indefinitas AB, BD, literæ x, y; erit $by + xy = aa$, et $\frac{aa}{b + x} = y$. Et series Newtoniana infinitè producta areæ hyperbolicæ ABDC ultimò æqualis erit.

(d) Sit hyperbola æquilatera CD, cujus centrum A, semiaxis transversus AC $= a$, abscissa AB axis secundi $= x$, ordinata BD $= y$. (Vid. fig. pag. 264.) Erit ACBD area illa hyperbolica cui series $ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{40a^3}{x^3} +$ ultimò æqualis erit.

(e) Circuli centrum sit A, semidiameter AE $= a$. Quadrans AEDC. Abscissa semidiametri à parte centri, AB $= x$; ordinata BD $= y$. Erit ABDC area circularis; cui series $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3}$ infinitè producta ultimò æqualis erit.

(f) Sit AE circuli diameter $= 1$; ADE semicirculus; AB abscissa $= x$; BD ordinata $= y$; series $x^{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3$ infinitè producta areæ ADB ultimò æqualis erit.

(g) Nempe hoc modo. Sit ellipsis CDBE cujus centrum A, axes CAB, DAE. Abscissa axis minoris

Caput Tertium.

$$\frac{1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{8}a^2x^4 + \frac{1}{16}a^3x^6 - \frac{5}{128}a^4x^8}{1 - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{8}b^2x^4 - \frac{1}{16}b^3x^6 - \frac{5}{128}b^4x^8} \text{ \&c.}$$

Et Dividendo, ſicut fit in Fractionibus Decimalibus, habes

$$\begin{array}{lllll} 1 & + \frac{1}{2}b\, x^2 & + \frac{3}{8}b^2\, x^4 & + \frac{5}{16}b^3\, x^6 & + \frac{35}{128}b^4\, x^8 \text{ \&c.} \\ & + \frac{1}{2}a & + \frac{1}{4}ab & + \frac{3}{16}ab^2 & + \frac{5}{32}ab^3 \\ & & - \frac{1}{8}a^2 & - \frac{1}{16}a^2b & - \frac{3}{64}a^2b^2 \\ & & & + \frac{1}{16}a^3 & + \frac{3}{32}a^3b \\ & & & & - \frac{5}{128}a^4 \end{array}$$

Adeoque

Longitudo

noris à parte centri, AF, deſignetur literâ x; ordinata GF literâ y; arcus DG literâ z. Sit AR ſemiparameter Ellipſeos, et ſumatur AS, ad quam ſemiaxis tranſverſus AD rationem habeat eam quam AR ad ipſum AD: et recta illa AS deſignetur literâ b: ponaturque ſemiaxis tranſverſus AD $= 1$. Jam, propter angulum AFG rectum, fluxiones rectarum AF, FG ſunt ad fluxionem arcûs DG, ſicut latera trianguli cujuſdam rectilinearis rectanguli ad hypotenuſam (Newton Introduct. ad Quad. Curv.) Erunt igitur $\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x} = \dot{z}\dot{z}$. Et $\sqrt{\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x}} = \dot{z}$. Centro A, ſemidiametro AO, ſcribatur circulus DKA. A puncto G in axem tranſverſum AD deducatur ad perpendiculum GH, quæ circuli circumflexum in puncto K ſecet. Jungatur AK. Jam propter circulum, $AK^2 - HK^2 = AH^2$; hoc eſt $1 - HK^2 = y^2$. Sed è naturis ellipſeos circulique quibus axis OE communis, $GH^2 : HK^2 = AR^2 : AD^2 = AR : AD = AD : AS$. Hoc eſt $x^2 : HK^2 = 1 : b$. Quare $HK^2 = bx^2$, et $1 - bx^2 = y^2$. Hinc $\dot{y} = -\frac{bx\dot{x}}{y} = -\frac{bx\dot{x}}{\sqrt{1 - bx^2}}$. Ergo $\dot{y}\dot{y} = \dot{x}\dot{x} \times \frac{b^2x^2}{1 - bx^2}$. Et $\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x} = \dot{x}\dot{x} \times 1 + \frac{b^2x^2}{1 - bx^2} = \frac{1 + \overline{b^2 - b}.x^2}{1 - bx^2}\dot{x}\dot{x}$. Vel, ſi ponatur $a = b^2 - b$, $\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x} = \frac{1 + ax^2}{1 - bx^2}\dot{x}\dot{x}$. Et $\sqrt{\frac{1 + ax^2}{1 - bx^2}}\,\dot{x} = \sqrt{\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x}} = \dot{z}$.

$$\text{Ergo } \dot{x}\, \frac{1 + \frac{ax^2}{2} - \frac{a^2x^4}{8} + \frac{a^3x^6}{16} - \frac{5}{128}a^4x^8 +}{1 - \frac{bx^2}{2} - \frac{1}{8}b^2x^4 - \frac{1}{16}b^3x^6 - \frac{5}{128}b^4x^8 -} = \dot{z}.$$

Hinc, Diviſionis operâ, invenietur

$$\dot{z} = \dot{x} \times 1 \begin{array}{l} + \frac{1}{2}b \\ + \frac{1}{2}a \end{array} x^2 \begin{array}{l} + \frac{3b^2}{2^2 \times 2} \\ + \frac{ab}{2^2} \\ - \frac{a^2}{2^2 \times 2} \end{array} x^4 \begin{array}{l} + \frac{b^3 \times 3 \times 5}{2^3 \times 2 \times 3} \\ + \frac{3ab^2}{2^3 \times 2} \\ - \frac{a^2b}{2^3 \times 2} \\ + \frac{3a^3}{2^3 \times 2 \times 3} \end{array} x^6$$

Jam ſit curva LMN, cujus ſi abſciſſa LO capiatur $= x$, ordinata MO ad perpendiculum educta ſemper æqualis ſit quantitati $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, cui ſeries utique illa $1 \begin{array}{l} + \frac{1}{2}b \\ + \frac{1}{2}a \end{array} x^2 +$, infinitè producta, ultimò ſit æqualis.

Tum

Adeoque aream quæfitam $x + \frac{1}{6}bx^3 + \frac{3}{40}b^2x^5$ &c.
$\qquad + \frac{1}{6}a \qquad + \frac{1}{10}ab$
$\qquad\qquad - \frac{1}{40}a^2$

QUADRATURA CURVITARUM.

9. Sed obfervandum eft, quòd operatio non raro abbreviatur per debitam æquationis præparationem; ut in allato exemplo

Tum hæc feries $x \begin{matrix} +\frac{1}{2}b \\ +\frac{1}{2}a \end{matrix} x^3 + \begin{matrix} \frac{3b^2}{2^3.2\times5} \\ +\frac{ab}{2^2\times5} \\ -\frac{a^2}{2^3\times2\times5} \end{matrix} x^5$

infinitè producta areæ LOM ultimò æqualis erit (per Regulam Secundam). Sed eadem feries quantitati z, five $1 \times z$, ultimò æqualis erit. (Geomet. flux. Prop. II.) Nempe cùm hæc feries fluens fit alterius, quæ quantitati $\dot{z}$ oftenfa eft æqualis, et unà cum quantitate z à nihilo generari inceperit. Rectangulum igitur $1 \times z$, five AD × arc. DO areæ, LOM æqualis erit. Et fi ad rectam AO applicetur rectangulum AP = areæ LOM, latus DP, ex applicatione ortum, arcui Elliptico, DO, æquale erit. Et hoc eft quod dixit Newtonus, per quadraturam curvæ, cujus ea fit natura, ut ordinata fit $\sqrt{\frac{1+ax}{1-bx^2}}\,\dot{x}$, exiftente abfciffâ x, dari longitudinem arcûs Elliptici.

ARCUS ELLIPTICI.

Et hujus exemplo interpretanda funt quæcunque fimiliter funt dicta, qualia multà certè occurrunt, in fcriptis Newtoni. Arithmeticè autem æftimatur arcus z fummam feriei colligendo. Cæterùm eo fermone Newtonus uti voluit, qui maximè fignificaret, geometricas etiam problematum conftructiones è calculis, quos tradit, facillimè deducendas. Nam fi talis effet curva LMN, cujus area Geometricæ alicujus lineationis ope quadraturam fubiret, Arcûs etiam Elliptici Longitudinem geometricè definire liceret. Vel fi aut conftructione Geometricâ, aut artificio quopiam mechanico, aream curvæ LMN appropinquare faltem potueris, arcûs Elliptici longitudinem geometricè vel mechanicè æquè appropinquare poteris.

Series fimplicior paulò exfiftet è computatione fequente, quæ literam b exulare coget; modò litera b non AB, ut priùs, fed femiaxem fecundum AB defignet. E naturâ Ellipfeos, $y^2 : b^2 - x^2 = 1 : b^2$. Ergo $b^2y^2 = b^2 - x^2$, et $x^2 = b^2 - b^2y^2$. Hinc $\dot{x} = \frac{-b^2y}{x}\dot{y} = \frac{-b^2y}{\sqrt{b^2-b^2y^2}}\dot{y} = \frac{-by}{\sqrt{1-y^2}}\dot{y}$. Hinc $\dot{x}\dot{x} = \frac{b^2y^2}{1-y^2}\dot{y}\dot{y}$. Et $\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} = \dot{y}\dot{y} \times 1 + \frac{b^2y^2}{1-y^2} = \dot{y}\dot{y} \times \frac{1-y^2+b^2y^2}{1-y^2}$. Vel, fi ponatur $b^2 - 1 = -a$, $\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} = \frac{1-ay^2}{1-y^2}\dot{y}\dot{y}$. Ergo $\dot{y} \times \sqrt{\frac{1-ay^2}{1-y^2}} = \sqrt{\dot{x}\dot{x}+\dot{y}\dot{y}} = -\dot{z}$. Unde calculo ut priùs peracto veniet feries

$$y \begin{matrix} +\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6}a \end{matrix} x^3 + \begin{matrix} \frac{3}{2^3\times2\times5} \\ -\frac{a}{2^2\times5} \\ -\frac{a^2}{2^3\times2\times5} \end{matrix} y^5 \text{ &c.} = -z$$

hoc eft arcui Elliptico BG. Pofitis autem femiaxe fecundo AB = 1, tranfverfo AD = b, arcus BG fimili computatione prodibit $x \begin{matrix} +\frac{1}{6} \\ +\frac{1}{6}a \end{matrix} x^3 + \begin{matrix} \frac{3}{2^3\times2\times5} \\ +\frac{a}{2^2.\times5} \\ -\frac{a^2}{2^3\times2\times5} \end{matrix} x^5 +$

quantitate fcilicet a, quæ in priore cafu negata, eft in hoc pofteriore affirmatâ.

Mm 2

CAPUT QUARTUM. $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}=y$. Si utramque partem fractionis per $\sqrt{1-bxx}$ multiplices, prodibit $\frac{\sqrt{1+\frac{a}{-b}x^2-abx^4}}{1+bx^2}=y$, & reliquum opus perficitur extrahendo radicem numeratoris tantùm, & dividendo per denominatorem.

10. Ex hisce, credo, satis patebit modus reducendi quemlibet valorem ipsius y (quibuscunque radicibus vel denominatoribus sit perplexus, ut hic videre est; $x^3+\frac{\sqrt{x-\sqrt{1-xx}}}{\sqrt[3]{ax^2+x^3}}-\frac{\sqrt[5]{x^3+2x^5-x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x+x}-\sqrt[2]{2x-x^{\frac{2}{3}}}}=y$) in series infinitas simplicium terminorum, ex quibus, per Regulam Secundam, quæsita superficies cognoscetur.

CAPUT QUARTUM.

Exempla per Resolutionem Æquationum.

SECT. I.

Numeralis Æquationum affectarum resolutio.

1. QUIA tota difficultas in Resolutione latet, modum, quo ego utor, in Æquatione Numerali primùm illustrabo.

Sit $y^3-2y-5=0$, resolvenda: et sit 2 numerus qui minùs quàm decimâ sui parte differt à Radice quæsitâ. Tum pono $2+p=y$, & substituo hunc ipsi valorem in Æquationem, & inde nova prodit $p^3+6p^2+10p-1=0$, cujus radix p exquirenda est, ut quotienti addatur: nempe (neglectis p^3+6p^2 ob parvitatem) $10p-1=0$, sive $p=0{,}1$ prope veritatem est; itaque scribo 0,1 in quotiente, & suppono $0{,}1+q=p$, & hunc ejus valorem, ut priùs, substituo; unde prodit $q^3+6{,}3q^2+11{,}23q+0{,}061=0$.

Et cùm $11{,}23q+0{,}061$ veritati propè accedit, sive ferè sit q æqualis $-0{,}0054$ (dividendo nempe donec tot eliciantur figuræ, quot locis primæ figuræ hujus & principalis quotientis exclusivè distant) scribo $-0{,}0054$ in inferiori parte quotientis, cùm negativa sit.

2. Et supponens $-0{,}0054+r=q$, hunc ut priùs substituo, & operationem sic produco quo usque placuerit. Verùm si ad bis tot

tot figuras tantùm quot in Quotiente jam reperiuntur unâ demptâ, operam continuare cupiam, pro q ſubſtituo $-0,0054+r$ in hanc $6,3q^2+11,23q+0,061$, ſcilicet primo ejus termino (q^3) propter exilitatem ſuam neglecto; & prodit $6,3r^2+11,16196r+0,000541708=0$ ferè, ſive (rejecto $6,3r^2$) $r=\frac{-0,000541708}{11,16196}=-0,00004853$ ferè, quam ſcribo in negativâ parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab Affirmativâ ſubducens habeo 2,09455147 Quotientem quæſitam. Æquationum Reſolutiones.

$y^3-2y-5=0$		$+2,10000000$ $-0,00544853$ $+2,09455147=y$
$2+p=y$	$+y^3$ $+2y$ -5	$+8+12p+6p^2+p^3$ $-4-2p$ -5
	Summa	$-1+10p-6p^2+p^3$
$0,1+q=p$	$+p^3$ $+6p^2$ $+10p$ -1	$+0,001+0,03q+0,3q^2+q^3$ $+0,06+1,2+6,0$ $+1,+10,$ $-1,$
	Summa	$+0,061+11,23q+6,3q^2+q^3$
$-0,0054+r=q$	$+6,3q^2$ $+11,23q$ $+0,061$	$+0,000183708-0,06804r+6,3r^2$ $-0,060642+11,23$ $+0,061$
	Summa	$+0,000541708+11,16196r+6,3r^2$
$-0,00004854+s=r$		

3. Æquationes plurium dimenſionum nihilo ſeciùs reſolvuntur, & operam ſub fine, ut hîc factum fuit, levabis, ſi primos ejus terminos gradatim omiſeris.

4. Præterea notandum eſt, quòd in hoc exemplo, ſi dubitarem an $0,1=p$ veritati ſatis accederet, pro $10p-1=0$, finxiſſem $6p^2+10p-1=0$, & ejus radicis primam figuram in Quotiente ſcripſiſſem; & ſecundam vel tertiam Quotientis figuram ſic explorare convenit, ubi in Æquatione iſtâ ultimò reſultante quadratum coefficientis penultimi termini, non ſit decies majus quàm factus ex ultimo termino ducto in coefficientem termini antepenultimi.

5. Imo laborem plerumque minues, præſertim in Æquationibus plurimarum dimenſionum, ſi figuras omnes Quotienti addendas dicto modo (hoc eſt extrahendo minorem radicum, ex tribus ultimis terminis Æquationis noviſſimè reſultantis) exquiras: iſto enim modo figuras duplo plures quâlibet vice Quotienti lucraberis.

6. Hæc Methodus resolvendi Æquationes pervulgata an sit nescio; certè mihi videtur præ reliquis simplex, & usui accommodata. Demonstratio ejus ex ipso modo operandi patet; unde cùm opus sit, in memoriam facilè revocatur.

7. Æquationes, in quibus vel aliqui vel nulli Termini desint, eàdem fere facilitate tractantur; & Æquatio semper relinquitur, cujus Radix unà cum acquisitâ Quotiente adæquat Radicem Æquationis primò propositæ. Unde Examinatio Operis hìc æquè poterit institui ac in reliquâ Arithmeticâ, auferendo nempe Quotientem à Radice primæ Æquationis (sicut Analystis notum est) ut Æquatio ultima, vel termini ejus duo tresve ultimi, producantur inde.

8. Quicquid laboris hìc est, istud in Operatione substituendi quantitates unas pro aliis reperietur: id quod variè perficias, at sequentem modum maximè expeditum puto, præsertim ubi Numeri coefficientes constant ex pluribus Figuris.

Sit $p+3$ substituenda pro y in hanc $y^4-4y^3+5y^2-12y+17=0$.

Et cùm ista possit resolvi in hanc formam $\overline{\overline{\overline{y-4}\times y+5}\times y-12}\times y$ $+17=0$ (h). Æquatio nova sic generabitur $\overline{p-1}\times\overline{p+3}=p^2+2p-3$. et p^2+2p+2 in $p+3=p^3+5p^2+8p+6$. et p^3+5p^2+8p-6 in $p+3=p^4+8p^3+23p^2+18p-18$. et $p^4+8p^3+23p^2+18p-1=0$, quæ quærebatur.

SECT. II.

Literalis Æquationum affectarum resolutio.

1. His in numeris sic ostensis: sit Æquatio literalis $y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$, resolvenda.

Primùm inquiro valorem ipsius y, cùm x sit nulla; hoc est, elicio Radicem hujus Æquationis, $y^3+a^2y-2a^3=0$, & invenio esse $+a$. Itaque scribo $+a$ in Quotiente, & supponens $+a+p=y$, substituo pro y valorem ejus, & Terminos inde resultantes ($p^3+3ap^2+4a^2p$, &c.) margini appono; ex quibus assumo $+4a^2p+a^2x$ terminos

(h) Sensus est, æquationem propositam ita generandam esse, si apotomen $y-4$ cum y multiplicaveris: factum quinario auctum cum y rursum multiplicaveris: Novum factum duodenario imminutum

minos utique ubi p & x seorsim sunt minimarum dimensionum, & eos nihilo ferè æquales esse suppono, sive $p=-\frac{1}{4}x$ ferè, vel $p=-\frac{1}{4}x+q$. Et scribens $-\frac{1}{4}x$ in **Quotiente**, substituo $-\frac{1}{4}x+q$ pro p; et terminos inde resultantes iterum in margine scribo, ut vides in annexo schemate, & inde assumo Quantitates $+4a^2q-\frac{1}{16}ax^2$, in quibus utique q & x seorsim sunt minimarum dimensionum; & fingo $q=\frac{xx}{64a}$ ferè, sive $q=+\frac{xx}{64a}+r$; & adnectens $+\frac{xx}{64a}$ quotienti, substituo $\frac{xx}{64a}+r$ pro q; & sic procedo quo usque placuerit.

ÆQUATIONUM RESOLUTIONES.

$y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$		
$y=a-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$ &c.		
$+a+p=y$	$+y^3$ $+a^2y$ $+axy$ $-2a^3$ $-x^3$	$+a^3+3a^2p+3ap^2+p^3$ $+a^3+a^2p$ $+a^2x+axp$ $-2a^3$ $-x^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$ $+3ap^2$ $+4a^2p$ $+axp$ $+a\,x$ $-x^3$	$-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{16}x^2q-\frac{3}{4}xq^2+q^3$ $+\frac{3}{16}ax^2-\frac{3}{2}axq+3aq^2$ $-a^2x+4a^2q$ $-\frac{1}{4}ax^2+axq$ $+a^2x$ $-x^3$
$+\frac{x^2}{64a}+r=q$	$+3aq^2$ $+4a^2q$ $-\frac{1}{2}axq$ $+\frac{3}{16}x^2q$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$	$+\frac{3x^4}{4096a}+\frac{3}{32}x^2r+3ar^2$ $+\frac{1}{16}ax^2+4a^2r$ $-\frac{1}{128}x^3-\frac{1}{2}axr$ $+\frac{3x^4}{1024a}+\frac{3}{16}x^2r$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$
$+4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}x^2)+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}(+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$		

2. Sin duplo tantùm plures quotienti terminos, uno dempto, jungendos adhuc vellem: primo termino (q^3) æquationis novissimè resultantis misso, & istâ etiam parte ($-\frac{3}{4}xq^2$) secundi, ubi x est tot dimensionum quot in penultimo termino quotientis; in reliquos terminos ($3aq^2+4a^2q$, &c.) margini adscriptos ut vides, substituo $\frac{x^2}{64a}+r$ pro q; & ex ultimis duobus terminis ($\frac{15x^4}{4096a}-\frac{131}{128}x^3+\frac{9}{32}x^2r-\frac{1}{2}axr+4a^2r$) æquationis inde resultantis, factâ divisione, $4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}x^2)+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}$ (elicio $+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$ quotienti adnectendos.

imminutum in y rursum multiplicaveris, factoque rursum novo denifeptenarium tandem adjeceris.

3. De-

CAPUT QUARTUM.

3. Denique quotiens ista ($a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a}$, &c.) per Regulam Secundam, dabit $ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048a} + \frac{509x^5}{81920a}$, &c. pro areâ quæsitâ; quæ ad veritatem tanto magis accedit, quanto x sit minor.

SECT. III.

Alius modus easdem Resolvendi.

1. Sin valor areæ tanto magis ad veritatem accedere debet quanto x sit major; exemplum esto $y^3 + axy + x^2y - a^3 - 2x^3 = 0$. Itaque hanc resoluturus excerpo terminos $y^3 + x^2y - 2x^3$, in quibus x & y vel seorsim, vel simul multiplicatæ, sunt & plurimarum, & æqualium ubique dimensionum; & ex iis quasi nihilo æqualibus radicem elicio. Hanc invenio esse x, & in quotiente scribo. Vel quod eodem recidit, ex $y^3 + y - 2$ (unitate pro x substitutâ) radicem extraho; quæ hic prodit 1, & eam per x multiplico, & factum (x) in quotiente scribo. Denique pono $x + p = y$; & sic procedo ut in priori exemplo, donec habeam quotientem $x - \frac{a}{4} + \frac{aa}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \frac{509a^4}{16384x^3}$, &c. adeoque aream $\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{4} + \boxed{\frac{aa}{64x}}$ (i) $- \frac{131a^3}{512x} - \frac{509a^4}{32768x^2}$, de quâ vide exempla tertia Regulæ Secundæ. Lucis gratiâ dedi hoc exemplum in omnibus idem cum priori, modò x & a sibi invicem ibi substituantur, ut non opus esset aliud resolutionis exemplum hic adjungere.

2. Area autem ($\frac{xx}{2} - \frac{x}{4} + \boxed{\frac{aa}{64x}}$ &c. terminatur ad curvam, quæ juxta Asymptoton aliquam in infinitum serpit; & Termini initiales ($x - \frac{1}{4}a$) valoris extracti de y, in Asymptoton istam semper terminantur; unde portionem Asymptoti facilè invenies. Idem semper notandum est, cùm area designatur terminis plus plusque divisis per x continuè, præterquam quòd vice Asymptoti rectæ quandoque habeatur Parabola Conica, vel alia magis composita.

3. Sed

(i) Nempe hujusmodi symbolis $\boxed{\frac{a}{b.x^n}}$ curvarum hyperboliformium areas designari voluit, quarum abscissas litera x designat, ordinatas symbolum $\frac{a}{bx^n}$. Hinc plerisque nostratium usu receptum

3. Sed hunc modum miſſum faciens, utpote particularem, quia non applicabilem curvis in orbem, ad inſtar Ellipſium, flexis; de altero modo per exemplum, $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, ſuprà oſtenſo (ſcilicet quo dimenſiones ipſius x in numeratoribus quotientis perpetuò augeantur) annotabo ſequentia. Æquationum Resolutiones.

I. Si quando, accidit quod valor ipſius y, cùm x nullum eſſe fingitur, ſit quantitas ſurda vel penitùs ignota, licebit illam literâ aliquâ deſignare. Ut in exemplo, $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$; ſi radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3$ fuiſſet ſurda, vel ignota, finxiſſem quamlibet (b) pro eâ ponendam; et reſolutionem ut ſequitur perfeciſſem. Scribens b in quotiente, ſuppono $b + p = y$, & iſtum pro y ſubſtituo, ut vides; unde nova $p^3 + 3bp^2$, &c. reſultat, rejectis terminis $b^3 + a^2b - 2a^3$, qui nihilo ſunt æquales, propterea quòd b ſupponitur radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$. Deinde termini $3b^2p + a^2p + abx$ dant $-\frac{abx}{3b^2 + a^2}$ quotienti apponendum, et $-\frac{abx}{3b^2 + a^2} + q$ ſubſtituendum pro p, &c.

$y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0.$ Sit $cc = 3b^2 + a^2.$		
$y = b - \frac{abx}{c^2} + \frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^6} - \frac{a^6bx^3}{c^8} + \frac{a^6b^3x^3}{c^{10}}$ &c.		
$b + p = y$	y^3	$+b^3 + 3b^2p + 3bp^2 + p^3$
	$+axy$	$+abx + axp$
	$+aay$	$+aab + aap$
	$-x^3$	$-x^3$
	$-2a^3$	$-2a^3$
$\frac{-abx}{cc} + q = p$	p^3	$-\frac{a^3b^3x^3}{c^6}$ &c.
	$+3bp^2$	$+\frac{3a^2b^3x^2}{c^4} - \frac{6ab^2x}{c^2}q$ &c.
	$+axp$	$-\frac{a^2bx^2}{c^2} + axq$
	$+ccp$	$-abx + ccq$
	$-x^3$	$-x^3$
	$+abx$	$+abx$
$c^2 + ax - \frac{6ab^2x}{cc}) \frac{a^4bx^2}{c^4} + x^3 + \frac{a^3b^3x^3}{c^6} (\frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8}$ &c.		

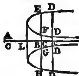
Completo opere, ſumo numerum aliquem pro a, & hanc $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, ſicut de numerali æquatione oſtenſum ſuprà, reſolvo; & radicem ejus pro b ſubſtituo.

II. Si dictus valor ſit nihil, hoc eſt, ſi in æquatione reſolvendâ nullus ſit terminus, niſi qui per x vel y ſit multiplicatus, ut in hâc $y^3 - axy + x^3 = 0$; tum terminos $(-axy + x^3)$ ſeligo in quibus x ſeorſim & y etiam ſeorſim, ſi fieri poteſt, aliâs per x multiplicata, ſit minimarum dimenſionum. Et illi dant $+\frac{xx}{a}$ pro primo termino quotientis, & $\frac{xx}{a} + p$

tum eſt, ut hoc ſymbolo, $ax^{\frac{m}{n}}\dot{x}$, fluxionem deſignante, hoc aliud $\boxed{ax^{\frac{m}{n}}\dot{x}}$ generaliter deſignet fluentem.

CAPUT QUARTUM. pro y ſubſtituendum. In hâc $y^3-a^2y+axy-x^3=0$, licebit primum terminum quotientis vel ex $-a^2y-x^3$, vel ex y^3-a^2y elicere.

III. Si valor iſte ſit imaginarius, ut in hâc $y^4+y^2-2y+6-x^2y^2-2x+x^2+x^4=0$, augeo vel imminuo quantitatem x, donec dictus valor evadat realis.



Sic in annexo ſchemate (k), cum AC (x) nulla eſt, tum CD (y) eſt imaginaria.

Sin minuatur AC per datam AB, ut BC fiat x; tum, poſito quòd BC (x) ſit nulla, CD (y) erit valore quadruplici (CE, CF, CG, vel CH) realis; quarum radicum (CE, CF, CG, vel CH) quælibet poteſt eſſe primus terminus quotientis, prout ſuperficies BEDC, BFDC, BGDC, vel BHDC deſideratur. In aliis etiam caſibus, ſi quando hæſitas, te hoc modo extricabis.

Denique ſi index poteſtatis ipſius x vel y ſit fractio, reduco ipſum ad integrum: ut in hoc exemplo $y^3-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{4}{3}}=0$. Poſito $y^{\frac{1}{2}}=v$, & $x^{\frac{1}{3}}=z$, reſultabit $v^6-z^3v+z^4=0$, cujus radix eſt $v=z+z^3$, &c. ſive (reſtituendo valores) $y^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{3}}+x$, &c. & quadrando $y=x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{4}{3}}$, &c.

Et hæc de areis curvarum inveſtigandis dicta ſufficiant (l). Imo cùm Problemata omnia de curvarum Longitudine, de quantitate & ſuperficie ſolidorum, deque Centro Gravitatis, poſſunt eò tandem reduci, ut quæratur quantitas ſuperficiei planæ lineâ curvâ terminatæ, non opus eſt quicquam de iis adjungere. In iſtis autem quo ego operor modo dicam breviſſimè.

CAPUT

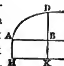
(k) Sit curva DEHD cujus abſciſſam, AC, litera x deſignet; ordinatam, CD, litera y; æquatione biquadraticâ modò expoſitâ abſciſſa AC ordinataque CD quomodo inter ſe mutuò habeant generaliter ſignificante. Hæc quidem curva talis erit, ut ſi per datum punctum A, unde abſciſſæ initium ducant, recta ducatur cum ordinatis CD parallela, ea curvæ nullibi occurrat. Ergo quando x nulla eſt, hoc eſt punctis, A, C, coeuntibus, æſtimatio literæ y imaginaria erit. Duci intelligatur recta cum ordinatis parallela quæ curvam contingat; axem verò contingens illa in puncto L ſecet. Sumatur recta AB datæ cujuſvis longitudinis, modò rectâ AL non ſit minor. Si per datum punctum B ducatur recta BE, cum ordinatis parallela, quatuor illa locis cum curvâ concurret. Concurſus quatuor ſint F, E, G, H. Jam ſi litera x, pro indefinitâ AC, indefinitæ illius dataeque AB differentiam BC deſignet, et in æquationem biquadraticam pro x, illud $x+$AB ubique ſubſtituatur; quo facto illa in hanc migraverit, $y^4+y^2-2y+6-x^2y^2-2AB.x.y^2-AB^2.y^2-2x-$

2 AB

CAPUT QUINTUM.

CURVARUM LONGITUDINES.

Applicatio prædictorum ad reliqua istiusmodi Problemata.

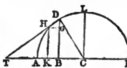


SIT ABD curva quævis, & AHKB rectangulum cujus latus AH, vel BK, est unitas. Et cogita rectam DBK, uniformiter ab AH motam, areas ABD & AK describere; & quòd BK (1) sit momentum quo AK (x) & BD (y) momentum quo ABD gradatim augetur; & quòd ex momento BD perpetim dato, possis, per prædictas regulas, aream ABD ipso descriptam investigare; sive cum AK (x) momento 1 descriptâ conferre.

Jam quâ ratione superficies ABD ex momento suo perpetim dato, per præcedentes regulas, elicitur, eâdem quælibet alia quantitas ex momento suo sic dato elicietur. Exemplo res fiet clarior (m).

CAPUT SEXTUM.

Longitudines Curvarum invenire.



1. SIT ADLE circulus, cujus arcûs AD longitudo est indaganda. Ductâ tangente DHT, & completo indefinitè parvo rectangulo HGBK, & posito AE $=1=$ 2AC: erit ut BK sive GH, momentum basis AB (x), ad HD momentum arcûs AD :: BT : DT :: BD ($\sqrt{x-xx}$) : DC ($\frac{1}{2}$) :: 1 (BK) : $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ (DH). Adeoque $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ sive $\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}$, est momentum arcûs AD. Quod reductum fit $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}}+\frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}}+\frac{63}{512}x^{\frac{9}{2}}$ &c. Quare, per Regulam

2AB $+x^2+$ 2AB$x+$ AB$^2+x^4+$ 4AB.x^3+ 6AB$^2x^2+$ 4AB$^3x+$ AB$^4=0$; æquationis, $y^4+y^2-2y+6-$ 2AB $+$ AB$^2+$ AB$^4=0$, quæ ex transmutatâ fiet, posito quòd x nihilo æqualis fit; hujus inquam nulla radix impossibilis erit, sed veræ quatuor existent. Coeuntibus enim punctis B, C, quod fieri quidem necesse est, 6 indefinitè $x=0$, hoc est si illius AC datæque AB differentia nulla sit, significantia literæ y quadruplex erit, cùm ex quatuor, BF, BE, BG, BH, quamlibet illa designârit. Harum autem aliam vel aliam pro membro primo seriei sumere oportet, prout aream BEDC, vel BFDC, vel BGDC, vel BHDC, æstimare velis.

(l) Quæ hic verò breviter dixit eadem in Geometriâ Analyticâ pluribus et explanatiùs tradit. Ea quidem quæ Æquationum in series infinitas resolutionem spectant, capite ejus libri primo secundo et tertio: quæ Curvarum per series Quadraturas, Problemate 9°.

(m) Vide (l) & confer Newton. de Rat. Prim. et Ult. Prop. IV. Cor.

Secundam,

CAPUT SEPTIMUM.

Secundam, longitudo arcûs AD eſt $x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}+\frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}}+\frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}}$ &c. ſive $x^{\frac{1}{2}}$ in $1+\frac{1}{6}x+\frac{3}{40}x^2+\frac{5}{112}x^3+\frac{35}{1152}x^4+\frac{63}{2816}x^5$ &c.

2. Non ſecus ponendo CB eſſe x, & radium CA eſſe 1, invenies arcum LD eſſe $x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7$, &c.

3. Sed notandum eſt, quòd unitas iſta, quæ pro momento ponitur, eſt ſuperficies cùm de ſolidis, & linea cùm de ſuperficiebus, & punctum cùm de lineis (ut in hoc exemplo) agitur.

Nec vereor loqui de unitate (n) in punctis, ſive lineis infinitè parvis, ſiquidem proportiones ibi jam contemplantur Geometræ, dum utuntur methodis Indiviſibilium.

Ex his fiat conjectura de ſuperficiebus & quantitatibus ſolidorum; ac de centris gravitatum.

CAPUT SEPTIMUM.

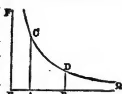
Invenire prædictorum converſum.

VERUM ſi è contrà ex areâ vel longitudine, &c. curvæ alicujus datâ longitudo baſis AB deſideratur, ex æquationibus per præcedentes regulas inventis extrahatur radix x.

SECT. Iª.

Inventio Baſis ex Areâ datâ.

Ut ſi ex areâ ABDC hyperbolæ ($\frac{1}{1+x}=y$) datâ, cupiam baſim AB inveſtigare, areâ iſtâ z nominatâ, extraho radicem hujus z (ABCD) $=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$, &c. neglectis illis terminis in quibus x eſt plurium dimenſionum quàm z, in quotiente, deſideratur.



Ut ſi vellem quòd z ad quinque tantùm dimenſiones in quotiente aſcendat, negligo omnes $-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{8}x^8$, &c. et radicem hujus tantùm $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-z=0$ extraho (°).

Analyſin

(°) Quam tamen loquendi formam ita non probavit Newtonus, ut non alium in finem, quàm ut illa ex argumentationibus Geometrarum exularet, viam ſuam Rationum Primarum Ultimarumque ex-

$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ &c.		
$z + p = x$	$+\frac{1}{5}x^5$	$+\frac{1}{5}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{4}x^4$	$-\frac{1}{4}z^4 - z^3p$, &c.
	$+\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2$, &c.
	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2$
	$+x$	$+z+p$
	$-z$	$-z$
$\frac{1}{2}z^2 + q = p$	$+zp^2$	$+\frac{1}{4}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{2}p^2$	$-\frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{2}z^2q$, &c.
	$-z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5$, &c.
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4 + z^2q$
	$-zp$	$-\frac{1}{2}z^3 - zq$
	$+p$	$+\frac{1}{2}z^2 - q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}z^2$	$-\frac{1}{2}z^2$
$1 - z + \frac{1}{2}z^2)\ \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{20}z^5\ (\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$		

BASIS EX AREA VEL ARCU.

Analysin, ut vides, exhibui propter adnotanda duo sequentia.

I. Quòd inter substituendum, istos terminos semper omitto, quos nulli deinceps usui fore prævideam. Cujus rei regula esto, quòd post primum terminum, ex quâlibet quantitate sibi collaterali resultantem, non addo plures terminos dextrorsum, quàm istius primi termini index dimensionis ab indice dimensionis maximæ unitatibus distat. Ut in hoc exemplo, ubi maxima dimensio est 5, omisi omnes terminos post z^5, post z^4 posui unicum, & duos tantùm post z^3. Cùm radix extrahenda (x) sit parium ubique, vel imparium dimensionum, hæc esto regula; quòd post primum terminum, ex quâlibet quantitate sibi collaterali resultantem, non addo plures terminos dextrorsum, quàm istius primi termini index dimensionis ab indice dimensionis maximæ binis unitatibus distat; vel ternis unitatibus, si indices dimensionum ipsius x unitatibus ubique ternis à se invicem distant, & sic de reliquis.

II. Cùm video p, q, vel r, &c. in æquatione novissimè resultante esse unius tantùm dimensionis, ejus valorem, hoc est, reliquos terminos quotienti addendos, per divisionem quæro. Ut hîc vides factum.

S E C T. II.

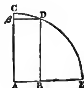
Inventio Basis ex datâ Longitudine Curvæ.

Si ex dato arcu CD sinus AB desideratur; æquationis $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. suprà inventæ, (posito nempe AB $= x$,

excogitaverit.
(*) Vide Geometr. Analyt. Cap. III. § 8.

CD$=z$,

CAPUT OCTAVUM. CD $=z$, & AC $=1$,) radix extracta erit $x=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-\frac{1}{5040}z^7+\frac{1}{362880}z^9$, &c (q).



Et præterea ſi coſinum Aβ ex iſto arcu dato cupis, fac Aβ $(=\sqrt{1-xx})=1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}z^4-\frac{1}{720}z^6+\frac{1}{40320}z^8-\frac{1}{3628800}z^{10}$, &c (q).

CAPUT OCTAVUM.

De Serie progreſſionum continuandâ.

HIC obiter notetur, quòd 5 vel 6 terminis iſtarum radicum cognitis, eas plerumque ex analogiâ obſervatâ poteris ad arbitrium producere.

Sic hanc $x=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$, &c. produces dividendo ultimum terminum per hos ordine numeros 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Et hanc $x=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-\frac{1}{5040}z^7$, &c. per hos 2×3, 4×5, 6×7, 8×9, 10×11, &c.

Et hanc $x=1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}z^4-\frac{1}{720}z^6$, &c. per hos 1×2, 3×4, 5×6, 7×8, 9×10, &c.

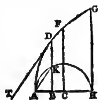
Et hanc $z=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7$, &c. multiplicando per hos $\frac{1\times 1}{2\times 3}$, $\frac{3\times 3}{4\times 5}$, $\frac{5\times 5}{6\times 7}$, $\frac{7\times 7}{8\times 9}$, &c. Et ſic in reliquis (r).

CAPUT NONUM.

Applicatio prædictorum ad Curvas Mechanicas.

1. ET hæc de curvis Geometricis ſufficiant. Quinetiam curva etiamſi mechanica ſit, methodum tamen noſtram nequaquam reſpuit.

Exemplo ſit Trochoides, ADFG, cujus vertex A, & axis AH, & AKH rota quâ deſcribitur: et quæratur ſuperficies ABD. Jam poſito AB $=x$, BD $=y$, ut ſuprà, & AH $=1$; primò quæro longitu-



(r) Vide Geometr. Analyt. C. III. § 9.

(q) Nempe ex æquatione priore, $x=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5$ —, quadraticè multiplicando, efficitur $x^2=z^2-\frac{1}{3}z^4+\frac{2}{45}z^6-\frac{1}{315}z^8+\frac{2}{14175}z^{10}$ —. Ergo $1-x^2=1-z^2+\frac{1}{3}z^4-\frac{2}{45}z^6+\frac{1}{315}z^8-\frac{2}{14175}z^{10}$ +. Unde radicem extrahendo, veniet $\sqrt{1-x^2}=1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}z^4-\frac{1}{720}z^6+\frac{1}{40320}z^8$ —

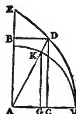
1

longitudinem ipsius BD. Nempe, ex naturâ trochoidis, est KD = arcui AK. Quare tota BD = BK + arc. AK. Sed est BK ($=\sqrt{x-xx}$) $= x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c. & (ex prædictis) arcus AK $= x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Ergo tota BD $= 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Et (per Reg. 2.) area ABD $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}$, &c. De Curvis Mechanicis.

2. Vel breviùs sic: cùm recta AK tangenti TD parallela sit, erit AB ad BK sicut momentum lineæ AB ad momentum lineæ BD, hoc est $x : \sqrt{x-xx} :: 1 : \frac{1}{x}\sqrt{x-xx} = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Quare (per Reg. 2.) BD $= 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{576}x^{\frac{9}{2}}$, &c. Et superficies ABD $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{3156}x^{\frac{11}{2}}$, &c.

3. Non dissimili modo (posito C centro circuli, & CB $=x$) obtinebis aream CBDF, &c.

4. Sit area ABDV Quadratricis VDE (cujus vertex est V, & A centrum circuli interioris VK cui aptatur) invenienda. Ductâ quâlibet AKD, demitto perpendiculares DB, DC, KG. Eritque KG : AG :: AB (x) : BD (y), sive $\frac{x \times AG}{KG} = y$. Verùm ex naturâ Quadratricis est BA (= DC) = arcui VK, sive VK $=x$. Quare posito AV $=1$, erit GK $= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, &c. ex suprà ostensis; & GA $= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$, &c.



Adeoque $y\ (= \frac{x \times AG}{KG}) = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6 + \frac{1}{362880}x^{10} +}$ &c. sive, divisione factâ, $y = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6$, &c. et (per Reg. 2.) area AVDB $= x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{225}x^5 - \frac{2}{6615}x^7$, &c.

Sic longitudo Quadratricis VD, licet calculo difficiliori, determinabilis est (f).

5. Nec quicquam hujusmodi scio, ad quod hæc methodus, idque variis modis, sese non extendit. Imo tangentes ad curvas mechanicas (si quando id non aliàs fiat) hujus ope ducantur. Et quicquid vulgaris Analysis per æquationes ex finito terminorum numero constantes (quando id sit possibile) perficit, hæc per

(e) Vide Geom. Analyt. Cap. III. § 12.

(f) Vide Geometr. Analyt. Problem ult. Exemp. ult. Cæterùm in quarto *Excerptorum ex Epistolis* habes Aream et Longitudinem Quadratricis Dinostrati.

 æqua-

Caput Decimum.

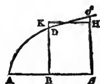
æquationes infinitas semper perficiat: ut nil dubitaverim nomen Analysis etiam huic tribuere. Ratiocinia nempe in hâc non minùs certa sunt quàm in illâ, nec æquationes minùs exactæ; licet omnes earum terminos, nos homines, & rationis finitæ, nec designare neque ita concipere possimus, ut quantitates inde desideratas exactè cognoscamus: sicut radices surdæ finitarum æquationum nec numeris, nec quâvis arte Analyticâ, ita possunt exhiberi, ut alicujus quantitas, à reliquis distincta, exactè cognoscatur.

6. Denique ad Analyticam meritò pertinere censeatur, cujus beneficio curvarum areæ & longitudines, &c. (id modò fiat) exactè & Geometricè determinentur. Sed ista narrandi non est locus. Respicienti duo præ reliquis demonstranda occurrunt.

CAPUT DECIMUM.

I. *Demonstratio Quadraturæ Curvarum Simplicium in Regulâ primâ.*

Præparatio pro Regulâ primâ demonstrandâ.



I. SIT itaque curvæ alicujus ADδ basis AB $= x$, perpendiculariter applicata BD $= y$, & area ABD $= z$, ut priùs. Item sit Bβ $= o$, BK $= v$, & rectangulum BβHK (ov) æquale spatio BβδD.

Est ergo Aβ $= x + o$, & Aδβ $= z + ov$.

His præmissis, ex relatione inter x & z, ad arbitrium assumptâ, quæro y isto, quem sequentem vides, modo.

Pro lubitu sumatur $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$, sive $\frac{4}{9}x^3 = zz$. Tum $x + o$ (Aβ) pro x, & $z + ov$ (Aδβ) pro z substitutis, prodibit $\frac{4}{9}$ in $x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3 =$ (ex naturâ curvæ) $z^2 + 2zov + o^2v^2$. Et sublatis ($\frac{4}{9}x^3$ & zz) æqualibus, reliquisque per o divisis, restat $\frac{4}{9}$ in $3x^2 + 3xo + o^2 = 2zv + ov^2$. Si jam supponamus Bβ in infinitum diminui & evanescere, sive o esse nihil, erunt v & y æquales, & termini per o multiplicati evanescent: quare restabit $\frac{4}{9} \times 3xx = 2zv$, sive $\frac{2}{3}xx$ $(= zy) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$, sive $x^{\frac{1}{2}} \left(= \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = y$. Quare è contra si $x^{\frac{1}{2}} = y$, erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.

Demonstratio.

Demonstratio.

REGULARUM DEMONSTRATIONES.

2. Vel generaliter, si $\frac{n}{m+n} \times ax^{\frac{m+n}{n}} = z$; sive, ponendo $\frac{na}{m+n} = c$, & $m+n=p$, si $cx^{\frac{p}{n}} = z$, sive $c^n x^p = z^n$: tum $x+o$ pro x, & $z+ov$ (sive, quod perinde est, $x+oy$) pro z, substitutis, prodit c^n in $x^p + pox^{p-1}$, &c. $= z^n + noyz^{n-1}$, &c. reliquis nempe terminis, qui tandem evanescerent, omissis. Jam sublatis $c^n x^p$ & z^n æqualibus, reliquisque per o divisis, restat $c^n px^{p-1} = nyz^{n-1}$ $(= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}})$ sive, dividendo per $c^n x^p$, erit $px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$ sive $pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny$; vel, restituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c, & $m+n$ pro p, hoc est, m pro $p-n$, & na pro pc, fiet $ax^{\frac{m}{n}} = y$. Quare è contra, si $ax^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Q. E. D.

Inventio curvarum quæ possunt quadrari.

3. Hinc in transitu notetur modus, quo curvæ tot quot placuerit, quarum areæ sunt cognitæ, possunt inveniri; sumendo nempe quamlibet æquationem pro relatione inter aream z & basin x, ut inde quæratur applicata y. Ut si supponas $\sqrt{aa+xx} = z$, ex calculo invenies $\frac{x}{\sqrt{aa+xx}} = y$. Et sic de reliquis (^t).

SECT. II.

2. Demonstratio resolutionis æquationum affectarum.

1. Alterum demonstrandum est literalis æquationum affectarum resolutio. Nempe quòd quotiens, cùm x sit satis parva, quo magis producitur, eo magis ad veritatem accedit; ut defectus (p, q, vel r, &c.) quo distat ab exacto valore ipsius y, tandem evadat minor quâvis datâ quantitate; &, in infinitum producta, sit ipsi y æqualis. Quod sic patebit.

2. I. Quoniam ex ultimo termino æquationum, quarum p, q, r, &c. sunt radices, quantitas illa in quâ x est minimæ dimensi-

(^t) Geometr. Analyt. Prob. VII. & Quadrat. Curv. Prop. II.

CAPUT DECIMUM.

onis (hoc eft, plufquam dimidium iftius ultimi termini, fi fupponis x fatis parvam effe) in quâlibet operatione perpetuò tollitur: ifte ultimus terminus (per 1. 10. *Elem.*) tandem evadet minor quâvis datâ quantitate; & prorfus evanefcet, fi opus infinitè continuatur.

Nempe fi $x=\frac{1}{2}$, erit x dimidium omnium $x+x^2+x^3+x^4$, &c. et x^2 dimidium omnium $x^2+x^3+x^4+x^5$, &c. Itaque fi $x \sqsupset \frac{1}{2}$, erit x plufquam dimidium omnium $x+x^2+x^3$, &c. et x^2 plufquam dimidium omnium $x^2+x^3+x^4$, &c. Sic fi $\frac{x}{b} \sqsupset \frac{1}{2}$, erit x plufquam dimidium omnium $x+\frac{x^2}{b}+\frac{x^3}{bb}$, &c (u). Et fic de reliquis. Et numeros coefficientes quod attinet, illi plerumque decrefcunt perpetuò, vel fi quando increfcant, tantùm opus eft, ut x aliquoties adhuc minor fupponatur.

II. Si ultimus terminus alicujus æquationis continuò diminuatur, donec tandem evanefcat, una ex ejus radicibus etiam diminuetur, donec cum ultimo termino fimul evanefcat.

III. Quare quantitatum p, q, r, &c. unus valor continuò decrefcit, donec tandem, cùm opus in infinitum producitur, penitùs evanefcat.

IV. Sed valores iftarum p, q, vel r, &c. unà cum quotiente eatenus extractâ, adæquant radices æquationis propofitæ (fic in refolutione æquationis $y^3+aay+axy-2a^3-x^3=0$, fuprà oftenfâ, percipies $y=a+p=a-\frac{1}{4}x+q=a-\frac{1}{4}x+\frac{xx}{64a}+r$, &c.) Unde fatis liquet propofitum, quòd quotiens, infinitè producta, eft una ex valoribus de y (x).

3. Idem patebit fubftituendo quotientem pro y in æquationem propofitam. Videbis enim terminos illos fefe perpetuò deftruere, in quibus x eft minimarum dimenfionum.

(u) Hæc fatis patent ex theoremate illo, quod fuprà demonftratum dedimus, de progreffionibus geometricis.

(x) Vide Geometr. Analyt. Cap. III. § 18 & 19.

EXCERPTA QUÆDAM

EX

EPISTOLIS NEWTONI

AD

SERIES FLUXIONESQUE PERTINENTIA.

E X C E R P T U M I.

EX EPISTOLA NEWTONI AD OLDENBURGUM PRIMA.

[Vide Commerc. Epiſtolic. N. 48.]

DE FORMULIS ALGEBRAICIS IN SERIES INFINITAS RESOLVENDIS.

FRactiones in Infinitas Series reducuntur per diviſionem; & quantitates radicales per extractionem radicum, perinde inſtituendo operationes iſtas in ſpeciebus, ac inſtitui ſolent in decimalibus numeris. Hæc ſunt fundamenta harum reductionum; ſed extractiones radicum, multùm abbreviantur per hoc *Theorema*. THEOREMA BINOMIALE.

$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ +$, &c.

2. Ubi $P+PQ$ ſignificat quantitatem cujus Radix, vel etiam dimenſio quævis, vel radix dimenſionis, inveſtiganda eſt; P, primum terminum quantitatis ejus; Q, reliquos terminos diviſos per primum. Et $\frac{m}{n}$, numeralem indicem dimenſionis ipſius $P+PQ$: ſive dimenſio illa integra ſit; ſive (ut ita loquar) fracta; ſive affirmativa, ſive negativa. Nam, ſicut Analyſtæ, pro *aa*, *aaa*, &c. ſcribere ſolent a^2, a^3, &c. ſic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^5}$, &c. ſcribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$; & pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$, ſcribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} (1). Et ſic pro $\frac{aa}{\sqrt{c:a^3+b^2x}}$ ſcribo $aa \times \overline{a^3+b^2x}|^{-\frac{1}{3}}$; & pro $\frac{a^2b}{\sqrt{c:\overline{a^3+b^2x} \times \overline{a^3+b^2x}}}$ ſcribo $a^2b \times \overline{a^3+b^2x}|^{-\frac{2}{3}}$: In quo ultimo caſu, ſi $\overline{a^3+b^2x}|^{-\frac{2}{3}}$ concipiatur eſſe $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}}$ in Regulâ; erit $P=a^3$, $Q=\frac{b^2x}{a^3}$, $m=-2$, & $n=3$. Denique, pro terminis inter operandum inventis in quoto, uſurpo

(1) Vide Arithmet. Univerſ. C. I.

Excerptum Primum.

A, B, C, D, &c. nempe A pro primo termino $P^{\frac{m}{n}}$, B pro secundo $\frac{m}{n}AQ$, & sic deinceps (b). Cæterùm usus Regulæ patebit exemplis.

3. *Exempl.* 1. Est $\sqrt{c^2+x^2}$ (seu $\overline{c^2+x^2}|^{\frac{1}{2}}$) $= c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9}$, &c. Nam, in hoc casu, est $P = c^2$, $Q = \frac{x^2}{c^2}$, $m = 1$, $n = 2$, A $(= P^{\frac{m}{n}} = \overline{cc}|^{\frac{1}{2}})$ $= c$, B $(= \frac{m}{n}AQ) = \frac{x^2}{2c}$, C $(= \frac{m-n}{2n}BQ) = -\frac{x^4}{8c^3}$, & sic deinceps.

4. *Exempl.* 2. Est $\sqrt{5{:}c^5 + c^4x - x^5}$ (i. e. $\overline{c^5+c^4x-x^5}|^{\frac{1}{5}}$) $= c + \frac{c^4x - x^5}{5c^4} - \frac{2c^8x^2 + 4c^4x^6 - 2x^{10}}{25c^9} +$ &c. Ut patebit substituendo in allatam Regulam, 1 pro m, 5 pro n, c^5 pro P, & $\frac{c^4x - x^5}{c^5}$ pro Q. Potest etiam $-x^5$ substituti pro P, & $\frac{c^4x + c^5}{-x^5}$ pro Q; et tunc evadet $\sqrt{5{:}c^5 + c^4x - x^5}$ $= -x$

Demonstratio

(b) Hujus formulæ hanc ferè investigationem auctores tradunt.

Casus 1. Designante P unitatem, ut sit $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = \overline{1+Q}|^{\frac{m}{n}}$, finge seriem infinitam

$$1 + aQ + bQ^2 + cQ^3 + dQ^4 + eQ^5 + . = \overline{1+Q}|^{\frac{m}{n}}.$$

Unde hæc orietur fluxionum æquatio.

$$a\dot{Q} + 2bQ\dot{Q} + 3cQ^2\dot{Q} + 4dQ^3\dot{Q} + 5eQ^4\dot{Q} + . = \frac{m}{n}\dot{Q} \times \overline{1+Q}|^{\frac{m-n}{n}}.$$

Et ex duabus hisce, divisione nimirum, tertia fiet.

$$\frac{a + 2bQ + 3cQ^2 + 4dQ^3 + 5eQ^4 + .}{1 + aQ + bQ^2 + cQ^3 + dQ^4 + eQ^5 + .} = \frac{m}{n}\,\frac{\overline{\times 1+Q}|^{\frac{m-n}{n}}}{\overline{1+Q}|^{\frac{m}{n}}} = \frac{m}{n.\overline{1+Q}}.$$

Ex hâc tertiâ, fractionibus per multiplicationes quibus opus est sublatis, quarta demum existet.

$$\begin{matrix} na + 2nbQ + 3ncQ^2 + 4ndQ^3 + 5neQ^4 + . \\ + naQ + 2nbQ^2 + 3ncQ^3 + 4ndQ^4 + . \end{matrix} = m + maQ + mbQ^2 + mcQ^3 + mdQ^4 + meQ^5 + .$$

Jam verò membrorum homologorum coefficientibus æquatis, elicientur seriei principio positæ coefficientes. Nempe hoc modo.

I. $aa = m$. Ergo $a = \frac{m}{n}$.

II. $2nb + na = ma$. Ergo $b = a \times \frac{m-n}{2n}$.

III. $3nc + 2nb = mb$. Ergo $c = b \times \frac{m-2n}{3n}$.

IV. $4nd + 3nc = mc$. Ergo $d = c \times \frac{m-3n}{4n}$.

V. $5ne + 4nd = md$. Ergo $e = d \times \frac{m-4n}{5}$.

Hinc literâ A in hoc casu designante unitatem, membrum secundum seriei principio positæ, sive $aQ = \frac{m}{n}AQ$.

Membrum

$= -x + \frac{c^4x + c^5}{5x^4} + \frac{3c^8x^2 + 4c^9x + c^{10}}{25x^9} +$ &c. Prior modus eligendus est, si x valdè parvum sit; posterior, si valdè magnum. THEOREMA BINOMINALE.

5. *Exempl.* 3. Est $\frac{N}{\sqrt{3:y^3 - a^2y}}$ (hoc est, $N \times \overline{y^3 - a^2y}|^{-\frac{1}{3}}$) æqualis $N \times \frac{1}{y} + \frac{a^2}{3y^3} + \frac{2a^4}{9y^5} + \frac{14a^6}{81y^7} +$, &c. Nam $P = y^3$, $Q = \frac{-aa}{yy}$, $m = -1$, $n = 3$. $A\ (= P^{\frac{m}{n}} = y^{3 \times -\frac{1}{3}}) = y^{-1}$, hoc est $\frac{1}{y}$. $B\ (= \frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{y} \times \frac{-aa}{yy}) = \frac{aa}{3y^3}$, &c.

6. *Exempl.* 4. Radix cubica ex quadrato-quadrato ipsius $d+e$, (hoc est, $\overline{d+e}|^{\frac{4}{3}}$) est $d^{\frac{4}{3}} + \frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2e^2}{9d^{\frac{2}{3}}} - \frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}} +$, &c. Nam $P = d$, $Q = \frac{e}{d}$, $m = 4$, $n = 3$, $A\ (= P^{\frac{m}{n}}) = d^{\frac{4}{3}}$, &c.

7. *Exempl.* 5. Eodem modo simplices etiam potestates eliciuntur. Ut si quadrato-cubus ipsius $d+e$, (hoc est, $\overline{d+e}|^5$, seu $\overline{d+e}|^{\frac{5}{1}}$) desideretur: erit, juxta regulam, $P = d$, $Q = \frac{e}{d}$, $m = 5$, & $n = 1$; adeoque $A\ (= P^{\frac{m}{n}}) = d^5$, $B\ (= \frac{m}{n} AQ) = 5d^4e$, & sic $C = 10d^3e^2$, $D = 10d^2e^3$,

E=

Membrum tertium, sive $bQ^2 = a \times \frac{m-n}{2n} Q^2 = aQ \times \frac{m-n}{2n} Q = \frac{m-n}{2n} BQ$, designante nimirum literâ B quantitatem aQ. THEOREMATIS BINOMINALIS.

Membrum quartum seriei principio positæ, sive $cQ^3 = b \times \frac{m-2n}{3n} Q^3 = bQ^2 \times \frac{m-2n}{3n} Q = \frac{m-2n}{3n} CQ$, designante literâ C quantitatem bQ^2.

Membrum quintum seriei principio positæ, sive $dQ^4 = c \times \frac{m-3n}{4n} Q^4 = cQ^3 \times \frac{m-3n}{4n} Q = \frac{m-3n}{4n} DQ$, designante literâ D quantitatem cQ^3.

In summâ, series principio posita, videlicet, $1 + aQ + bQ^2 + cQ^3 + dQ^4 + eQ^5$, &c. huic æqualis erit $1 + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \frac{m-4n}{5n} EQ +$, Q. E. D.

Casus 2. Jam verò litera P quantitatem quamvis designet sive majorem sive minorem unitate. Quantitas $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} \times \overline{1+Q}|^{\frac{m}{n}}$. Sed ex casu priori $\overline{1+Q}|^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} Q + \frac{m-n}{2n} aQ^2 + \frac{m-2n}{3n} bQ^3 + \frac{m-3n}{4n} cQ^4 + \frac{m-4n}{5n} dQ^5 +$.

Ergo $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} P^{\frac{m}{n}} Q + \frac{m-n}{2n} P^{\frac{m}{n}} aQ^2 + \frac{m-2n}{3n} P^{\frac{m}{n}} bQ^3 + \frac{m-3n}{4n} P^{\frac{m}{n}} cQ^4 + \frac{m-4n}{5n} P^{\frac{m}{n}} dQ^5$, $+$.

Hoc est, si quantitatem $P^{\frac{m}{n}}$ literâ A designaveris, quantitatem $P^{\frac{m}{n}} aQ$ literâ B, quantitatem $P^{\frac{m}{n}} bQ^2$ literâ C, quantitatem $P^{\frac{m}{n}} cQ^3$ literâ D, quantitatem $P^{\frac{m}{n}} dQ^4$ literâ E: $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \frac{m-4n}{5n} EQ +$. Q. E. D.

Hujus investigationis auctorem Heynesium quendam nomine Raphsonus perhibet. (History of Fluxions, Cap. 3.)

EXCERPTUM PRIMUM.

$E = 5de^4$, $F = e^5$, & $G \left(= \frac{m-5n}{6n} FQ\right) = 0$. Hoc eft, $\overline{d+e}|^5 = d^5 + 5d^4e + 10d^3e^2 + 10d^2e^3 + 5de^4 + e^5$.

8. *Exempl.* 6. Quinetiam Divifio, five fimplex fit, five repetita, per eandem regulam perficitur. Ut fi $\frac{1}{d+e}$ (hoc eft, $\overline{d+e}|^{-1}$ five $\overline{d+e}|^{-\frac{1}{1}}$) in feriem fimplicium terminorum refolvendum fit: Erit, juxta regulam, $P = d$. $Q = \frac{e}{d}$. $m = -1$. $n = 1$. & $A \left(= P^{\frac{m}{n}} = d^{-\frac{1}{1}}\right) = d^{-1}$ feu $\frac{1}{d}$. $B \left(= \frac{m}{n} AQ = -1 \times \frac{1}{d} \times \frac{e}{d}\right) = -\frac{e}{dd}$. Et fic $C = \frac{ee}{d^3}$. $D = -\frac{e^3}{d^4}$, &c. Hoc eft, $\frac{1}{d+e} = \frac{1}{d} - \frac{e}{dd} + \frac{ee}{d^3} - \frac{e^3}{d^4}$, &c.

9. *Exempl.* 7. Sic & $\overline{d+e}|^{-3}$, (hoc eft, Unitas ter divifa per $d+e$, vel femel per cubum ejus) evadit $\frac{1}{d^3} - \frac{3e}{d^4} + \frac{6ee}{d^5} - \frac{10e^3}{d^6} +$, &c.

10. *Exempl.* 8. Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{1}{3}}$, (hoc eft, N divifum per radicem cubicam ipfius $d+e$) evadit $N \times \overline{\frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} - \frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}} + \frac{2ee}{9d^{\frac{7}{3}}} - \frac{14e^3}{81d^{\frac{10}{3}}} +, \text{\&c.}}|$

11. *Exempl.* 9. Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{3}{5}}$, hoc eft, N divifum per radicem quadrato-cubicam ex cubo ipfius $d+e$, five $\frac{N}{\sqrt{5: d^3 + 3dde + 3dee + e^3}}$) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{3}{5}}} - \frac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}} + \frac{12ee}{25d^{\frac{13}{5}}} - \frac{52e^3}{125d^{\frac{18}{5}}} +$, &c.

12. Per eandem regulam, Genefis poteftatum, Divifiones per poteftates aut per quantitates radicales, & Extractiones radicum altiorum in numeris, etiam commodè inftituuntur.

13. Extractiones radicum affectarum in fpeciebus imitantur earum extractiones in numeris. Sed methodus *Vietæ* & *Oughtredi* noftri huic negotio minùs idonea eft. Quapropter aliam excogitare adactus fum, *cujus fpecimina, ne repetantur, vide in tractatu de Analyfi, &c.* Cap. IV.

14. Dicam tantùm in genere, quòd radix cujufvis æquationis femel extracta, pro regulâ refolvendi confimiles æquationes affervari poffit; quòdque ex pluribus ejufmodi regulis, regulam generaliorem plerumque efformare liceat; & quòd radices omnes, five fimplices fint five affectæ, modis infinitis extrahi poffint; de quorum fimplicioribus itaque femper confulendum eft.

EXCERPTUM

EXCERPTUM II^m.

Ex Epiſtolâ Newtoni ad Oldenburgum poſteriore.

[*Commerc. Epiſtolic.*] N°. 55—64.

De Seriebus condendis et invertendis.

[*Quæ ſequuntur ſcripta ſunt in explicationem Epiſtolæ præcedentis.*]

QUOD verò attinet ad Inventionem terminorum p, q, r, (vide Analyſ. per Æquat. Infinit. cap. 4.) in extractione radicis affectæ, primum p ſic eruo ([c])

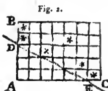
B — Fig. 1.

x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4
x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4
x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4
x	xy	xy^2	xy^3	xy^4
o	y	y^2	y^3	y^4

A — C

2. Deſcripto angulo recto BAC, latera ejus BA, CA divido in partes æquales; & inde normales erigo diſtribuentes angulare ſpatium in æqualia parallelogramma vel quadrata, quæ concipio denominata eſſe à dimenſionibus duarum indefinitarum ſpecierum, puta x & y, regulariter aſcendentium à termino A; prout vides in Fig. 1. inſcriptas. Ubi y denotat radicem extrahendam; et x alteram indefinitam quantitatem, ex cujus poteſtatibus ſeries conficienda eſt. Deinde, cùm æquatio aliqua proponitur, parallelogramma ſingulis ejus terminis correſpondentia inſignio notâ aliquâ: et regulâ ad duo, vel fortè plura, ex inſignitis parallelogrammis applicatâ; quorum unum ſit humillimum in columnâ ſiniſtrâ juxta AB, & alia ad regulam dextrorſum ſita, cæteraque omnia, non contingentia regulam, ſupra eam jaceant; ſeligo terminos æquationis per parallelogramma contingentia regulam deſignatos, & inde quæro quantitatem quotienti addendam.

Fig. 2.



3. Sic ad extrahendam radicem y, ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$; parallelogramma hujus terminis reſpondentia ſigno notâ aliquâ ∗; ut vides in Fig. 2. Dein applico regulam DE ad inferiorem è locis ſignatis in ſiniſtrâ columnâ; eamque ab inferioribus ad ſuperiora dextrorſum gyrare facio, donec

([c]) Vide Geometr. Analyt. c. iii. §. 2.

donec alium similiter, vel fortè plura, è reliquis signatis locis cœperit attingere. Videoque loca sic attacta esse x^3, x^2y^2, & y^6. E terminis itaque, $y^6-7a^2x^2y^2+6a^3x^3$ tanquam nihilo æqualibus (& insuper si placet reductis ad $v^6-7v^4+6=0$, ponendo $y=v\sqrt{ax}$,) quæro valorem y, & invenio quadruplicem, $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, & $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro primo termino quotientis accipere licet, prout è radicibus quampiam extrahere decretum est.

4. Sic æquatio $y^3+axy+aay-x^3-2a^3=0$, quam resolvebam in priori Epistolâ, dat $-2a^3+aay+y^3=0$, & inde $y=a$ proximè: cùm itaque a sit primus terminus valoris y, pono p pro cæteris omnibus in infinitum, & substituo $a+p=y$. (Obvenient hic aliquando difficultates nonnullæ; sed ex iis, credo, lector se proprio marte extricabit.) Subsequentes vero termini q, r, s, &c. eodem modo ex æquationibus secundis, tertiis, cæterisque eruuntur, quo primus p è prima, sed curâ leviori; quia cæteri valores y solent prodire dividendo terminum involventem infimam potestatem indefinitæ quantitatis x per coefficientem radicis p, q, r, aut s.

5. Intellexti credo ex superioribus, regressionem ab areis curvarum ad lineas rectas, fieri per hanc extractionem radicis affectæ. Sed duo alii sunt modi quibus idem perficio.

6. Eorum unus affinis est computationibus, quibus colligebam approximationes sub finem alterius Epistolæ, & intelligi potest per hoc exemplum. Proponatur æquatio ad aream hyperbolæ $z=x+\frac{1}{2}xx+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5$, &c (d). Et partibus ejus multiplicatis in se, emerget $z^2=x^2+x^3+\frac{11}{12}x^4+\frac{5}{6}x^5$, &c. $z^3=x^3+\frac{3}{2}x^4+\frac{7}{4}x^5$, &c. $z^4=x^4+2x^5$, &c. $z^5=x^5$, &c. Jam de z aufero $\frac{1}{2}zz$, & restat $z-\frac{1}{2}zz=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{24}x^4-\frac{13}{60}x^5$, &c. Huic addo $\frac{1}{6}z^3$, & fit $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3=x+\frac{1}{24}x^4+\frac{3}{40}x^5$, &c. Aufero $\frac{1}{24}z^4$, & restat $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4=x-\frac{1}{120}x^5$, &c. Addo $\frac{1}{120}z^5$, & fit $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5=x$ quamproximè; sive $x=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$, &c.

7. Eodem modo, series de unâ indefinitâ quantitate, in aliam transferri possunt. Quemadmodum si posito r radio circuli, x

(d) Vide Geometr. Analyt. cap. IX. §. 34.

sinu

ſinu recto arcûs z, & $x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} +$ &c. longitudine arcûs iſtius; atque hanc ſeriem à ſinu recto ad tangentem vellem transferre: quæro longitudinem tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr-xx}}$, & reduco in infinitam ſeriem, $x + \frac{x^3}{2rr} + \frac{3x^5}{8r^4} +$ &c. Vocetur hæc quantitas, t. Colligo poteſtates ejus $t^3 = x^3 + \frac{3x^5}{2rr}$ &c. $t^5 = x^5 +$ &c. Aufero autem t de z, & reſtat $z - t = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{10}x^5 -$ &c. Addo $\frac{1}{3}t^3$, & fit $z - t + \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{5}x^5 +$ &c. Aufero $\frac{1}{5}t^5$, & reſtat $z - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 = 0$ quamproximè. Quare eſt $z = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 -$ &c. Sed ſiquis in uſus trigonometricos me juſſiſſet exhibere expreſſionem arcûs per tangentem; eam non hoc circuitu, ſed directâ methodo quæſiviſſem. INVERSIO SERIERUM.

8. Per hoc genus computi colliguntur etiam ſeries ex duabus vel pluribus indefinitis quantitatibus conſtantes; & radices affectarum æquationum magnâ ex parte extrahuntur. Sed ad hunc poſteriorem uſum adhibeo potiùs methodum in alterâ epiſtolâ deſcriptam tanquam generaliorem, & (regulis pro eliſione ſuperfluorum terminorum habitis) paulo magis expeditam.

9. Pro Regreſſione vero ab areis ad lineas rectas, & ſimilibus, poſſunt hujuſmodi *Theoremata* adhiberi.

10. THEOREMA I. Sit $z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$, &c.

Et viciſſim erit
$$y = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^3}z^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}z^3 + \frac{5abc - 5b^3 - a^2d}{a^7}z^4 + \frac{3a^2c^2 - 21ab^2c + 6a^2bd + 14b^4 - a^3e}{a^9}z^5 + \text{\&c.}$$

11. *Exempli gratiâ.* Proponatur æquatio ad aream hyperbolæ, $z = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c (e). Et ſubſtitutis in regula 1 pro a, $-\frac{1}{2}$ pro b, $\frac{1}{3}$ pro c, $-\frac{1}{4}$ pro d, & $\frac{1}{5}$ pro e; viciſſim exurgit, $y = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 +$ &c.

12. THEOREMA II. Sit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 +$ &c.

(e) Vide Geometr. Analyt. c. IX. §. 34.

EXCERPTUM TERTIUM.

Et viciffim erit

$$y = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^4}z^3 + \frac{3b^2 - ac}{a^7}z^5 + \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}z^7 + \frac{55b^4 - 55ab^2c + 10a^2bd + 5a^2c^2 - a^3e}{a^{13}}z^9 + \&c.$$

13. *Exempli gratiâ.* Proponatur æquatio ad arcum circuli, $z = y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \&c.$ Et fubftitutis in regulâ 1 pro a, $\frac{1}{6r^2}$ pro b, $\frac{3}{40r^4}$ pro c, $\frac{5}{112r^6}$ pro d, &c. orietur $y = z - \frac{z^3}{6r^2} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \&c$ (f).

EXCERPTUM III.

Ex Epiftolâ Newtoni ad Wallifium, de radicibus æquationum fluxionalium extrabendis.

1. SUB finem epiftolæ anni 1676 [*hæc funt verba* Wallifii] fcribit [D. *Newtonus*] etiam Problema determinandi curvas per conditiones tangentium in fuâ poteftate effe, unà cum aliis difficilioribus; ad quæ folvenda fe ufum effe dicit duplici methodo, unâ concinniore, alterâ generaliore; & utramque literis tranfpofitis celat: quæ in ordinem redactæ hanc fententiam exhibent. *Una methodus confiftit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione fimul involvente fluxionem ejus. Altera tantùm in affumptione feriei*

ÆQUATIONIS INFINITÆ

(f) Duobus hifce Newtonianis meritò tertium adjungatur Moivræi Theorema, cujus ope radices extrahantur infinitè quæ dicuntur affectæ.

Sit æquatio inter feries infinitas

$$\mathrm{a}z + \mathrm{b}z^2 + \mathrm{c}z^3 + \mathrm{d}z^4 + \mathrm{e}z^5 + . = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 +$$

Ut extrahatur radix y, ponatur

$$y = \mathrm{A}z + \mathrm{B}z^2 + \mathrm{C}z^3 + \mathrm{D}z^4 + \mathrm{E}z^5 +$$

Hujus coefficientes his æquationibus definientur:

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{a}}{a}$$

$$\mathrm{B} = \frac{a^2\mathrm{b} - b\mathrm{a}^2}{a^3}$$

$$\mathrm{C} = \frac{a^4\mathrm{c} - ac\mathrm{a}^3 - 2ba^2\mathrm{ab} + 2b^2\mathrm{a}^3}{a^5}$$

$$\mathrm{D} = \frac{a^6\mathrm{d} - 2ba^4\mathrm{ca} + 2baca^4 + 6b^2a^2\mathrm{a}^2\mathrm{b} - 5b^3\mathrm{a}^4 - bb^2a^4 + 3cba\mathrm{a}^4 - 3ca^3\mathrm{a}^2\mathrm{b} - da^2\mathrm{a}^4}{a^7}$$

$a^8\mathrm{e}$ −

riei pro quantitate quâlibet incognitâ ex quâ cætera commodè derivari possunt; *& in collatione terminorum homologorum æquationis resultantis ad eruendos terminos assumptæ seriei.* Harum methodorum secunda ex verbis jam recitatis absque ulteriore explicatione intelligi potest; priorem ab authore jam accepi ut sequitur. De Rad. Æquat. Flux. Extrahend.

2. Hæc methodus, ait, ejusdem est generis cum eâ pro extrahendo radices ex æquationibus affectis superiùs descriptâ. Pone quòd Problema resolvendum reducatur ad æquationem fluentes quantitates y & z unà cum earum fluxionibus $\dot{y}$ & $\dot{z}$ involventem, & quòd fluxio ipsius z uniformis sit. Ut hæc fluxio ex æquatione evanescat, pro eâ ponatur unitas, & manebit æquatio solas y, z & $\dot{y}$ involvens, *quam resolvendam* vocat. Proponitur inventio ipsius y in serie infinitâ convergente, quæ solam z involvet. Hoc in aliquibus æquationibus impossibile est, in aliis præparationem æquationum requirit, ubi verò directè confici possit resolutio est hujusmodi.

PROBLEMA

3. *Ex æquatione fluxionem radicis involvente radicem extrahere.*

RESOLUTIO.

TERMINI omnes, ex eodem æquationis latere consistentes, æquentur nihilo, & ipsarum y & $\dot{y}$ dignitates (si opus sit) exaltentur vel deprimantur, sic ut earum indices nec alicubi negativi sint, nec tamen altiores quàm ad hunc effectum requiritur; & sit kz^{λ} terminus infimæ dignitatis eorum, qui neque per y, ne-

$$\mathrm{E} = \frac{a^8\mathrm{e} - 2ba^6\mathrm{ad} + 6b^2a^4\mathrm{ca}^2 - 21b^2ac\mathrm{a}^5 - 16b^3a^2\mathrm{a}^3\mathrm{b} + 14b^4\mathrm{a}^5 + 2b^2\mathrm{b}^2a^4\mathrm{a} + 20bca^3\mathrm{a}^3\mathrm{b} + 6bda^2\mathrm{a}^2 - 2ba^4\mathrm{cb} + 4b^2a^4\mathrm{b}^2 - 4b^3a^2\mathrm{ba}^2 - 3ca^5\mathrm{ca}^2 + 3c^2a^2\mathrm{a}^5 - 3ca^4b^2\mathrm{a} - 4da^4\mathrm{a}^3\mathrm{b} - ea^3\mathrm{a}^5}{a^9}.$$ Reductio Moivræana.

&c.
Vel hoc modo

$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{a}}{a}$. $\mathrm{B} = \frac{\mathrm{b} - b\mathrm{A}^2}{a}$. $\mathrm{C} = \frac{\mathrm{c} - 2b\mathrm{BA} - c\mathrm{A}^3}{a}$.

$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d} - 2b.\mathrm{AC} - b\mathrm{B}^2 - 3c\mathrm{A}^2\mathrm{B} - d\mathrm{A}^4}{a}$.

$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{e} - 2b.\mathrm{AD} - 2b\mathrm{BC} - 3c\mathrm{A}^2\mathrm{C} - 3c\mathrm{B}^2\mathrm{A} - 4d\mathrm{A}^3\mathrm{B} - e\mathrm{A}^5}{a}$.

Harum investigationem Maclaurinus tradit Algebræ suæ Part II. Cap. X.

que

EXCERPTUM TERTIUM.

que per ejus fluxionem $\dot{y}$, neque per earum dignitatem quamvis multiplicantur. Sit $lz^{\alpha}y^{\mu}\dot{y}^{\beta}$ terminus alius quilibet, & omnes ordine terminos percurrendo collige ex fingulis fcorfim numerum $\frac{\lambda-\alpha+\beta}{\mu+\beta}$ fic, ut tot habeas ejufmodi numeros quot funt termini. Horum numerorum maximus vocetur ν, & z^{ν} erit dignitas primi termini feriei. Pro ejus coefficiente ponatur a, & in æquatione quæ *refolvenda* dicitur, fcribe az^{ν} pro y, & $\nu az^{\nu-1}$ pro $\dot{y}$; ac termini omnes refultantes in quibus z ejufdem eft dignitatis ac in termino kz^{λ}, fub propiis fignis collecti, ponantur æquales nihilo. Nam hæc æquatio debitè reducta dabit coefficientem a. Sic habes az^{ν} terminum primum feriei.

Operatio fecunda.

4. Pro reliquis omnibus hujus feriei terminis nondum inventis pone p, & habebis æquationem $y=az^{\nu}+p$, & inde etiam æquationem $\dot{y}=\nu az^{\nu-1}+\dot{p}$. In refolvenda, pro y & $\dot{y}$ fcribe hos eorum valores, & habebis refolvendam novam, ubi p officium præftat ipfius y: & ex hâc refolvendâ primum extrahes terminum feriei p eodem modo atque terminum primum feriei totius, $y=az^{\nu}+p$, ex refolvendâ primâ extraxifti.

Operatio tertia et fequentes.

5. Dein tertiam refolvendam eâdem ratione invenias atque fecundam invenifti, & ex eâ terminum tertium feriei totius extrahes. Et fimiliter refolvendam quartam invenies, & ex eâ quartum feriei terminum, & fic in infinitum. Series autem fic inventa erit radix æquationis quam extrahere oportuit.

EXEMPLUM.

6. Ex æquatione $y^2\dot{z}^2-z^2\dot{z}\dot{y}-d^2\dot{z}\dot{z}+dz\dot{z}^2=0$, extrahenda fit radix y. Pone $\dot{z}=1$, & æquatio evadet $y^2-z^2\dot{y}-dd+dz=0$, quæ eft refolvenda. Jam verò terminus infimus, in quo nec y, neque $\dot{y}$ reperitur, eft dd, qui ipfi kz^{λ} æquatus dat $\lambda=0$. Terminis reliquis y^2, $-z^2\dot{y}$ pone $lz^{\alpha}y^{\mu}\dot{y}^{\beta}$ æqualem fucceffivè, & inde in primo cafu habebis $\mu=0$, $\alpha=2$, $\beta=0$; in fecundo $\mu=2$, $\alpha=0$, & $\beta=1$.

Et

Et hinc $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ fit in primo casu o, in secundo -1. Unde ν est o, & az^{ν} & $\nu az^{\nu-1}$ sunt a & o; quarum ultimæ duæ a & o in resolvendâ pro y & $\dot{y}$ scriptæ, producunt $aa+oz^2-dd+dz$; & termini aa & $-dd$, in quibus index dignitatis z est λ seu o, positi æquales nihilo dant $a=d$. Unde primus seriei terminus az^{ν} evadit d. De Rad. Æquat. Flux. Extrahend.

Operatio secunda.

7. Pro terminis reliquis pone p, & habebis æquationem $y=d+p$, & inde $\dot{y}=\dot{p}$; qui valores in resolvendâ pro y & $\dot{y}$ substituti dant resolvendam novam $2dp+pp-zz\dot{p}+dz=0$, ubi p & $\dot{p}$ vices subeunt ipsarum y & $\dot{y}$. Terminus unicus in quo nec p neque $\dot{p}$ reperitur est dz, qui cum termino kz^{λ} collatus dat $\lambda=1$. Terminis reliquis $2dp$, pp & $-zz\dot{p}$ pone $lz^{\mu}p^{\alpha}\dot{p}^{\beta}$ æqualem successivè, & inde in primo casu habebis $\mu=0$, $\alpha=1$, & $\beta=0$; in secundo $\mu=0$, $\alpha=2$, & $\beta=0$; & in tertio $\mu=2$, $\alpha=0$, & $\beta=1$. Et hinc $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ evadit primo casu 1, in secundo $\frac{1}{2}$, in tertio o. Unde ν est 1, & az^{ν} & $\nu az^{\nu-1}$ sunt az & a. Termini duo ultimi az & a in resolvendâ pro p & $\dot{p}$ respectivè scripti, producunt $2daz+a^2z^2-az^2+dz$. Et termini $2daz$ & dz, in quibus index dignitatis z est λ seu 1, positi æquales nihilo, dant $a=-\frac{1}{2}$. Unde az, terminus primus seriei, p fit $-\frac{1}{2}z$.

Operatio tertia.

8. Pro terminis reliquis nondum inventis pone q, & habebis æquationem $p=-\frac{1}{2}z+q$, & inde $\dot{p}=-\frac{1}{2}+\dot{q}$: qui valores pro p & $\dot{p}$ in resolvendâ novissimâ substituti producunt resolvendam novam $2dq-zq+qq+\frac{1}{4}zz-zz\dot{q}=0$. Ubi q & $\dot{q}$ vices supplent ipsorum y & $\dot{y}$. Terminus unicus in quo neque q nec $\dot{q}$ reperitur est $\frac{1}{4}zz$, qui cum kz^{λ} collatus dat $\lambda=2$. Terminis reliquis $2dq$, $-zq$, $+qq$, $-zz\dot{q}$ pone $lz^{\mu}q^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$ æqualem successivè; & inde in primo casu habebis $\mu=0$, $\alpha=1$, & $\beta=0$; in secundo, $\mu=1$, $\alpha=1$, $\beta=0$; in tertio, $\mu=0$, $\alpha=2$, $\beta=0$: in quarto, $\mu=2$, $\alpha=0$, $\beta=1$: & inde $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ evadit in primo casu 2, in secundo, tertio, & quarto, 1.

4 Et

EXCERPTUM TERTIUM. Et hinc ν eſt 2, vel az^{ν} & $\nu az^{\nu-1}$ ſunt az^2 & $2az$: qui valores in reſolvendâ pro q & $\dot{q}$ ſubſtituti dant $2daz^2 - az^3 + aaz^4 + \frac{3}{4}zz - 2az^3$; & termini $2dazz + \frac{3}{4}zz$, in quibus index dignitatis z eſt λ ſeu 2, poſiti æquales nihilo, dant $a = -\frac{3}{8d}$. Unde az^{ν} terminus primus ſeriei q evadit $-\frac{3zz}{8d}$.

Operatio quarta.

9. Pro reliquis ſeriei terminis nondum inventis pone r, & habebis æquationes $q = -\frac{3zz}{8d} + r$, & $\dot{q} = -\frac{3z}{4d} + \dot{r}$; & inde reſolvendam novam $2dr + \frac{9z^3}{8d} - zr + \frac{9z^4}{64dd} - \frac{3zzr}{4d} + rr - zz\dot{r} = 0$; & ex eâ per methodum ſuperiorem habebis $-\frac{9z^3}{16dd}$ terminum primum ſeriei r. Et ſic pergitur in infinitum.

10. Eſt igitur radix extrahenda $y = d + p = d - \frac{1}{2}z + q = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zz}{8d} + r = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zz}{8d} - \frac{9z^3}{16dd} -$ &c. Et operationem continuando producere licet radicem ad terminos plures (g).

11. Et eâdem methodo, dicit *Newtonus*, radices æquationum, fluxiones ſecundas, tertias, quartas, ($\ddot{y}$, $\dddot{y}$, $\ddddot{y}$,) aliaſque involventium, extrahi poſſe (h).

12. His utitur radicum extractionibus ubi aliæ methodi nil proſunt. Nam in epiſtolâ prædictâ anni 1676 docet, quòd in ſolutione problematum de tangentibus inverſorum, caſus aliqui dantur in quibus hæc methodus generalis non requiritur : & particulariter, ſi in triangulo rectangulo quod ab ordinatâ, tangente, & interjacente parte abſciſſæ conſtituitur, relatio duorum quorumlibet è lateribus tribus per æquationem quamvis definiatur ; problema abſque methodo hâcce generali ſolvi poterit.

13. Methodi autem hæ omnes, tam particulares quàm generales, collectim

(g) Harum operationum rationem Maclaurinus optimè explicavit Algebræ ſuæ Part II. Cap. X.

(h) Aliam etiam viam reſolvendi æquationes, quæ fluxionibus ſunt implicitæ, Newtonus in Geometriâ Analyticâ docet capite ejus Libri 4°. Sect. 2. quæ cùm non minùs generalis ſit quàm illa quæ in hoc excerpto tradita eſt, & computationum facilitate, meo equidem judicio, longè illi antecellat, miror profectò eam ab omnibus ferè relictam, cùm hæc, ſubtilior ſanè ſed uſu difficilior, diligentiſſimè exculta ſit.

() I.

collectim sumptæ, solutionem exhibent secundæ partis problematis, quod *Newtonus* sub initio istius epistolæ his verbis proposuit. *Datâ æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, & vice versâ.* Nam tota fluxionum methodus in hujus directâ & inversâ solutione consistit.

EXCERPTUM IV.

Ex epistolâ Newtoni ad Oldenburgum primâ.

De Problematis per Series Infinitas Resolvendis.

QUOMODO ex æquationibus, sic ad infinitas series reductis, Areæ & Longitudines curvarum, Contenta & Superficies solidorum, vel quorumlibet segmentorum figurarum quarumvis, eorumque centra gravitatis determinantur; & quomodo etiam curvæ omnes mechanicæ ad ejusmodi æquationes infinitarum serierum reduci possint, indeque problemata circa illas resolvi, perinde ac si Geometricæ essent; nimis longum foret describere: sufficiat specimina quædam talium problematum recensuisse: inque iis, brevitatis gratiâ, literas A, B, C, D, &c. pro terminis seriei, sicut sub initio, nonnunquam usurpabo.

1. *Si ex dato sinu recto, vel sinu verso, arcus desideretur:* sit radius r, & sinus rectus x: eritque arcus $= x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6}$ &c. hoc est, $= x + \frac{1 \times 1 \times xx}{2 \times 3 \times rr}$ A $+ \frac{3 \times 3xx}{4 \times 5rr}$ B $+ \frac{5 \times 5xx}{6 \times 7rr}$ C $+ \frac{7 \times 7xx}{8 \times 9rr}$ D + &c.

Vel, sit d diameter, ac x sinus versus; & erit arcus æqualis $d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}}$ + &c. hoc est, $= \sqrt{dx}$ in $1 + \frac{x}{6d} + \frac{3x^2}{40d^2} + \frac{5x^3}{112d^3}$ + &c (i).

2. Si vicissim, *ex dato arcu desideretur sinus:* sit radius r, & arcus

(i) 1. PUNCTO A manente (vid. fig. p. 299.) circumduci puta rectam AB datæ longitudinis, quæ termino suo mobili B circuli bBc circumflexum scribat. Sit AB situs quivis rectæ revolventis, et à puncto B in situm ejus primum AB deducatur ad perpendiculum recta BE: et per idem punctum B ducatur BF quæ circulum in B contingat, rectæque AB productæ in F occurrat. Fluxio arcûs bB ad fluxionem rectæ BE rationem habet eam quam BF ad BE (Introduct. ad Quadrat. Curv. § 4.) sive eam quam AB ad AE. Hinc si rectam datam AB litera r designet, arcum bB litera z, sinum ejus rectum BE litera x, erit $\dot{z} : \dot{x} = r : AE$. Hoc est $\dot{z} : \dot{x} =$

EXCERPTUM QUARTUM.

arcus z: eritque sinus rectus $= z - \frac{z^3}{6r^2} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8} -$ &c. hoc est, $= z - \frac{zz}{2 \times 3rr} A - \frac{zz}{4 \times 5rr} B - \frac{zz}{6 \times 7rr} C -$ &c. Et sinus versus

EX SINU. $\dot{z} : \dot{x} = r : \sqrt{r^2 - x^2}$. Quare $\dot{z} = \frac{\dot{x}r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Hoc est, si fractio $\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ convertatur in seriem infinitam (quod perficietur, si primùm extrahatur radix quadratica quantitatis $r^2 - x^2$, tum quantitas r radice illâ dividatur)

$$\dot{z} = \dot{x} \times 1 + \frac{x^2}{2r^2} + \frac{3x^4}{8r^4} + \frac{5x^6}{16r^6} + \frac{35x^8}{128r^8} +$$

$$\text{Ergo } z = x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6} +$$

SIN. EX ARC. Et invertendo, ope Theorematis 2. Excerpti II.

$$x = z - \frac{z^3}{6r^2} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8} +$$

2. *Cor.* Fluxio arcûs circularis ad finûs fluxionem rationem habet quam radius ad finum complementi.

ARC. EX SIN. VERS. 3. (k) FLUXIO arcûs BB ad fluxionem rectæ AE rationem habet quam BF ad FE (Introduct. Quad. Curv. §4.) hoc est, quam AB ad BE. Si igitur litera d circuli diametrum BC designet, litera z arcum BB, finum ejus versum AE litera y, erit $\dot{z} : \dot{y} = \frac{1}{2}d : BE = d : 2BE = d : 2\sqrt{dy - y^2}$. Quare $\dot{z} = \frac{d\dot{y}}{2\sqrt{dy - y^2}}$.

Vel si fractio $\frac{d}{2\sqrt{dy - y^2}}$ convertatur in feriem infinitam, $\dot{z} = \dot{y} \times \frac{1}{2}d^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\frac{y^{\frac{1}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3y^{\frac{3}{2}}}{16d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5y^{\frac{5}{2}}}{32d^{\frac{5}{2}}} + \frac{35y^{\frac{7}{2}}}{256d^{\frac{7}{2}}} +$. Ergo $z = d^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + \frac{y^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3y^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5y^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} + \frac{35y^{\frac{9}{2}}}{1152d^{\frac{7}{2}}} +$. Quæ est formula generalis arcûs è dato finu verso.

SIN. VERS. EX ARC. 4. Et hanc feriem invertendo ope Theorematis 2. Excerpti II.

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}z - \frac{1}{6d^{\frac{3}{2}}}z^3 + \frac{1}{120d^{\frac{5}{2}}}z^5 - \frac{1}{5040d^{\frac{7}{2}}}z^7 +$$

Unde, quadraticè multiplicando, conficitur

$$y = \frac{1}{d}z^2 - \frac{1}{3d^3}z^4 + \frac{2}{45d^5}z^6 - \frac{1}{315d^7}z^8 +$$

Vel pro literâ d fymbolo $2r$ fubstituto

$$y = \frac{1}{2r}z^2 - \frac{1}{24r^3}z^4 + \frac{1}{720r^5}z^6 - \frac{1}{40320r^7}z^8 +$$

Quæ est formula generalis finûs versi ex arcu dato. Unde statim elicitur finus complementi $r - y = r - \frac{z^2}{2r} + \frac{z^4}{24r^3} - \frac{z^6}{720r^5} + \frac{z^8}{40320r^7} +$.

5. *Cor.* Fluxio arcûs cujuspiam circularis ad fluxionem finûs complementi, five finûs fui versi, rationem habet quam radius ad finum.

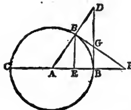
SERIES GREGORIANÆ. 6. HAUD diffimilis est inventio ferierum, quibus arcûs longitudinem ex tangente datâ, et tangentis vicissim ex arcu, Jacobus Gregorius omnium primus æstimare docuit.

7. Ducatur enim per punctum A recta BD quæ circulum BBC in loco A contingat, rectæque BF circulum utique in B contingenti in G occurrat. Cùm igitur recta AB, circa punctum A volubilis, curvæ BE rectæque BD in locis B, D, occurrat, recta vero BG curvam in B contingat, rectæque AD in G occurrat, fluxio rectæ AD erit ad fluxionem curvæ BB ut rectangulum AD × DG ad rectangulum $AB \times BG$. (Introduct. ad Quad. Curv. § 9.) Sed propter angulos DBG, DBA, rectos, et angulum BDG triangulis duobus ADA, ODB, communem, triangula illa erunt inter fe fimilia, et latera eorum angulos æquales ambientia eafdem inter fe proportiones habebunt. Quare AD est ad AG, vel ad AB,

I ut

versus $= \frac{z^2}{2r} - \frac{z^4}{24r^3} + \frac{z^6}{720r^5} - \frac{z^8}{40320r^7} +$ &c. hoc est, $= \frac{zz}{1 \times 2r} - \frac{zz}{3 \times 4rr} A - \frac{zz}{5 \times 6rr} B - \frac{zz}{7 \times 8rr} C -$ &c (k). SINUS EX ARCU.

3. *Si*



ut oo ad G*B*. Rectangula igitur AD × DG, *AB* × *BG* inter se similia sunt. Figuræ autem similes sunt inter se sicut quadrata è lateribus homologis. Erit igitur rectangulum AD × DG ad rectangulum *AB* × *BG* sicut quadratum ex AD ad quadratum ex A*B*. Quare fluxio rectæ BD erit ad fluxionem arcûs B*B* ut quadratum ex AD ad quadratum ex A*B*. Hoc est, si litera t rectam BD designet, $\dot{t} : \dot{z} = r^2 + t^2 : r^2$. Ergo $\dot{z} = \frac{r^2}{r^2 + t^2} \dot{t}$. Hoc est, fractione $\frac{r^2}{r^2 + t^2}$ in seriem infinitam per divisionis operam resolutâ, SERIES GREGORIANÆ.

$$\dot{z} = \dot{t} - \frac{t^2\dot{t}}{r^2} + \frac{t^4\dot{t}}{r^4} - \frac{t^6\dot{t}}{r^6} + \frac{t^8\dot{t}}{r^8} - \frac{t^{10}\dot{t}}{r^{10}} +$$

Ergo $z = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \frac{t^{11}}{11r^{10}} +$, ARC. EX TANG.

Et hanc seriem invertendo ope Theorematis 2. Excerp. II.

$$t = z + \frac{1}{3r^2} z^3 + \frac{2}{15r^4} z^5 + \frac{17}{315r^6} z^7 + \frac{62}{2835r^8} z^9 +$$ TANG. EX ARC.

(vide Commerc. Epist. N°. XX.)

8. *Cor.* Fluxio tangentis ad fluxionem arcûs rationem habet secantis ad radium duplicatam.

9. FORMULA quâ Gregorius secantem definivit ex arcu, ex illâ Newtoni quæ ex arcu sinum complementi repræsentat, facilè deducenda est. Cùm enim horum trium, secantis, radii et sinûs complementi continua sit analogia, ad secantem æstimandam id nimirum opus erit, quadratum è radio dividere complementi sinu. Jam verò inventus est sinus complementi arcûs $z = r - \frac{z^2}{2r} + \frac{z^4}{24r^3} - \frac{z^6}{720r^5} + \frac{z^8}{40320r^7} -$. (§. 4 hujus) Quare secans, sive $\frac{r^2}{r - \frac{z^2}{2r} + \frac{z^4}{24r^3} +}$, $= r + \frac{z^2}{2r} + \frac{5}{24r^3} z^4 + \frac{61}{720r^5} z^6 + \frac{277}{8064r^7} z^8 + \frac{50521}{3628800r^9} z^{10} +$; et hæc est formula generalis Gregoriana secantis ex arcu. (Vide Commercium Epist. N°. XX.) SEC. EX ARC.

10. ATQUE hæ quidem series vulgò notæ sunt, et quotidiano ferè Geometrarum usu frequentatæ. Sunt autem aliæ quædam minùs pervagatæ, ab eodem illo Gregorio profectæ, subtilissimæ indaginis; quarum utique compendio Secantem et Tangentem arcûs cujusque, uti loquuntur, Logarithmicam, sive logarithmum potiùs rationis quam secans quæque vel tangens ad radium habeat, vir acutissimus generaliter definivit ex arcu. Ad harum serierum inventionem Theoremate Geometrico uno atque altero via nobis munienda est.

THEOREMA I.

11. *Fluxio secantis est ad fluxionem arcûs ut rectangulum sub secante et tangente ad quadratum ex circuli radio.*

RECTA AB, circa punctum A volubili, circumflexum circuli scribente, ducatur recta BD, quæ circulum in B contingat, rectæque volubili, situm quemvis novum A*B* obtinenti, in D occurrat. Dico fluxionem rectæ AD esse ad fluxionem arcûs B*B* ut rectangulum AD × DB ad quadratum ex AB. Fluxio rectæ AD est ad fluxionem rectæ DB ut DB ad DA (Introduct. ad Quad. Curv. § 7.) sive ut rectangulum DB × DA ad quadratum ex DA. Fluxio autem rectæ DB est ad fluxionem arcûs B*B*, ut quadratum ex DA ad quadratum ex AB. (§. 8. hujus.) Erit igitur ex æquo fluxio rectæ AD ad fluxionem arcûs B*B* ut rectangulum AD × DB ad quadratum ex AB. Q. E. D.

EXCERPTUM QUARTUM.

3. *Si arcus capiendus sit in ratione datâ ad alium arcum:* esto diameter

THEOREMA II.

DE SECANTIBUS

12. *Sit* BB *arcus circuli, cujus centrum* A *radius* AB. *Sit hyperbola æquilatera* FMN, *cujus centrum* E, *semiaxis* EF, *asymptotæ rectæ* EG, EH *ad perpendiculum compositæ. Harum in alterutrâ, puta* EG, *capiatur* EK *radio circuli, sive rectæ* AB *æqualis; et* EL *æqualis rectæ* AD *arcûs* BB *secanti: et à punctis* K, L *educantur ad perpendiculum rectæ* KM, LN, *hyperbolam usque; cui occurrant illæ in punctis* M, N. *Sit etiam curva* OQR, *cujus ea sit natura, ut si in axe ejus,* OS, *capiatur* OP *arcui cuipiam circuli, æqualis, recta* PQ, *à puncto* P *ad perpendiculum educta curvam usque, æqualis sit ejusdem arcûs tangenti. His positis, si* OP *capiatur in axe curvæ æqualis arcui illi* BB, *cujus secanti,* AD, *recta* EL *accepta est æqualis in asymptotâ hyperbolæ, area hyperbolica* KLMN *ad aream* OPQ *datam rationem geret: nempe eam, quam dimidium quadrati ex* EF, *semiaxe hyperbolæ, habet ad quadratum ex circuli radio* AB.

In figurâ harum trium mediâ omissæ sunt rectæ per puncta Q, x, q, o ducendæ, ut rectangula QP × Pπ, xπ × πρ, qρ × ρo perficerentur.

DIVIDATUR enim arcus BB in partes quotlibet, sive æquales sive inæquales Bb, bβ, βB. Junctæ Ab, Aβ tangenti BD in punctis d, δ occurrant. Capiantur in hyperbolæ asymptotâ EG rectæ Ek, Eκ secantibus Ad, Aδ, et in curvæ OR axe OS capiantur Oρ, Oπ arcubus Bb, Bβ æquales. Ita rectarum KL, OP in partes numero æquales divisio fiet; quarum illæ Kk, kκ, κL, secantium AB, Ad, Aδ, AD differentiis, hæ Oρ, ρπ, πP, arcubus Bb, bβ, βB, ordine sumendis, æquales erunt. A divisionum punctis, k, κ: ρ, π, educantur ad perpendiculum curvas usque, illic quidem km, κμ, hic vero ρq, πx: compleanturque rectangula Km, kμ, κN; Oq, ρx, πQ. Rectangulum κN ad rectangulum πQ rationem habet compositam è rationibus rectæ NL ad PQ rectæque κL ad πP; sive è rationibus rectæ NL ad rectam AD, rectæque κL ad arcum Bβ. Rectanguli quoque μk ad rectangulum xρ composita est ratio è rationibus rectæ μκ ad rectam πx rectæque κk ad πρ: hoc est, cùm recta πx, ex curvæ OR naturâ, tangenti Aδ sit æqualis, è rationibus rectæ μκ ad tangentem Aδ, rectæque κk ad arcum βb. Ratio denique rectanguli mK ad rectangulum Oq composita est è rationibus rectæ mk ad tangentem Bd, rectæque Kk ad arcum bB. Jam verò si numerus arcuum Bb, bβ, βB infinitè augeatur, magnitudinibus singulorum infinitè decrescentibus, unde partium quoque rectæ KL videlicet ipsarum Kk, kκ, κL, necnon partium rectæ OP, videlicet ipsarum Oρ, ρπ, πP numerus pariter infinitè crescet, magnitudinibus singularum infinitè imminutis, hoc inquam si fiat, ratio ultima evanescentis rectæ Lκ ad arcum evanescentem Bβ, ea erit quæ est rectanguli AD × DB ad quadratum ex AB: (per Theor. I.) nempe cùm illa Lκ secantium quidem, AD, Aδ, sit differentia, hæc Bβ arcuum verò; et differentiæ quantitatum evanescentes fluxionum proportiones ultimò inter se asciscant. (Geomet. Flux. Prop. I.) Quæ igitur è rationibus rectæ LN ad rectam AD rectæque Lκ ad arcum Bβ composita est ratio, hæc inquam, rectâ Lκ arcuque Bβ evanescentibus, fit illi quidem ultimò æqualis, quæ componitur e rationibus rectæ LN ad rectam AD rectanguli que AD × DB ad quadratum ex AB. Vel è rationibus rectanguli LN × EL, ad EL × BD vel AD × BD, ejusdemque

AD

diameter $= d$, chorda arcûs dati $= x$, & arcus quæsitus ad arcum illum — Arcus ex Arcu x.

AD × BD ad quadratum ex AB. Ex hisce verò rectanguli LN × EL ad quadratum ex AB composita est ratio. (El. Lib. VI. Def. 5.) Quæ igitur è rationibus rectæ LN ad rectam BO, rectæque LN ad arcum $B\beta$, ultimò scilicet evanescente arcu illo, composita est ratio, quæ ex priùs ostensis rectangulorum evanescentium Nk, πQ, ultima inter ipsa ratio est, hæc eadem rectanguli LN × EL ad quadratum ex AB est ratio. Sed è naturâ hyperbolæ æquilateræ rectangulum LN × EL, et dimidium quadrati ex EF inter se sunt æqualia. Rectanguli igitur LN × EL et dimidii quadrati ex EF ad quadratum ex AB eadem est ratio (Elem. V. 7.) Rectangulorum igitur evanescentium Nk, QT, ea quidem inter ipsa ultima est ratio, quam dimidium quadrati ex EF habet ad quadratum ex AB. Eodemque prorsùs modo evanescentium μk, $x\rho$ necnon πn, ϱo eadem efficietur ratio ultima communis; nimirum data illa, quæ est dimidii quadrati ex EF, semiaxe hyperbolæ, ad quadratum ex AB circuli radio. Quare et arearum KMNL, OPQ eadem inter ipsas ratio erit (De Rat. Prim. et Ult. Lem. 4.) Q. E. D. — Gregorianis.

13. *Cor.* In rectâ QP sumatur PT ad quam PQ rationem habeat quam quadratum ex AB ad dimidium quadrati ex EF, et duci intelligatur curva OTV, quam punctum T perpetuò tangat. Si OP arcui illi BB sit æqualis, cujus secanti AD recta EL accepta est æqualis, area OPT areæ hyperbolicæ MKLN æqualis erit. Etenim cùm duæ sint curvæ, OQR, OTV, axe communi, OS, quarum ordinatæ, binas utique conferendo ab iisdem axis punctis exeuntes, datam inter se rationem habent, areæ etiam ipsæ, OPQ, OPT, inter se datam ordinatarum rationem servant (De Rat. Prim. et Ult. Prop. IV. Cor. II. 1.) Area igitur OPT erit ad aream OPQ ut PT ad PQ; sive ut dimidium quadrati ex EF ad quadratum ex AB (ex Construct.) sive denique ut area KLNM ad aream OPQ. Arearum igitur KLNM, OPT ad aream OPQ eadem est ratio. Areæ igitur illæ KLNM, OPT sunt inter se æquales (El. 5. 9.) Q. E. D.

14. Area KLNM Logarithmus est rationis rectæ EL ad rectam EK, sive secantis AO ad radium AB, pro modulo $\frac{1}{2}$EF². Cùm igitur æquales inter se sint areæ illæ KLNM, OPT; si posterioris mensura ad formulam aliquam generalem, ex arcu BB tanquam radice procreatam, revocari possit, per eandem formulam logarithmus quidem ille pro modulo suo generaliter definietur ex arcu. Talem verò areæ OPT formulam hæc ferè computatio dabit, in promptu sanè posita et levissimi laboris.

Literâ z designante arcum BB, vel illi æqualem rectam OP, literâ t tangentem AO vel illi æqualem rectam PQ, literâ r circuli radium AB, literâ denique B designante dimidium quadrati ex EF; cùm ex curvæ OTV naturâ PT sit ad PQ ut dimidium quadrati ex EF ad quadratum ex AB, hoc est cùm PT sit ad t ut B ad r^2: hinc sanè efficitur $PT = \frac{B}{r^2}t$. Et cùm semper inter se æquales sint arcus BB rectaque OP, fluxio quoque hujus illius fluxioni semper æqualis erit. (Geometr. Flux. Prop. II.) Hoc est $\dot{\overline{OP}} = \dot{z}$. Rectangulum igitur $PT \times \dot{\overline{OP}}$, sive fluxio areæ OPT, $= \frac{B}{r^2}t\dot{z}$. Vel pro t substituendo seriem illam, $z + \frac{1}{3r^2}z^3 + \frac{2}{15r^4}z^5 +$, cujus summa, si infinitè illa producatur, rectæ t ultimò fit æqualis, (§. 7. hujus) fluxio areæ $OPT = \frac{B}{r^2} \times \overline{z\dot{z} + \frac{1}{3r^2}z^3\dot{z} + \frac{2}{15r^4}z^5\dot{z} + \frac{17}{315r^6}z^7\dot{z} + \frac{62}{2835r^8}z^9\dot{z} +}$. Ergo area $OPT = B \times \overline{\frac{1}{2r^2}z^2 + \frac{1}{12r^4}z^4 + \frac{1}{45r^6}z^6 + \frac{17}{2520r^8}z^8 + \frac{31}{14175r^{10}}z^{10} +}$. Atque hæc est formula generalis logarithmi rationis ejus quam secans arcûs cujuspiam ad radium habet pro modulo utique B. Quòd si ipsius radii logarithmus pro eodem modulo designetur literâ A, hæc erit Secantis Logarithmicæ formula generalis ex arcû, $A + \frac{B}{2r^2}z^2 + \frac{B}{12r^4}z^4 + \frac{B}{45r^6}z^6 + \frac{17B}{2520r^8}z^8 + \frac{31B}{14175r^{10}}z^{10} +$. (Vide Commerc. Epistol. N° XX.) — Sec. Log. ex Arc.

15. Hinc etiam formulam generalem sinûs complementi logarithmici ex arcu effingere in promptu est. Nempe cùm quadratum è radio æquale sit rectangulo sub secante & sinu complementi, erit sinus complementi logarithmicus dupli logarithmi radii & secantis logarithmicæ differentia; cujus hæc erit formula generalis ex arcu: $A - \frac{B}{2r^2}z^2 - \frac{B}{12r^4}z^4 - \frac{B}{45r^6}z^6$. — Cosin. Log. ex Arc.

THE-

EXCERPTUM QUARTUM. illum datum ut n ad 1; eritque arcûs quæsiti chorda $= nx +$

$1 - nn$

THEOREMA III.

DE SECANTE

16. *Tangentis arcûs cujuspiam circularis et tangentis ejusdem arcûs complementi summa quidem dimidiata secanti, differentia verò dimidiata tangenti, complementi arcûs dupli est æqualis.*

CIRCULI cujus centrum A, radius AB, sit arcus quispiam BC. A centro A educatur AD ad perpendiculum supra AB, quæ circulo in D occurrat. Per C ducatur recta quæ circulum in C contingat; et utrinque producta rectis AB, AD productis in punctis E, F occurrat. Recta EF media dividatur in puncto G, et jungatur AG.

Propter angulum ad A rectum arcus BD totius circuitûs quadrans erit. Ergo arcus CD complementum erit arcûs CB, et recta CF tangens complementi arcûs BC, cùm recta CE ipsius quidem BC tangens sit. Erit igitur GE vel GF, tangentis arcûs BC et tangentis complementi ejusdem summa dimidiata; erit autem GC dimidiata earundem differentia. Dico rectam GE quidem, vel GF, secanti, rectam verò GC tangenti complementi dupli arcûs BC æqualem esse. Recta AG circulo in H occurrat. Triangulo autem EAF circumscribatur circulus. Propter angulum ad A rectum (talis enim factus est) recta EF circuli, triangulo EAF circumscripti, diameter erit. Quare punctum G, cùm medium sit rectæ EF, circuli illius centrum erit. Tres igitur GE, GA, GF inter se æquales. Propter æquales verò GA, GF, anguli GAF, GFA inter se æquales sunt. Sed propter angulos ad A, C rectos, anguli etiam CAF, CFA, vel GFA, inter se sunt æquales (El. VI. 8.) Angulus igitur GAF angulo CAE æqualis; sive angulus HAD angulo CAB. Arcus igitur HD, BC inter se æquales. Duo igitur BC, HD, simul sumpti, duplo arcûs BC æquales sunt. Tres verò BC, HD, HC quadrantem absolvunt. Ergo HC complementum est dupli arcûs BC. Est autem recta GA, cui GF, GE ostensæ sunt æquales, est, inquam, GA secans arcûs HC, recta verò GC ejusdem tangens. Ergo recta GE vel GF secanti, recta CG verò tangenti complementi dupli arcûs BC est æqualis. Q. E. D.

17. *Cor.* Rectangulum sub tangente arcûs cujuspiam, et secante complementi arcûs dupli, dimidio quadrati ex secante est æquale.

Rectangulum enim sub EC, GA æquale est rectangulo sub EC, EG; quod dimidium est rectanguli sub EC, EF, cui æquale est quadratum ex secante EA (El. VI. 8.) Rectangulum igitur sub EC, GA hoc est sub tangente arcûs BC et secante complementi dupli arcûs BC, dimidio quadrati ex secante EA æquale est. Q. E. D.

THEOREMA IV.

18. *Circuli, cujus centrum* A, *radius* AB, *sit arcus quilibet* BB. *Recta* BD, *circulum in* B *contingenti, junctæ* AB *in* D *occurrat, ut sit* BD *tangens arcûs* BB. *Sit arcus* BE *complementum dupli arcûs* BB, *jung-*

taque

$$\frac{1-nn}{2\times 3dd}xxA+\frac{9-nn}{4\times 5dd}xxB+\frac{25-nn}{6\times 7dd}xxC+\frac{49-nn}{8\times 9dd}xxD+\frac{81-nn}{10\times 11dd}xxE+\&c.$$ ARCUS EX ARCU Z.

Ubi

taque AZ rectæ DB in V occurrat, ut sit recta AV secans complementi dupli arcûs BB. Sit hyperbola æquilatera positione data, KHP, cujus centrum O, semiaxis recta OH datæ cujusvis longitudinis, asymptotæ rectæ GK, GL positione datæ, et ad perpendiculum inter se compositæ. Harum in alterutrâ, puta in GK capiatur GO circuli radio AB æqualis, et GM æqualis rectæ BD arcûs BB tangenti; et è punctis O, M educantur ad perpendiculum OP, MN hyperbolam usque; cui illæ in punctis P, N occurrant. Sit etiam curva ΓTV, cujus ea sit natura, ut si in rectâ positione datâ, XΔ, à dato in eâ puncto X initio sumpto, capiatur XZ arcui cuilibet circuli æqualis, recta ZΓ, à puncto Z ad perpendiculum educta curvam usque, secanti complementi dupli arcûs æqualis sit. His positis, si in axe curvæ capiatur XΔ æqualis dimidio quadrantis, XZ verò æqualis arcui illi BB, cujus tangenti, BD, accepta est GM in asymptotâ hyperbolæ æqualis, eductis ad perpendiculum ΔT, ZΓ, area hyperbolica POMN ad aream ΔTΓZ datam rationem habebit; nimirum duplicatam ejus quam semiaxis hyperbolæ GH habet ad circuli radium AB. GREGORIANIS.

19. CAPIATUR enim arcus AQ æqualis dimidio quadrantis; diviso autem arcu BQ, differentiâ utique arcûs BB et dimidii quadrantis, in partes quotlibet sive æquales sive inæquales, Bb, bβ, βQ junctæ Ab, Aβ, AQ productæque tangenti BD in punctis r, e, R occurrant. Sumantur arcus Be, Bs duplorum arcuum Bb, Bβ complementa; junctæque Ae, As et productæ rectæ BF in punctis f, φ, occurrant. In asymptotâ hyperbolæ GK, sumantur Om, Gμ tangentibus Br, Be; in axe verò curvæ ΓTV, sumantur Xz, Xζ arcubus Bb, Bβ æquales. Ita rectarum OM, ΔZ in partes numero æquales divisio fiet, quarum illæ Oμ, μm, mM tangentium differentiis RC, Cr, rD; hæ Δζ, ζz, zZ arcubus Qβ, βb, bB æquales erunt. A divisionum punctis, μ, m; ζ, z, educantur ad perpendiculum curvas usque, illic quidem μπ, mn, hic verò ζγ, zg, compleanturque rectangula Pμ, πm, nM; Tζ, γz, gZ. Rectangulum Pμ ad rectangulum Tζ rationem habet compositam è rationibus rectæ PO ad rectam ΔT, rectæque Oμ ad rectam Δζ: vel, cùm recta ΔT, ex naturâ curvæ ΓTV, circuli radio AB sit æqualis, è rationibus rectæ PO ad rectam AB rectæque RC ad arcum Qβ. Rectangulum quoque πm ad rectangulum γz rationem habet compositam è rationibus rectæ πμ ad rectam γζ rectæque μm ad rectam ζz; vel è rationibus rectæ πμ ad rectam Aφ rectæque Cr ad arcum βb. Recta enim γζ, ex naturâ curvæ ΓTV, rectæ Aφ est æqualis; nempe cùm Aφ secans sit arcus Bs qui complementum est dupli arcûs Bβ, cui abscissa Xζ ponitur æqualis. Ratio denique rectanguli nM ad rectangulum gZ composita est è rationibus rectæ nm ad rectam Af, rectæque rD ad arcum bB.

Jam verò si arcuum Qβ, βb, bB numerus infinitè augeatur, magnitudinibus singulorum infinitè decrescentibus, unde partium quoque rectæ OM, videlicet ipsarum Oμ, μm, mM; necnon partium rectæ ΔZ, videlicet ipsarum Δζ, ζz, zZ numerus pariter infinitè crescet, magnitudinibus singularum infinitè decrescentibus; hoc inquam si fiat, ratio ultima evanescentis RC ad evanescentem Qβ ea erit, quæ est quadrati ex AR ad quadratum ex AQ vel AB. (§ 8. hujus.) Quæ igitur è rationibus rectæ PO ad rectam AB rectæque RC ad arcum Qβ composita est ratio, ultimò scilicet, arcu Qβ rectâque RC evanescente, ea illi erit æqualis, quæ componitur è rationibus rectæ PO ad rectam AB et quadrati ex AR ad quadratum ex AB; sive è rationibus rectæ PO ad rectam AB numerique binarii ad unitatem. Nam propter angulum ABR rectum, et semirectum RAB, quadratum ex AR duplum est quadrati ex AB. Quæ igitur è rationibus rectæ OP ad rectam AB, rectæque RC ad arcum Qβ composita est ratio, ultimò scilicet arcu Qβ evanescente, quæ ex priùs ostensis rectanguli evanescentis Pμ, ad evanescens Tζ ultima est ratio, ea illi erit æqualis, quæ est duplæ rectæ PO ad rectam AB; sive dupli rectanguli PO × AB ad quadratum ex AB; sive denique (propter GO, AB inter se æquales) dupli rectanguli PO × OG ad quadratum ex AB. Sed, ex hyperbolæ æquilateræ naturâ, duplum rectanguli PO × OG quadrato ex OH est æquale. Rectanguli igitur evanescentis Pμ ad evanescens Tζ ratio ultima rectæ GH ad circuli radium AB duplicata erit.

Rursum, ratio quæ componitur è rationibus rectæ πμ ad rectam Aφ rectæque Cr ad arcum βb, ultimò scilicet arcu βb evanescente, sive rectanguli evanescentis πm ad evanescens γz ratio ultima; hæc, inquam, illi erit æqualis, quæ componitur è rationibus rectæ πμ ad rectam Aφ, et quadrati ex AC ad quadratum ex Aβ (§ 8. hujus), vel è rationibus rectanguli πμ × μG vel πμ × BC ad Aφ × BC et quadrati ex AC ad quadratum ex AB. Sed cum Aφ secans sit arcûs Bs, qui complementum est dupli arcûs Bβ, cujus tangens quidem est BC, AC verò secans, propter hæc rectangulum Aφ × BC dimidio quadrati ex AC æquale est. (Cor. Theor. 3.) Quare rectanguli evanescentis πm ad evanescens γz ratio ultima æqualis est compositæ è rationibus rectanguli πμ × BC ad dimidium quadrati ex AC, et quadrati ex AC ad quadratum ex AB; sive compositæ è rationibus

dupli

EXCERPTUM QUARTUM.

Ubi nota, quòd cùm n est numerus impar, series definet esse infinita,

DE SERIEBUS

dupli rectanguli $\nu\mu \times$ AC, vel dupli $\nu\mu \times \mu$O, ad quadratum ex AC, et quadrati ex AC ad quadratum ex AB. Sed ex hisce composita est ratio dupli rectanguli $\nu\mu \times \mu$O ad quadratum ex AB. Et è naturâ hyperbolæ æquilateræ, duplum rectanguli $\nu\mu \times \mu$O quadrato ex OH est æquale. Ratio igitur ultima rectanguli evanescentis $\nu\mu$ ad evanescens γZ ea est quam quadratum ex OH habet ad quadratum ex AB, sive rectæ OH ad circuli radium AB duplicata. Ac similibus prorsus argumentis rectangulorum evanescentium NM, gz eadem ratio ultima efficietur. Quare et arearum FOMN, ΓΔΖΓ eadem inter ipsas ratio erit. (De Rat. Prim. et Ult. Prop. IV.) Q. E. D.

20. *Cor.* In rectâ ZΓ capiatur ZA ad quam illa ZΓ rationem habeat duplicatam ejus quam AB ad GH; et duci intelligatur linea curva AΘΞ, quam punctum A perpetuò tangat, cui recta ΔΓ in puncto Θ occurrat. Area ΘΔΖΑ hyperbolicæ FOMN æqualis erit. (Hoc verò ad exemplum Corollarii Theor. 2. ex Corollario H. 1. Prop. IV. Tractatûs Newtoni De Rat. Prim. et Ult. demonstrandum est.)

21. Cùm igitur rationis ejus quam GO habet ad GM, hoc est, quam AB radius circuli QBE habet ad AO tangentem arcûs BB, area FOMN pro modulo $\frac{1}{2}$OH² sit logarithmus, ad logarithmum illum generaliter definiendum opus erit aream ΘΔΖΑ generali formulâ exposuisse. Id verò hæc ferè computatio præstabit.

22. Designet litera r circuli radium AB, seu illi æqualem rectam GO: litera q quadrantem circuitûs circularis, cujus semissis, recta ΔX, symbolo $\frac{1}{2}q$ designanda erit. Designet litera z arcum BB, sive rectam XZ arcui illi æqualem; litera t arcûs BB tangentem AO, vel illi æqualem rectam GM; litera f rectam AF secantem complementi dupli arcûs BB, sive æqualem illi rectam ZΓ. Designet denique litera a dimidium quadrati ex OH. Jam cùm ZΓ sit ad ZA ut quadratum ex AB ad quadratum ex GH, hoc est, $f : \text{ZA} = r^2 : 2a$, hinc scilicet efficietur $\text{ZA} = \frac{2af}{r^2}$. Recta verò $\Delta z = \Delta X - aX = \frac{1}{2}q - z$. Quare fluxio rectæ $\Delta z = -\dot z$: et fluxio areæ $\Theta\Delta\text{ZA} = \frac{2af}{r^2} \times -\dot z$. Arcum AE designet litera y. Et cùm arcus EE is sit, quo duplus BB abest à quadrante, erit $y = q - 2z$. Ergo $\dot y = -2\dot z$, et $\frac{\dot y}{2} = -\dot z$. Substituendo igitur hoc symbolum $\frac{\dot y}{2}$ pro illo $-\dot z$, efficietur fluxio areæ $\Theta\Delta\text{ZA} = \frac{af}{r^2}\dot y$. Sed cùm f secans sit arcûs y, hujus seriei $r + \frac{y^2}{2r} + \frac{5}{24r^3}y^4 + \frac{61}{720r^5}y^6 +$, si infinitè ea producatur, summa rectæ f ultimò fit æqualis. (§ 9. hujus.) Hæc igitur series si in symbolo fluxionis areæ ΘΔΖΑ pro literâ f substituatur, efficitur fluxio illa

$$= a \times \overline{\frac{\dot y}{r} + \frac{y^2\dot y}{2r^3} + \frac{5y^4\dot y}{24r^5} + \frac{61y^6\dot y}{720r^7} + \frac{277y^8\dot y}{8064r^9} + \frac{50521y^{10}\dot y}{3628800r^{11}}} + .$$

Ergo area ipsa $\Theta\Delta\text{ZA} =$

$$a \times \overline{\frac{y}{r} + \frac{y^3}{6r^3} + \frac{y^5}{24r^5} + \frac{61y^7}{5040r^7} + \frac{277y^9}{72576r^9} + \frac{50521y^{11}}{39916800r^{11}}} + .$$

Atque hæc est formula generalis logarithmi rationis ejus quam tangens arcûs cujuspiam ad radium habet, pro modulo a (vide Commerc. Epistol. N° XX.) Quòd si ipsius radii logarithmus, pro eodem modulo, designetur literâ R, hæc erit Tangentis Logarithmicæ formula generalis

TANG. LOG. EX ARC.

$$\text{R} \mp a \times \overline{\frac{y}{r} + \frac{y^3}{6r^3} + \frac{y^5}{24r^5} + \frac{61y^7}{5040r^7}} +,$$

signorum, $+$, $-$, hoc vel illo usurpato, prout arcus z dimidio quadrante minor majorve fuerit.

23. JAM si ex datâ Tangente Logarithmicâ Arcum definire capias, designet litera T datam tangentem logarithmicam arcûs cujusdam, quem litera z designat. Designet autem litera τ logarithmorum R, T differentiam, sive rationis ejus logarithmum, quam tangens arcûs z ad circuli radium habet. Tum literâ y arcum eum designante quo duplus z abest à quadrante, efficitur ex iis quæ jam ostensa sunt,

$$\tau = \frac{ay}{r} + \frac{ay^3}{6r^3} + \frac{ay^5}{24r^5} + \frac{61ay^7}{5040r^7} + \frac{277ay^9}{72576r^9} + .$$

24. Et hanc seriem invertendo ope Theorematis 2. Excerpti II. veniet y, sive $q - 2z$, $= \frac{r}{a}\tau - \frac{r}{6a^3}\tau^3$

+

finita, & evadet eadem quæ prodit per Vulgarem Algebram ad multi- Arcus ex Arcu z.

$+ \frac{r}{24R^5}\tau^5 - \frac{61r}{5040R^7}\tau^7 + \frac{277r}{725760R^9}\tau^9 -$. Unde efficietur $z = \frac{1}{2}q - \frac{r}{2R}\tau + \frac{r}{12R^3}\tau^3 - \frac{r}{48R^5}\tau^5 + \frac{61r}{10080R^7}\tau^7 - \frac{277r}{1451520R^9}\tau^9 +$. Arc. ex Tang. Log.

25. Si arcus ex fecante logarithmicâ definiendus fit, defignante literâ z arcum, defignet litera Σ datam fecantem logarithmicam; litera autem σ logarithmorum Σ, R differentiam defignet; five ejus rationis logarithmum, quam fecans arcûs z ad radium habet. Tum ex iis quæ jam fuprà ex fecundo Theoremate oftenfa funt, hæc efficietur æquatio

$$\sigma = \frac{B}{2r^2}z^2 + \frac{B}{12r^4}z^4 + \frac{B}{45r^6}z^6 + \frac{17B}{2520r^8}z^8 +,$$

Hanc autem, ope Theorematis 2. Excerpti II. invertendo, hæc alia veniet;

$$z^2 = \frac{2r^2}{B}\sigma - \frac{2r^2}{3B^2}\sigma^2 + \frac{4r^2}{45B^3}\sigma^3 + \frac{2r^2}{315B^5}\sigma^4 +,$$

Ex hâc denique, partis utriufque radicem quadraticam extrahendo, conficietur

$$z = \frac{\sqrt{2}.r}{B^{\frac{1}{2}}}\sigma^{\frac{1}{2}} - \frac{r}{3.\sqrt{2}.B^{\frac{3}{2}}}\sigma^{\frac{3}{2}} + \frac{r}{60.\sqrt{2}.B^{\frac{5}{2}}}\sigma^{\frac{5}{2}} + \frac{r}{2520.\sqrt{2}.B^{\frac{7}{2}}}\sigma^{\frac{7}{2}},$$ Arc ex Sec. Log.

quâ qoidem formulâ, è logarithmo rationis ejus quam fecans ad radium habeat, arcus generaliter definietur.

26. Aliam vero arcûs formulam, è logarithmo rationis quam fecans ejus ad fecantem dimidii quadrantis habeat, Gregorius concinnavit. Hujus inventio nefcio an ex alio fonte promptiùs arceffenda fit, quàm ex tertii Theorematis Corollario.

Literis R, B, Σ, σ, z, y eadem quæ fuprà defignantibus, fecans logarithmica dimidii quadrantis pro modulo B defignetur literâ S. Secantis autem dimidii quadrantis ad fecantem arcûs z rationis logarithmus, hoc eft logarithmorum S, Σ differentia, literâ l defignetur: literâ denique D numeri binarii logarithmus pro modulo illo B.

Itaque cùm fecans logarithmica arcûs y per hanc formulam exponatur,

$$R + \frac{B}{2r^2}y^2 + \frac{B}{12r^4}y^4 + \frac{B}{45r^6}y^6 + \frac{17B}{2520}y^8 +,$$ (§ 14. hujus) hâc aliâ verò tangens logarithmica arcûs z (§ 12. hujus)

$$R - \frac{By}{r} - \frac{By^3}{6r^3} - \frac{By^5}{24r^5} - \frac{61By^7}{5040r^7} -,$$

ex harum quidem fummâ conflabitur logarithmus rectanguli fub fecante arcûs y et tangente arcûs z. Huic igitur logarithmo hujus feriei,

$$2R - \frac{By}{r} + \frac{B}{2r^2}y^2 - \frac{B}{6r^3}y^3 + \frac{B}{12r^4}y^4 - \frac{B}{24r^5}y^5 + \frac{B}{45r^6}y^6 - \frac{61B}{5040r^7}y^7 +,$$

fi infinitè ea producatur, fumma ultimò fit æqualis.

Rectangulum autem fub fecante arcûs y et tangente arcûs z dimidio quadrati ex fecante arcûs z æquale eft (per Cor. Theor. 3.) Dimidii igitur quadrati hujus logarithmo feries noviffima æqualis eft. Additoque illi binarii logarithmo, integri quidem quadrati logarithmus veniet, hoc eft duplum ipfius fecantis logarithmicæ arcûs z. Unde hæc efficitur æquatio.

$$2\Sigma = D + 2R - \frac{By}{r} + \frac{B}{2r^2}y^2 - \frac{B}{6r^3}y^3 + \frac{B}{12r^4}y^4 -,$$

Et binarii divifione,

$$\Sigma = \frac{1}{2}D + R - \frac{By}{2r} + \frac{B}{4r^2}y^2 - \frac{B}{12r^3}y^3 + \frac{B}{24r^4}y^4 - \frac{B}{48r^5}y^5 + \frac{B}{90r^6}y^6 - \frac{61B}{10080r^7}y^7 +,$$

Atqui quantitas $\frac{1}{2}D + R$ eft fecans logarithmica dimidii quadrantis. Cùm enim ille R radii fit logarithmus, erit 2R logarithmus quadrati è radio. Ergo cùm D logarithmus fit binarii, horum fumma, 2R + D, dupli quidem quadrati è radio logarithmus erit. Sed quadratum ex fecante dimidii quadrantis duplum eft quadrati è radio (per Elem. 1. 47.) Quadrati igitur ex dimidii qua-

EXCERPTUM QUARTUM.

multiplicandum datum angulum per istum numerum n ([1]).

4. Si

drantis secante ille $2\mathrm{X} + \mathrm{D}$ logarithmus erit. Quare illius semissis, nimirum $\mathrm{X} + \frac{1}{2}\mathrm{D}$, dimidii quadrantis ipsa secans erit logarithmica, sive logarithmo s æqualis. Ex æquatione igitur novissimâ, demptis hinc inde æqualibus, s, $\mathrm{X} + \frac{1}{2}\mathrm{D}$, efficietur

$$-l = -\frac{\mathrm{A}y}{2r} + \frac{\mathrm{A}}{4r^2}y^2 - \frac{\mathrm{A}}{12r^3}y^3 + \frac{\mathrm{A}}{24r^4}y^4 - \frac{\mathrm{A}}{48r^5}y^5 + \frac{\mathrm{A}}{90r^6}y^6 -,$$

$$\text{Ergo } l = \frac{\mathrm{A}y}{2r} - \frac{\mathrm{A}}{4r^2}y^2 + \frac{\mathrm{A}}{12r^3}y^3 - \frac{\mathrm{A}}{24r^4}y^4 + \frac{\mathrm{A}}{48r^5}y^5 - \frac{\mathrm{A}}{90r^6}y^6 +,$$

Hujus autem inversio, ope Theorematis 1. Excerpt. II. perficienda, hanc aliam excitabit;

$$y, \text{ sive } q - 2s, = \frac{2r}{\mathrm{A}}l - \frac{2r}{\mathrm{A}^2}l^2 + \frac{8r}{3\mathrm{A}^3}l^3 - \frac{14r}{3\mathrm{A}^4}l^4 + \frac{28r}{3\mathrm{A}^5}l^5 -,$$

$$\text{Ergo } 2s = q - \frac{2r}{\mathrm{A}}l + \frac{2r}{\mathrm{A}^2}l^2 -,$$

Ex hac verò, per binarii divisionem, exsistet tandem generalis arcûs formula,

ARC. EX. SEC. LOG.

$$s = \frac{1}{2}q - \frac{r}{\mathrm{A}}l + \frac{r}{\mathrm{A}^2}l^2 - \frac{4r}{3\mathrm{A}^3}l^3 + \frac{7r}{3\mathrm{A}^4}l^4 - \frac{14r}{3\mathrm{A}^5}l^5 +,$$

ex ejus nimirum rationis conflata logarithmo, quam secans arcûs s ad secantem dimidii quadrantis habet.

ARCUS nx EX ARCU x.

([1]) CUM x chorda sit arcûs dati, arcus datus erit

$$x + \frac{x^3}{6d^2} + \frac{3x^5}{40d^4} + \frac{5x^7}{112d^6} +$$

(per § 1. hujus Excerpti) nam arcus circularis per eandem formulam ex chordâ cum diametro definitur, atque ex sinu recto cum radio.

Quare arcus exquirendus $= nx + \frac{nx^3}{6d^2} + \frac{3nx^5}{40d^4} + \frac{5x^7}{112d^6} +$

Substituatur hæc series pro z in formulam chordæ ex arcu dato, & proveniet formula chordæ arcus exquirendi è datâ x. Nempe hoc modo. Designet z arcum exquirendum; chorda igitur arcûs exquirendi $= z - \frac{z^3}{6d^2} + \frac{z^5}{120d^4} - \frac{z^7}{5040d^6} +$ (§. 2. hujus Excerpti)

$$\begin{array}{lll} \text{Sed } z & = nx + \frac{nx^3}{6d^2} + \frac{3nx^5}{40d^4} + \frac{5nx^7}{112d^6} + \\ \text{Ergo } -\frac{z^3}{6d^2} & = -\frac{n^3x^3}{6d^2} - \frac{n^3x^5}{12d^4} - \frac{37n^3x^7}{720d^6} - \\ \text{et } +\frac{z^5}{120d^4} & = +\frac{n^5x^5}{120d^4} + \frac{5n^5x^7}{710d^6} \\ \text{et } -\frac{z^7}{5040d^6} & = -\frac{n^7x^7}{5040d^6} \end{array}$$

Quare hujus seriei, infinitè quidem productæ, summa chordæ arcûs exquirendi ultimò æqualis erit. Atque hæc series, si coefficientium potestatis cujusque summæ scitè colligantur, formam induet Newtonianam.

A L I T E R

2. SIT x chorda arcûs dati, y chorda arcûs exquirendi;

Erit arcus datus $= x + \frac{x^3}{6d^2} + \frac{3x^5}{40d^4} + \frac{5x^7}{112d^6} +$

Arcus autem exquirendus $= y + \frac{y^3}{6d^2} + \frac{3y^5}{40d^4} + \frac{5y^7}{112d^6} +$

Hinc rursum arcus datus $= \frac{y}{n} + \frac{y^3}{6nd^2} + \frac{3y^5}{40nd^4} + \frac{5y^7}{112nd^6} +$

Ergo $x + \frac{x^3}{6d^2} + \frac{3x^5}{40d^4} + \frac{5x^7}{112d^6} + = \frac{y}{n} + \frac{y^3}{6nd^2} + \frac{3y^5}{40nd^4} + \frac{5y^7}{112nd^6} +$

Et radice y infinitè affectâ per formulam generalem Moivræanam extractâ

$y =$

4. Si in axe alterutro AB, ellipseos ADB (cujus centrum C, & axis alter DH) detur punctum aliquod E, circa quod recta EG, occurrens *Problema Kepleri.*

$$y = nx + \frac{n - n^3}{6d^2}x^3 + \frac{9n - 10n^3 + n^5}{120d^4}x^5 + \frac{225n - 259n^3 + 35n^5 - n^7}{5040d^6}x^7 +.$$

Eâdem vero formulâ sinus rectus arcûs exquirendi exponetur, si litera x dati arcûs sinum rectum significet; litera d circuli radium.

3. Illud verò minimè prætereundum est; per eandem formulam, signis tantummodo mutatis, Æquilateræ etiam Hyperbolæ, non arcum quidem, sed sectorem definiri, qui ad datum ejusdem hyperbolæ sectorem datam rationem habeat. Nempe hoc modo.

Centro A vertice B semiaxibus æqualibus AB, AC scriptam puta hyperbolam æquilateram BDE; cujus sint BAD, BAE sectores; quorum ille BAE ad alterum BAD rationem datam habeat quam n ad 1. A punctis D, E in axem AB deductis ad perpendiculum DF, EG; si recta DF, sinus arcûs hyperbolici DB, cui sectorum alter ADB insistit, designetur literâ x, literâ r semiaxem AB designante, recta quidem EG, sinus arcûs EB, cui insistit sector alter AEB, hæc formula exponetur, $nx + \frac{nn-1}{2\times 3.r^2}xxA + \frac{nn-9}{4\times 5.r^2}xxB + \frac{nn-25}{6\times 7.r^2}xxC + \frac{nn-49}{8\times 9.r^2}xxD + \frac{nn-81}{10\times 11.r^2}xxE +$, &c. *Sect. Hyp. ex Sect. Circ.*

4. Hoc autem naturali quâdam nititur Hyperbolæ Æquilateræ cum Circulo cognatione, quam accuratiùs explicare haud abs re erit; præsertim cùm rem neque injucundam scitu neque inutilem, minimè verò difficilem, nimio calculorum apparatu apud optimos quidem scriptores non tam illustratam, quàm obrutam planè atque mersam cernimus.

5. A puncto D in axem secundum AC deducatur ad perpendiculum DH. Quadratum ex DH duobus ex AH et ex AC simul sumptis est æquale (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XLI.) et recta AH = DF = x. Quare DH $= \sqrt{r^2 + x^2}$, et area hyperbolica DHAB $= rx + \frac{x^3}{6r} - \frac{x^5}{40r^3} + \frac{x^7}{112r^5} - \frac{5x^9}{1152r^7} +$ (Analys. per Æquat. Infinit. Cap. III. §. 5.)

Sed triangulum DHA $= \frac{1}{2}x\sqrt{r^2 + x^2} = \frac{1}{2}rx + \frac{x^3}{4r} - \frac{x^5}{16r^3} + \frac{x^7}{32r^5} - \frac{5x^9}{256r^7} +$ (Analys. per Æquat. Infinit. Cap. III. §. 5.)

Quare sector BAD = areæ DHAB − triang. DHA $= \frac{1}{2}rx - \frac{x^3}{12r} + \frac{3x^5}{80r^3} - \frac{5x^7}{224r^5} + \frac{35x^9}{2304r^7} +.$

Hoc est, sector BAD $= \frac{1}{2}r \times \overline{x - \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} - \frac{5x^7}{112r^6} + \frac{35x^9}{1152r^7}}$.

Atque hæc erit formula generalis sectoris Hyperbolici ex sinu recto ejus arcûs hyperbolæ quem sector basin habet: quæ à formulâ sectoris Circularis haud aliâ re quàm signis discrepat.

6. Cum enim arcûs circularis formula ex sinu recto talis sit, qualis à Newtono est exposita (§. 1. hujus Excerpti) et sector circularis æqualis sit rectangulo sub dimidio radii et arcu, idcirco sectoris circularis formula ex sinu recto hæc erit; $\frac{1}{2}r \times \overline{x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6}}$ membris omnibus affirmatis; cùm in formulâ sectoris hyperbolici alterna negata sint; singulorum verò utriusque formulæ membrorum inde ab initio eadem est constitutio.

7. Neque verò proprium est illud Hyperbolæ Æquilateræ Circulique, quòd figuræ utriusque sectores formulis exponantur ad omnia præter signa, +, −, similibus, sed ad omnes quidem Hyperbolas omnesque Ellipses pertinet.

8. Centro

EXCERPTUM QUARTUM.

occurrens ellipsi in G, motu angulari feratur; & ex datâ areâ sectoris elliptici BEG, quæratur recta GF, quæ à puncto G ad axem AB normaliter demittitur: esto BC $= q$, DC $= r$, EB $= t$, ac duplum

MENSURA ARUM ELLIPSEOS

8. Centro enim C, semiaxibus CA, CB, scriptam puta ellipsin ADB, cujus sit sector ACD. Centro verò c, semiaxibus ca, cb inæqualibus, scriptam puta hyperbolam dab, cujus sector sit acd. A puncto D ellipseos in axem ejus CA deducatur DE ad perpendiculum; et à puncto d hyperbolæ in axem ca, qui hyperbolæ transversus sit, deducatur ad perpendiculum de; ut sit DE sinus arcûs elliptici AD, quem sector ellipseos ACD basin habet; de similiter sinus arcûs hyperbolici ad, quem sector hyperbolæ cad basin habet. Centro C ellipseos, radio CA ellipseos semiaxe, scribatur circulus, cui recta DE in G occurrat, et jungatur CG. Centro c semiaxibus æqualibus ca, cf, scribatur hyperbola æquilatera gak, cui recta ed ad g occurrat, et jungatur cg.

9. Propter circulum et ellipsin axe AC communi, recta GE, erit ad DE ut FC ad AC, vel ut CA ad BC. Atque hæc constans erit rectarum GE, DE inter ipsas ratio, in omni situ puncti D. Areis igitur GAE, DAE inter ipsas eadem intercedet (De Rat. Prim. et ult. Prop. IV. Cor. H. I.) Verùm eadem triangulis CGE, DCE (per El. 6. 1.) Igitur eadem sectoribus etiam CGA, CDA (El. 5. 12.) Hoc est sector circularis CGA ad sectorem ellipseos CDA rationem habet eam quam CA ad CB. Quare sector ellipseos CDA $= \frac{\text{CB}}{\text{CA}} \times$ CGA.

Similiter cùm sit hyperbola æquilatera gak, aliaque dab, semiaxe transverso ca communi, erit ge ad de ut semiaxis transversus ille communis, ca, ad cb semiaxem secundum hyperbolæ dab. Hæc vero rectarum ge, de, in omni situ puncti d, constans erit inter ipsas ratio. Areis igitur age, ade eadem intercedet. Eadem verò triangulis cge, cde. Quare eadem sectoribus cga, cda. Hoc est hyperbolæ æquilateræ sector cga, erit ad sectorem cda alterius hyperbolæ, ut ca ad cb. Quare sector $cda = \frac{cb}{ca} \times cga$.

Si igitur semiaxes ellipseos, CA, CB; vel hyperbolæ dab, ca, cb; literæ r, a designent, arcûs verò circularis, GA, sinum GE, vel arcûs hyperbolici, ga, sinum ge, si litera x designet, cùm circuli hyperbolæque æquilateræ sectores CGA, cga formulis exponantur quas suprà posuimus, erit sector ellipticus CDA $= \frac{1}{2}a \times \overline{x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6} +}$,

Sector verò hyperbolicus $cda = \frac{1}{2}a \times \overline{x - \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} - \frac{5x^7}{112r^6} +}$,

Quòd si litera χ designet DE sinum arcûs elliptici DA, vel de sinum arcûs hyperbolici da, cùm sit GE : DE $=$ CA : CB, et $ge : de = ca : cb$; hoc est, cùm sit $x : \chi = r : a$, erit $x = \frac{r\chi}{a}$. Hoc igitur symbolo, $\frac{r\chi}{a}$, in formulas modò expositas pro literâ x substituto, venient formulæ sectorum, elliptici hyperbolicique, ex sinu cujusque recto, ad omnia præter signa similes.

SECT. ELL. EX SINU.

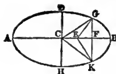
Nimirum elliptici sectoris hæc; CDA $= \frac{1}{2}r \times \overline{\chi + \frac{\chi^3}{6a^2} + \frac{3\chi^5}{40a^4} + \frac{5\chi^7}{112a^6} +}$,

SECT. HYP. EX SINU.

Hæc verò hyperbolici $cda = \frac{1}{2}r \times \overline{\chi - \frac{\chi^3}{6a^2} + \frac{3\chi^5}{40a^4} - \frac{5\chi^7}{112a^4} +}$,

quæ, si ponantur r, a, æquales, in priores illas circuli hyperbolæque æquilateræ abibunt.

10. CÆTERUM in hyperbolâ æquilaterâ, ut ad illam revertamur, si sector BAE ad sectorem BAD eam rationem habeat quam n ad 1, si rectæ DF, EG arcuum DB, EB, quibus sectores insistunt, sinus literis

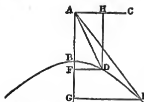


duplum areæ BEG $= z$; et erit GF $= \frac{1}{t} z - \frac{q}{6r^2t^4} z^3 + \frac{10q^2 - 9qt}{120r^4t^7} z^5 - \frac{280q^3 + 504q^2t - 225qt^2}{5040r^6t^{10}} z^7 + \&c.$ PROBLEMA KEPLERI.

Sic itaque Aſtronomicum illud *Kepleri* Problema reſolvi poteſt (m).

5. In

literis x, y, deſignentur: cùm ſectorum hyperbolæ æquilateræ ea ſit ex ſinubus rectis formula, quam ſuprà ſcripſimus, erit ſector hyperbolicus BAD $= \frac{1}{2} r \times \overline{x - \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} - \frac{5x^7}{112r^6} +}$, HYPERBOLÆQUE HARMONIA



Sector hyperbolicus BAE $= \frac{1}{2} r \times \overline{y - \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} - \frac{5y^7}{112r^6} +}$,

Unde rurſum ſector BAD $= \frac{1}{2} r \times \overline{\frac{y}{n} - \frac{y^3}{6nr^2} + \frac{3y^5}{40nr^4} - \frac{5y^7}{112nr^6} +}$,

Ergo $\frac{1}{2} r \times \overline{x - \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} -}, = \frac{1}{2} r \times \overline{\frac{y}{n} - \frac{y^3}{6nr^2} + \frac{3y^5}{40nr^4} -}$,

Ac propterea $x - \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} -, = \frac{y}{n} - \frac{y^3}{6nr^2} + \frac{3y^5}{40nr^4} -$,

Ad inveniendam igitur rectam EG, literâ y deſignatam, nacti ſumus æquationem, ejus omnia præter ſigna ſimilem, quâ è dato ſinu arcûs circularis z ſinum arcûs nz eruendum eſſe pridem oſtendimus. Etenim in æquatione illâ circulari ſigna in utrâque parte poſitiva erunt omnia, in hâc hyperbolicâ alternè negativa ſunt utrinque. Hujus igitur, ſicut prioris, radice y infinitè affectâ per formulam generalem Moivræanam extractâ, veniet formula literæ y prioris omnia ſimilis, niſi quòd ſigna membrorum alternorum contraria habeant. Id quod coefficientium Theorematis Moivræanam compoſitionis modum attentiùs conſideranti cuivis credo manifeſtum erit. Ergo y, ſive EG $= nx + \frac{nn-1}{2 \times 3 . r^2} xxA + \frac{nn-9}{4 \times 5 . r^2} xxB +$. In majorem rei evidentiam calculos qui volet ſubducat.

11. Cæterùm ſi n ſit numerus impar, hæc formula, ſicut prior illa, infinita eſſe deſinet; et finitas quidem æquationes promet, ad ſectorum hyperbolicorum, hoc eſt ad logarithmorum cum numeris imparibus multiplicationes, vel diviſiones, earum omnia æquationum præter ſigna ſimiles, quibus ſimiles arcuum circularium vel angulorum multiplicationes diviſioneſque continentur. Nimirum hoc ipſum eſt, quo omnis ferè nititur mirabilis illa Angulorum Rationumque Menſurarum Harmonia, cujus contemplatione magnus ille olim Coteſius tantopere delectatus eſt. Nec immeritò ſcilicet: cùm tantam illa ſummo viro attuliſſet inventorum atque famæ frugem: utpote cujus ope tot tantaque tam eleganter perfecerat. Quorum tamen ſummam EDVARDUS WARINO ἐν πᾶσι in eo contineri ſcribit "quòd æquationis $x^n \pm 1 = 0$ radices invenit, ex quibus detexit fluentem fluxionis $\frac{\dot{x}}{x^{2n} \pm ax^n + 1}$ *." At verò ea eſt Coteſii laus, non quòd *æquatiunculam* illam explicaverit quidem, ſed quòd modo illo ſuo peculiari hoc effecerit; tam ſimplici, tam ſubtili, tam perſpicuo: quòd illam viâ geometricâ explicando, calculorum laborem multùm minuerit; tot tantaque problemata ad menſuras aut angulorum aut rationum revocaverit: unde factum eſt, ut ex analyſi facillimâ compoſitiones problematum elegantiſſimæ quaſi ſponte enaſcerentur; compoſitionum demonſtrationes, in eo quidem genere quod ſit cum brevitate firmiſſimum, ultrò ſe offerrent. Has quidem ſtatuo magni Coteſii laudes, quas vereor ut ſatis ample Waringius, apud æquos judices, celebraſſe exiſtimandus erit.

(m) Recta OF producta ellipſi iterum, ab alterâ parte axis, in K occurrat et jungantur CG, CK, EK. Itaque ſi litera x rectam GF deſignet, ſectori elliptico GCB hujus ſeriei, ſi infinitè ea producatur, ſumma ultimò æqualis erit; $\frac{1}{2} q \times \overline{x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6} +}$, (not. l § 9.) PROBLEMA KEPLERI.

Sector igitur GCK $= 2$GCB $= qx + \frac{qx^3}{6r^2} + \frac{3qx^5}{40r^4} + \frac{5qx^7}{112r^6} +$,

Sed recta CE $= q - t$. Quare duplum trianguli GEC, ſive duo triangula GEC, KEC ſimul ſumpta $= qx$.

* Vid. Meditat. Analyt. Præfat.

ARC. ELLIP. E SINU. 5. In eâdem ellipsi, si statuatur CD $= r$, $\frac{\mathrm{CB}^2}{\mathrm{CD}} = c$, & CF $= x$: erit arcus ellipticus

$$
\begin{array}{llllll}
(^{n})\ \mathrm{DG} = x + \frac{1}{6c^2}x^3 & + \frac{1}{10rc^3}x^5 & + \frac{1}{14r^2c^4}x^7 & + \frac{1}{18r^3c^5}x^9 & + \frac{1}{22r^4c^6}x^{11} & + \&c. \\
 & - \frac{1}{40c^4} & - \frac{1}{28rc^5} & - \frac{1}{24r^2c^6} & - \frac{1}{22r^3c^7} & \\
 & & + \frac{1}{112c^6} & + \frac{1}{48rc^7} & + \frac{3}{88r^2c^8} & \\
 & & & - \frac{5}{1152c^8} & - \frac{5}{352rc^9} & \\
 & & & & + \frac{7}{2816c^{10}} &
\end{array}
$$

Hic numerales coefficientes supremorum terminorum ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{14}$, &c.) sunt in musicâ progressione: et numerales coefficientes omnium inferiorum in unaquâque columnâ prodeunt multiplicando continuò numeralem coefficientem supremi termini per terminos hujus progressionis $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, $\frac{n-3}{4}$, $\frac{\frac{1}{2}n-5}{6}$, $\frac{\frac{1}{2}n-7}{8}$, $\frac{\frac{1}{2}n-9}{10}$, &c. Ubi n significat

PROBLEMA KEPLERI. $= qx - tx$. Sed area elliptica BOEK differentia est sectoris elliptici GEK, duorumque triangulorum GCE, KCE. Quare area elliptica BGEK, sive 2GEB, sive z, $= tx + \frac{qx^3}{6r^2} + \frac{3qx^5}{40r^4} + \frac{5qx^7}{112r^6} +$, Et hanc seriem invertendo, ope Theorematis 2. Excerpti II. veniet formula rectæ GF Newtoniana, $x = \frac{1}{t}z - \frac{q}{6r^2t^4}z^3 + \frac{10q^2 - 9qt}{120r^4t^7}z^5 - \frac{280q^3 - 504q^2t + 225qt^2}{5040r^6t^{10}}z^7 +$,

2. In coefficiente membri quarti signa nominum singulorum calculis suadentibus emendavi, cùm coefficientem illam Newtonus ipse in Commercio Epistolico, & Jonesius hoc modo exhibuissent. $-\frac{800q^3 + 504q^2t - 225qt^2}{5040r^6t^{10}}$. Vitiosè certè. Nam per Theorema secundum Newtoni ad regressiones coefficiens ille $= + \frac{504q^2t - 225t^2q - 280q^3}{5040r^6t^{10}} = - \frac{280q^3 + 225t^2q - 504q^2t}{5040r^6t^{10}}$.

3. Credibile est errorem ex eo natum, quòd Newtonus formulam suam, primâ scriptione, hoc modo disposuisset

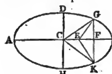
$$
\begin{array}{llll}
x = \frac{1}{t}z - \frac{q}{6r^2t^4}z^3 & + \frac{q^2}{12r^4t^7}z^5 & - \frac{q^3}{18r^6t^{10}}z^7 & +, \\
 & - \frac{3q}{40r^4t^6} & + \frac{q^2}{10r^6t^9} & -, \\
 & & - \frac{5q}{112r^6t^8} & +,
\end{array}
$$

Postea verò cùm alia dispositio magis ei placuisset, ut coefficientis cujusque nomina ad denominatorem revocarentur communem, et numeratoribus signis $+$, $-$, algebraicè conjunctis, in unam fractionis speciem coalescerent; hæc, inquam, formulæ suæ dispositio cùm Newtono potior visa esset, integris quidem coefficientibus ea, credo, signa præfixit, quæ in primâ illâ dispositione summi ordinis nominibus à se præfixa invenisset: nominum verò inferiorum signa, positiva pro negativis, negativa pro positivis mutare, quoties nomen summum negativum esset, quod fieri omninò debuit, neglexit. Sed quocunque tandem modo natus fuerit error, error certè est. Atque mecum hâc in re sensisse video virum harum rerum peritissimum Carolum Huttonum, qui in opere suo de Mensionibus Anglicò sermone Anno 1770 edito, huic formulæ, cujus etiam investigationem tradidit, similem emendationem adhibuit, (Treatise of Mensuration, Part 3. Sect. 3. Problem VIII. Cor. 9.)

ARC. ELLIP. (^{n}) RECTA GF designetur literâ y. Tum è natura ellipseos erit CD^2 : CB^2 $=$ GF^2 : AF $\times$ FB; hoc est $r : c = y^2 : rc - x^2$. Ergo $y = \frac{r}{c}\,\overline{rc - x^2}$. Ergo $\dot{y} = -\frac{rx\dot{x}}{c \times y} = -\frac{rx\dot{x}}{} \times \sqrt{\frac{c}{r^2c - rx^2}}$.

Quare

nificat numerum dimenſionum ipſius c in denominatore iſtius ſupremi termini. E. *g*. ut terminorum infra $\frac{1}{22r^4c^6}$, numerales coefficientes inveniantur, pono $n=6$, ducoque $\frac{1}{22}$ (numeralem coefficientem ipſius $\frac{1}{22r^4c^6}$) in $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, hoc eſt, in 1; & prodit $\frac{1}{22}$, numeralis coefficiens termini proximè inferioris: dein duco hunc $\frac{1}{22}$ in $\frac{\frac{3}{2}n-3}{4}$, ſive in $\frac{n-3}{4}$, hoc eſt, in $\frac{3}{4}$; & prodit $\frac{3}{88}$ numeralis coefficiens tertii termini in iſtâ columnâ. Atque iſta $\frac{3}{88}\times\frac{\frac{5}{4}n-5}{6}$ facit $\frac{5}{352}$ numeralem coefficientem quarti termini; & $\frac{5}{352}\times\frac{\frac{3}{2}n-7}{8}$ facit $\frac{7}{2816}$ numeralem coefficientem infimi termini. Idem in aliis ad infinitum uſque columnis præſtari poteſt: adeoque valor ipſius DG per hanc regulam pro lubitu produci. Arcus Ellipticus



6. Adhæc, ſi BF dicatur x, ſitque r latus rectum ellipſeos, & $e=\frac{r}{AB}$; erit arcus ellipticus (°).

BG=

Quare $\dot{y}\dot{y}=\frac{r^2x^2\dot{x}\dot{x}}{c^4}\times\frac{c}{r^2c-rx^2}=\frac{rx^2\dot{x}\dot{x}}{rc^3-cx^3}$. Et $\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}=\dot{x}\dot{x}\times\overline{1+\frac{rx^2}{rc^2-cx^2}}$. Ex Sinu.

Hoc eſt, ſi fractio $\frac{rx^2}{rc^2-cx}$, diviſionis operâ, convertatur in ſeriem infinitam,

$$\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}=\dot{x}\dot{x}\times\overline{1+\frac{x}{c}+\frac{x^4}{rc^3}+\frac{x^6}{r^2c^4}+\frac{x^8}{r^3c^5}+\frac{x^{10}}{r^4c^6}+}.$$ Ergo $\sqrt{\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}}$, ſive fluxio arcûs elliptici DG, $=\dot{x}\times\sqrt{1+\frac{x^2}{c^2}+\frac{x^4}{rc^3}+\frac{x^6}{r^2c^4}+\frac{x^8}{r^3c^5}+\frac{x^{10}}{r^4c^6}+}$.

Vel, ſi ope formulæ noſtræ generalis, (Logiſtic. Infinit.) radix quadratica feriei infinitæ extrahatur, fluxio arcûs elliptici DG =

$$=\dot{x}\times 1+\frac{1}{2c^2}x^2+\left.\begin{matrix}\frac{1}{2rc^3}\\-\frac{1}{2^2\cdot 1\times 2c^4}\end{matrix}\right\}x^4\left.\begin{matrix}+\frac{1}{2r^2c^4}\\-\frac{2}{2^2\times 1\times 2rc^5}\\+\frac{7}{2^3\times 1\times 2\times 3c^6}\end{matrix}\right\}x^6\left.\begin{matrix}+\frac{1}{2r^3c^5}\\-\frac{3}{2^2\times 1\times 2r^2c^6}\\+\frac{3\times 7}{2^3\times 1\times 2\times 3rc^7}\\-\frac{3\times 5}{2^4\times 1\times 2\times 3\times 4c^8}\end{matrix}\right\}x^8+$$

Et fluenti hujus feriei arcus ipſe DG æqualis erit. Hujus autem feriei fluens eſt ipſa quidem ſeries Newtoniana.

(°) Designetur enim recta GF, ut priùs, literâ y. Arc. Ellip.
E naturâ ellipſeos $CD^2:CB^2=GF^2:AF\times FB$, hoc eſt, $r:AB=y^2:ABx-xx$.
Ergo $y^2=\overline{ABx-xx}\times\frac{r}{AB}=rx-ex^2$. Ergo $2y\dot{y}=\dot{x}\times\overline{r-2ex}$. Et $\dot{y}=\dot{x}\times\frac{r-2ex}{2\sqrt{rx-ex^2}}$.
Ergo $\dot{y}\dot{y}=\dot{x}\dot{x}\times\frac{r^2-4rex+4e^2x^2}{4x\times\overline{r-ex}}$. Et $\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}=\dot{x}\dot{x}\times\overline{1+\frac{r^2-4rex+4e^2x^2}{4x\times r-ex}}=\frac{\dot{x}\dot{x}}{4x}\times$
$\frac{r^2+\left.\begin{matrix}4r\\-4re\end{matrix}\right\}x\left.\begin{matrix}+4e^2\\-4e\end{matrix}\right\}x^2}{r-ex}$. Et, ſi fractio diviſionis operâ convertatur in ſeriem infinitam, $\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}=$
$\dot{x}\dot{x}$

Ex Sinu Verso.

$$BG = \sqrt{rx} \text{ in } \overline{1 + \frac{\left.\begin{array}{l} 2 \\ -\frac{3}{2}e \end{array}\right\} x}{3r} + \frac{\left.\begin{array}{l} -2 \\ +3e \\ -\frac{5}{8}e^2 \end{array}\right\} x^2}{5r^2} + \frac{\left.\begin{array}{l} +4 \\ -9e \\ +\frac{33}{4}e^2 \\ -\frac{7}{16}e^3 \end{array}\right\} x^3}{7r^3} + \frac{\left.\begin{array}{l} -10 \\ +30e \\ -\frac{123}{4}e^2 \\ +\frac{91}{8}e^3 \\ -\frac{45}{128}e^4 \end{array}\right\} x^4}{9r^4}, + \&c.}$$

7. Quare, si ambitus totius ellipseos desideretur; biseca CB in F, & quære arcum DG, per prius Theorema, & arcum BG per posterius.

8. Si, vice versâ, ex dato arcu elliptico DG, quæratur sinus ejus CF; tum dicto CD $= r$, $\frac{CB^2}{CD} = c$, & arcu illo DG $= z$; erit

(P) CF

Ex Sin. Vers.

$\frac{\dot x \dot x}{4x} \times r + \overline{4 - 3c}.x + \frac{c^2x^2}{r} + \frac{c^3x^3}{r^2} + \frac{c^4x^4}{r^3} +$. Ergo $\sqrt{\dot y\dot y + \dot x\dot x}$, sive fluxio arcûs elliptici BG $=$ $\frac{\dot x}{2\sqrt{x}} \times \sqrt{r + \overline{4 - 3c}.x + \frac{c^2x^2}{r} + \frac{c^3x^3}{r^2} + \frac{c^4x^4}{r^3} +}$

Vel, si ope formulæ nostræ generalis (Logistic. Infin.) radix quadratica seriei infinitæ extrahatur, extractaque dividatur quantitate $x^{\frac{1}{2}}$,

$$\text{Fluxio arcûs } BG = \frac{\dot x}{2} \times r^{\frac12}x^{-\frac12} + \frac{\left.\begin{array}{l} 2 \\ -\frac{3c}{2} \end{array}\right\}}{r^{\frac12}} x^{\frac12} + \frac{\left.\begin{array}{l} +\frac{c^2}{2} \\ -\frac{16 - 24c + 9c^2}{2^2 + 1 \times 2} \end{array}\right\}}{r^{\frac32}} x^{\frac32} +$$

$$\frac{\left.\begin{array}{l} +\frac{c^3}{2} \\ -\frac{8c^2 - 6c^3}{2^2 \times 1 \times 2} \\ +\frac{\overline{4-3c}|^3 \times 3}{2^3 \times 1 \times 2 \times 3} \end{array}\right\}}{r^{\frac52}} x^{\frac52} \quad \frac{\left.\begin{array}{l} +\frac{c^4}{2} \\ -\frac{8c^3 - 5c^4}{2^2 \times 1 \times 2} \\ +\frac{3 \times \overline{16c^2 - 24c^3 + 9c^4} \times 3}{2^3 \times 1 \times 2 \times 3} \\ -\frac{\overline{4-3c}|^4 \times 3 \times 5}{2^4 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4} \end{array}\right\}}{r^{\frac72}} x^{\frac72}$$

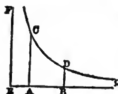
$$\text{Hinc arcus } BG = r^{\frac12}x^{\frac12} + \frac{\left.\begin{array}{l} 2 \\ -\frac{3c}{2} \end{array}\right\}}{3r^{\frac12}} x^{\frac32} \quad \frac{\left.\begin{array}{l} +\frac{c^2}{2} \\ -\frac{16 - 24c + 9c^2}{2^2 \times 1 \times 2} \end{array}\right\}}{5r^{\frac32}} x^{\frac52} \quad \frac{\left.\begin{array}{l} +\frac{c^3}{2} \\ -\frac{8c^2 - 6c^3}{2^2 \times 1 \times 2} \\ +\frac{\overline{4-3c}|^3 \times 3}{2^3 \times 1 \times 2 \times 3} \end{array}\right\}}{7r^{\frac52}} x^{\frac72} +$$

$= \surd$

$$(P)\ CF = z - \frac{1}{6c^2} z^3 - \frac{1}{10rc^3} z^5 - \frac{1}{14r^2c^4} z^7 - \&c.$$
$$\qquad + \frac{13}{120c^4} \qquad + \frac{17}{420rc^5}$$
$$\qquad\qquad - \frac{493}{5040c^6}$$

Sin Ellip. ex Arc.

Quæ autem de Ellipsi dicta sunt, omnia facilè accommodantur ad Hyperbolam; mutatis tantùm signis ipsorum *c* & *e* ubi sunt imparium dimensionum (q).



7. Præterea, si sit CD Hyperbola, cujus asymptoti EB, EF rectum angulum BEF constituant; & ad EB erigantur utcunque perpendicula

$$= \sqrt{rx} \times 1 + \left.\begin{matrix} 2 \\ - 3e \\ \hline 2 \\ \hline 3r \end{matrix}\right\} x \quad \left.\begin{matrix} + \frac{e^2}{2} \\ - \frac{16 - 24e + 9e^2}{2^2 \times 1 \times 2} \\ \hline 5r^2 \end{matrix}\right\} x^2 \quad \left.\begin{matrix} + \frac{e^3}{2} \\ - \frac{8e^2 - 6e^3}{2^2 \times 1 \times 2} \\ + \frac{\overline{4 - 3e}|^3 \times 3}{2^3 \times 1 \times 2 \times 3} \\ \hline 7r^3 \end{matrix}\right\} x^3 +$$

Arc. Ellipt. ex Sin. Vers.

Unde, coefficientis cujusque membris secundum potestates literæ *e* dispositis, veniet series Newtoniana.

(p) FORMULAM arcûs DG priùs inventam (§. 5. hujus Excerpti) si ope Theorematis 2. Excerpt. II. invertas, obtinebis formulam sinûs CF ex arcu illo, qualis à Newtono hic descripta est.

(q) ET ad Parabolam, membris iis omnibus deletis, quæ, in formulâ arcûs ex sinu verso, litera *e* ingressa est; vel iis, quorum denominatorea litera *r*, in aliis illis arcûs ex sinu recto, sinûsve ex arcu formulis. Ut hæc scilicet sit formula Arcûs Parabolici ex sinu recto

$$x + \frac{1}{6c^2} x^3 - \frac{1}{40c^4} x^5 + \frac{1}{112c^6} x^7 - \frac{5}{1152c^8} x^9 + \frac{7}{2816c^{10}} x^{11} -,$$

Arc. Parab. ex Sin.

Sinûs autem ex arcu

$$z - \frac{2}{6c^2} z^3 + \frac{13}{120c^4} z^5 - \frac{493}{5040c^6} z^7 +,$$

Sin. Parab. ex Arc.

Designante nimirum literâ *x* sinum rectum; *z*, arcum; *c* semiparametrum parabolæ.

Arcûs etiam Parabolici ex sinu verso ut hæc sit formula

$$r^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{3r^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5r^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{7r^{\frac{5}{2}}} x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{9r^{\frac{7}{2}}} x^{\frac{9}{2}} +,$$

Arc. Par. ex Sin. Vers.

Designante *x* sinum versum; *r*, parametrum parabolæ.

2. HARUM verò transmutationum in eo posita est ratio, quòd Algebræ, proprio sermone curvarum proprietates edisserenti, Hyperbolam tanquam Ellipsin negativo axe, et vicissim, considerare receptum est; Parabolam verò vel tanquam Ellipsin quidem illam, vel tanquam Hyperbolam, axe infinito. Hoc autem quale sit clariùs dicam.

3. SINT duæ rectæ AB, AC magnitudine, et positione datæ et ad perpendiculum inter se compositæ. Harum in alterutrâ, puta in AB, capiantur pro arbitrio inter puncta extrema A, B, alia aliquot D, E, F. A quibus eductæ ad perpendiculum, DG, EH, FK, ejus capiantur quæque longitudinis, ut rectangula segmentis rectæ datæ comprehensa, rectangula dico AD × DB, AE × EB, AF × FB, ad quadrata ex eductis, DG, EH, FK, ordine sumendis, datam illam rationem habeant, quam recta AB ad rectam AC. Linea curva quæ per eductarum DG, EH, FK, aliarumque omnium, quæ, à punctis

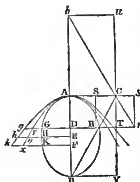
Qua mente Algebra

Basis Spatii

pendicula AC, BD occurrentia hyperbolæ in C & D: & EA dicatur a; AC, b; & area CADB, z;

Erit

Negativos Loquitur



tis in rectâ AB, pro arbitrio sumendis, simili lege educi poterunt, extrema transeat, Ellipsis erit; cujus axis AB, parameter AC. Juncta enim BC rectæ GD, si opus fit, productæ, in R occurrat; actisque RS, CT cum rectâ AB parallelis, actâque rectâ BV cum AC parallelâ, rectangula AR, AT, AV compleantur. Jam propter DR, AC parallelas, erit BD ad DR ut BA ad AC. Unde BD × DA ad DR × DA, hoc est ad DS, ut AB ad AC. (Elem. VI. 1.) Est autem rectangulum BD × DA ad quadratum ex DG ut AB ad AC. (Id enim posuimus.) Rectanguli igitur BD × DA ad rectangulum DS et ad quadratum ex DG eadem est ratio. Quadratum igitur ex DG rectangulo DS æquale erit. Rectangulum verò DS deficit ab illo DC, quod datâ AC abscissâque AD comprehensum est, alio illo ST, ejus nimirum quod datis AB, AC comprehensum est, AV, specie posituque simili. Punctum igitur G ad ellipsin erit, cujus axis recta AB, parameter illa AC. Similibus argumentis efficietur puncta H, K ad eandem ellipsin esse, & extremum cujusvis itidem rectæ, quæ, à puncto inter extrema illa A, B pro arbitrio sumpto, ad priorum legem educta fuerit. Linea igitur curva quæ per omnium illo modo eductarum extrema transeat, haud alia erit atque illa quam modò diximus Ellipsin.

4. SED retrorsùm ducatur recta AB, sumaturque Ab datæ AB æqualis. Jam punctis D, E, F, non inter extrema b, A sed infra A pro arbitrio sumptis, interceptæ illæ AD, AE, AF, contrario quidem modo atque priùs ad AB se habuerunt, positura scilicet ratione nunc ad Ab habent; ut quæ alterius partes fuerint, eæ hujus sint additamenta. Eductæ verò ad perpendiculum Dg, Eh, Fk, si capiantur ejus quæque longitudinis, ut rectangulum datâ bA cum additamento, additamentoque comprehensum ad quadratum ex eductâ datam illam rationem habeat, quam recta Ab ad rectum AC; hoc est, si rectangula bD × DA, bE × EA, bF × FA, ad quadrata ex eductis Dg, Eh, Fk, ordine sumendis, datam illam rationem habeant; linea curva, quæ per eductarum Dg, Eh, Fk, aliarumque omnium, quæ, à punctis infra A, pro arbitrio sumendis, simili lege educi poterunt, extrema transeat, hæc inquam curva, non jam ut priùs Ellipsis, sed Hyperbola quidem erit; parametro eâdem AC atque ellipsis habuit, et axe transverso Ab ellipseos axi AB æquali.

Juncta enim bC rectæ gD si opus sit productæ in r occurrat; aganturque rs, bu cum illis AD, AC parallelæ; quæ rectangula Ar, Au perficiant. Itaque propter parallelas Dr, AC, erit bD ad Dr ut bA ad AC. Atque idcirco bD × DA ad Dr × DA, hoc est ad DS, ut bA ad AC. Est autem rectangulum bD × DA ad quadratum ex Dg ut bA ad AC (Id enim posuimus.) Rectanguli igitur bD × DA ad rectangulum DS eadem atque ad quadratum ex Dg est ratio. Quadratum igitur ex Dg rectangulo DS est æquale. Rectangulum verò DS exuperat illud DC, quod datâ AC abscissâque AD comprehensum est, alio illo TS, ejus nimirum, quod datis Ab, AC comprehensum est, Au, specie posituque simili. Punctum igitur g ad hyperbolam erit, cujus axis transversus Ab parameter AC. Similibusque argumentis de punctis h, k, omniumque adeo rectarum extremis, quæ à punctis infra A, pro arbitrio sumendis, ad priorum legem eductæ fuerint, efficietur ea omnia ad hyperbolam esse, lateribus quibus diximus, AC, Ab, recto transversoque. Linea igitur curva per eductarum extrema transiens, quæ modò Ellipsis erat nunc fit Hyperbola, parametro eâdem quam ellipsis habuit, axeque æquali quidem sed situ contrario. Et ex everso axis situ figuræ immutatæ ratio pendet. Cùm enim in priori casu recta BC, in hoc verò bC, ab eductâ qualibet, verbi gratiâ, à DG, vel Dg, partem quandam, DR, vel Dr, abscindat, quæ cum datâ abscissâ AD rectangulum claudit quadrato ex eductâ æquale, harum verò altera BC, à puncto B egressa, eductam DG medio quasi itinere objectam transeat, primùm in punctum C attingat, altera autem bC ultra locum C progrediens eductæ Dg in occursum eat; horum consequens erit, duarum DR, Dr illam quidem rectâ AC minorem, hanc verò majorem esse: ac propterea quadrata ex eductis DG, Dg, à rectangulo DC, illud defectu, hoc excessu aberunt. Quod sanè cum primarium sit et præcipuum Ellipseos et Hyperbolæ

Erit $AB = \frac{z}{b} + \frac{z^2}{2ab^2} + \frac{z^3}{6a^2b^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5}$ + &c. Ubi coefficientes denominatorum prodeunt multiplicando terminos hujus Hyperb. ex Area, sive

arithmeticæ

perbolæ discrimen, ex situ axis, sicut modò diximus, everso videtur omnis figuræ fieri transmutatio. Algebra igitur, quæ contrarios linearum ductus figurarum diversitate indicare solet, haud ineptè Hyperbolam tanquam Ellipsin, et vicissim, considerat, negato axe. Atque his quidem congruenter, positâ æquatione ad Ellipsin $y^2 = px - \frac{p}{d}x^2$, designante nimirum literâ p parametrum, d axem, y ordinatam, x abscissam ab axe, si in æquatione illâ pro d scribatur $-d$, veniet æquatio ad Hyperbolam: $y^2 = px + \frac{p}{d}x^2$. E contrario, positâ æquatione ad Hyperbolam $y^2 = px + \frac{p}{d}x^2$, si in illâ pro d scribatur $-d$, veniet æquatio ad Ellipsin. Curvarum Axes.

5. Cæterum manentibus ellipsi et hyperbolâ modò scriptis, axibus quidem æqualibus AB, Ab, parametro verò AC communi, eadem parametro AC, vertice autem A, axeque rectâ AB inde ab A in infinitum protensâ, scriptam puta Parabolam A*s*x, cui ordinatæ DG, EH, FK in punctis *s*, *n*, *x* occurrant. Hæc Parabola Ellipsin in vertice communi A contingens, eam intra se totam continebit. Quadratum enim ex D*s* rectangulo DC æquale est, propter parabolam. Quadratum autem ex DG rectangulo DS, propter ellipsin. Sed rectangulum DS rectangulo DC minus est. Quare quadratum ex DG minus erit quadrato ex D*s*. Recta igitur DG minor quàm illa D*s*; ac propterea, cùm punctum *s* sit ad parabolam, (cujus in axe punctum D) punctum G intra parabolam erit. Eodemque modo ostendatur de alio quolibet ellipseos puncto, præter verticem communem A, intra parabolam illud esse. Quòd si manente parametro AC, axis ellipseos AB sensim augeatur, ambitus ellipseos paulatim dilatando, ductu quidem parabolæ interiorem se continebit; eum tamen, quo major axis fuerit, eo magis accedet; et, crescente infinitè axe, propiùs quidem quàm pro datâ aliquâ distantiâ. Congruunt igitur ultimò, et parabola figura ultima est ellipseos. Nam propter parallelas AC, DR, erit AC ad DR, vel AS, ut BA ad BD. Sed rectangulum DC est ad rectangulum DS ut AC ad AS. Quare BA erit ad BD ut rectangulum DC ad rectangulum DS, hoc est, ut quadratum ex D*s* ad quadratum ex DG. Crescente autem axe AB, et manente abscissâ AD, rectæ BD ad majorem BA proportio perpetim fit major, usquedum illâ AB infinitè auctâ ipsam æqualium rationem, propiùs quàm pro datâ aliquâ differentiâ, assecuta fuerit. Crescente igitur axe ellipseos AB proportio quadrati ex DG ad quadratum è D*s* continuò major fit, et æqualium rationem ultimò assequitur. Ipsæ igitur rectæ DG, D*s* fiunt ultimò æquales, et punctum G ellipseos illud *s* parabolæ sensim accedendo, ultimò attigerit. Simili modo aliud omne Ellipseos punctum, axe ejus in infinitum crescente, Parabolam ultimò deveniet.

6. Similibus prorsus argumentis efficere licet, Hyperbolam Parabolâ, cujus eadem parameter, quamque in vertice communi A contingit, exteriorem esse: eam tamen, axe transverso Ab infinitè aucto, propiùs accedere quàm pro datâ aliquâ distantiâ. Hisce vero illud etiam congruit, quòd si, reliquis manentibus, axis, literâ d designatus, infinitè usque increscere fingatur, æquatio ad ellipsin vel hyperbolam $y^2 = px \mp \frac{p}{d}x^2$, evanescente membro $\mp \frac{p}{d}x^2$, et ad nihilum ultimò redacto, in æquationem ad parabolam, $y^2 = px$, ultimò abierit.

7. Haud igitur nihil est quod dicunt Algebraici, cùm Parabolam pro Ellipsi vel Hyperbolâ haberi velint infinito axe. Nimirum, ut totius disputationis summam paucis complectar, trium illarum Sectionum Conicarum multa ita sunt communia, ut quicquid discriminis intersit, aut ex variâ axis magnitudine, aut ex situ ejus contrario natum sit. Si igitur hujusmodi aliquid, notis sibi consuetis, de utrâque curvarum, Ellipsi vel Hyperbolâ, Algebra enunciaverit, illud ad alteram statim accommodatur, signo tantummodò axis, qui hyperbolæ transversus esse debet, quod quidem positurae signum est non quantitatis, in contrarium mutato. Ad Parabolam vero idem accommodetur, si pro formulâ generali sumatur ea in quam ultimò illa abierit, axe ellipseos, vel hyperbolæ, modò hujus sit transversus, infinitè aucto. Hoc equidem principium, ut ad concinnandas formulas Algebraicas libens eo utar, utpote qui omnibus modis effugiendum putem computandi tædium, demonstrationibus tamen componendis minus aptum judico. Quibus ut sua sive elegantia sive evidentia constet, ex eo potiùs deducendæ sunt, quod figura quæque proprium habeat, quàm ex similitudinibus quæ diversis intercedat. Quarum licèt jucundissima et philosopho

NUMERUS E LOGARITHMO.

arithmeticæ progreſſionis, 1, 2, 3, 4, 5, &c. in ſe continuò. Et hinc ex logarithmo dato poteſt numerus ei competens invenire.

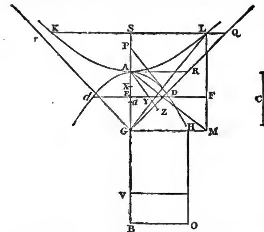
8. Eſto

digniſſima ſit contemplatio, utpote ex quâ id maximè percipiendum ſit, quod quo magis quis perceperit, eo quidem acutior exiſtimandus erit et ingenio pollentior, ſcilicet quàm ſit unum illud omne quod verum eſt; eos tamen, quibus nimium illæ captari atque credi ſolent, ſæpiſſimè fallunt. Nec mirum ſanè. Cùm haud in aliâ re magis cernatur mentis humanæ imbecillitas, quàm in eo quòd rerum ſimilitudines, quæ nullæ ſunt, ſæpiſſimè ſomniamus, quæ verè ſunt eas ægrè cernimus.

8. SED ut ad noſtra revertamur; ſiquis, nullâ formulæ arcûs elliptici ratione habitâ, Parabolici longitudinem è naturâ ipſius parabolæ definire velit, is, ex eo quòd quadratum ordinatæ rectangulo comprehenſo abſciſſâ ab axe et parametro æquale ſit, ſubductis fluxionum calculis, in hanc æquationem incidet; deſignante nimirum literâ z arcum, y ordinatam, ſive ſinum arcûs rectum, p parametrum parabolæ: $\dot{z}=\frac{\dot{y}}{p}\sqrt{p^2+4yy}$. Vel in hanc, $\dot{z}=\frac{\dot{x}}{2\sqrt{x}}\sqrt{p+4x}$: deſignante x abſciſſam ab axe. Hiſce verò formulis, per radicum extractiones, in ſeries infinitas reſolutis, fluentium æſtimationem per Regulam 3[m]. Analyſ. per æquationes infinitas ineundo, formulas aſſequetur quas ſuprà expoſuimus.

COGNATIO ARCUS PARAB.

9. CÆTERUM ex hâc æquatione, $\dot{z}=\frac{\dot{y}}{p}\sqrt{p^2+4yy}$, manifeſta fit cognatio illa, quam Arcubus Parabolicis cum Areis quibuſdam Hyperbolicis intercedere, omnium credo primus Walliſius intellexit; quæ quidem talis eſt, ut Arcus cujuſlibet Parabolici dimenſio ad quadraturam Hyperbolæ, et viciſſim, revocari poſſit.



Sit parabola cujus axis recta infinita AB poſitione data, vertex, A, parameter data c. Sumatur in parabolâ punctum quodvis D. A puncto D in axem deducatur ad perpendiculum recta DE, et in ED, extrorſum productâ, capiatur DF æqualis ordinatæ DE; ut ſit EF duplo illius DE æqualis. In axe AB capiatur AG datæ c æqualis; eductâque ad perpendiculum rectâ GH, in eâ capiatur GH datæ etiam c æqualis. Semiaxe tranſverſo GA, ſecundo GH, ſcribatur hyperbola æquilatera KAL. Per F ducatur FL, cum hyperbolæ axe tranſverſo, GA, parallela; quæ hyperbolæ in L occurrat, axi ejus ſecundo in M. Ad ipſum ſemiaxem ſecundum, GH, applicetur rectangulum GO ſpatio hyperbolico AGML æquale. Dimidium lateris GB arcui AD æquale erit; vel, productâ DE uſque dum parabolæ rurſum in d occurrat, latus GB arcui DAd.

Cùm enim area AGML rectangulo GO ſit æqualis, erunt etiam areæ illius et rectanguli fluxiones ſemper inter ſe æquales. (Geometr. Flux. Prop. II.) Rectangula igitur $LM\times\dot{GM}$, $GH\times\dot{GB}$ inter ſe æqualia. Fluxio igitur rectæ GB eſt ad fluxionem rectæ GM ut LM ad GH. Ducatur recta DP, quæ parabolam in D contingat, axi verò ejus in P occurrat. Erunt EA, AP inter ſe æquales. (Hamilton.

8. Esto VDE *Quadratrix*, cujus vertex est V, existente A centro & AE semi-diametro circuli ad quem aptatur, & angulo VAE recto : demissoque ARCUS ET AREAE

milton. Conic. Lib. I. Prop. XLVII.) Quare EA semissis est rectæ EP, et EA ad EP ut EO ad EP. CUM AREA HYPERB.
Jam verò cùm ED sit ad EA, ut GH ad ED (propter parabolam) et EA ad EP ut ED ad EP, erit ex æquo ED ad EP ut GH ad EF, vel OM : et quadratum ex ED ad quadratum ex EP ut quadratum ex GH ad quadratum ex GM. Invertendo et componendo, quadrata ex EP et ex ED simul sumpta ad quadratum ex EB, ut quadrata ex GM et ex GH simul sumpta ad quadratum ex GH. At verò quadratis ex EP et ex EO simul sumptis quadratum ex DP est æquale (propter angulum ad E trianguli PED rectum). Et quadratis ex GM et ex GH simul sumptis quadratum ex ML est æquale (propter hyperbolam æquilateram.) (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XXXII.) Quare quadratum ex OP erit ad quadratum ex DE, ut quadratum ex ML ad quadratum ex OH : quare et recta OP ad rectam DE ut recta ML ad rectam GH. Sed ut recta DP ad rectam DE ita est fluxio arcûs AD ad fluxionem rectæ DE. (Introduct. Quadrat. Curv. § 4.) Et ostensum est, fluxionem rectæ Ga esse ad fluxionem rectæ GM ut recta ML ad rectam OH. Erit igitur fluxio arcûs AO ad fluxionem rectæ ED ut fluxio rectæ GA ad fluxionem rectæ GM. Permutando, fluxio arcûs AO ad fluxionem rectæ GB ut fluxio rectæ FD ad fluxionem rectæ GM. Rectæ autem ED ad rectam GM ratio data est, illa utique quam unitas ad binarium habet. (ex construct.) Fluxionis igitur arcûs AD ad fluxionem rectæ GA eadem data ratio, unitatis ad binarium, erit. Et cùm hæc constans sit fluxionum ratio, fluentium etiam, curvæ AD rectæque GB, cùm simul illæ à nihilo generari inceperint, eadem inter ipsas ratio erit. (Geom. Flux. Prop. IV.) Arcus igitur AD rectæ GB semissis ; et arcus DA*d* rectæ OB æqualis erit. Q. E. D.

10. Ex hisce statim enascitur problematis, de longitudine Arcûs Parabolici inveniendâ, compositio elegantissima Cotesii. Ea verò est hæc.

MENSURA ARCUS PARABOLICI COTESIANA.

Inveniatur umbilicus parabolæ *d*AD qui sit X. A puncto A ducatur in ordinatam EN, recta AY, quæ ordinatam illam mediam dividat. Et rectæ AY addatur YZ, quæ æqualis sit ejus rationis, pro modulo, AX, logarithmo, quam trianguli AYE latera duo AY, AE, simul sumpta, ad tertium EY habent. Recta AR arcui AO æqualis erit. (Harmon. Mensurar. Pars I. Scholion. Generale.) Hujus demonstrationem, quam nullam quidem ipse Cotesius attulit, Theorema nostrum facillimam suppeditat.

Jungantur enim GL, AM. Ad rectam GH applicetur rectangulum HV triangulo GML æquale. Sint GA, Gr hyperbolæ KAL asymptotæ ; per puncta A, L ducantur rectæ AR, LQ cum semiaxe secundo GH parallelæ ; asymptotarum alteri, in punctis a, Q occurrentes. Harum illa AR hyperbolam in A continget ; hæc LQ, in alio ei puncto præter L occurret. Sit occursus ille alter K. Eadem verò LQ axi transverso GA in S occurrat. Recta denique AG in puncto *a* media sit divisa. Itaque cùm DP sit ad PE ut ML ad GH (id enim in demonstrando theoremate novissimo ostendimus,) rectangula GH × OP, DE × ML erunt inter se æqualia. Rectangulum verò DE × MG triangulo GML est æquale, cùm utrumque dimidium sit rectanguli GL. Rectangulum igitur GH × DP triangulo GML est æquale. Sed eidem triangulo rectangulum HV est æquale. (Ita factum enim.) Rectangula igitur GH × DP, et HV, sive GH × GV, sunt inter se æqualia. Rectæ igitur DP, GV inter se æquales. Cùm verò rectæ LP, LO in punctis, A, Y, similiter sint divisæ, media namque earum utraque dividitur, rectæ AY, PN parallelæ erunt, et triangula EPD, FAY inter se similia. Quare AY erit ad PD ut EA ad EP ; hoc est, AY semissi rectæ PD, ac propterea semissi rectæ GV, æqualis erit.

Rursùm cùm rectangulum GO spatio hyperbolico AGML sit æquale (ita enim factum est) et rectangulum HV triangulo GML (nam id quoque factum) erit rectangulum VO æquale sectori hyperbolico AGL ; hoc est, logarithmo rationis rectæ AR ad LQ pro modulo $\frac{1}{2}$ GH^2, sive GH × Ga. Harum verò trium KQ, AS, LQ continua est proportionum similitudo. (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XXXVII.) Rationis igitur illius quam KQ habet ad AR, idem erit, atque ejus quam AR habet ad LQ, logarithmus. Rectangulum igitur VO logarithmus est rationis quam KQ habet ad AR pro modulo GH × Ga. Recta verò AR semiaxi secundo GH est æqualis. (Hamilton. Lib. I. Prop. XXXVIII.) rectaque KQ duabus ML, MG simul sumptis est æqualis. Nam, propter hyperbolam æquilateram, triangulum rectangulum QSG est isosceles ; illi utique RAG simile. Sunt igitur GA, AG, ac proinde

QS,

QUADRATRICIS.

demissoque ad AE perpendiculo quovis DB, & actâ quadratricis tangente DT occurrente axi ejus AV in T: dic $AV=a$, & $AB=x$; eritque $DB=a-\frac{x^2}{3a}-\frac{x^4}{45a^3}-\frac{2x^6}{945a^5}-$ &c. Et $VT=\frac{x^2}{3a}+\frac{x^4}{15a^3}+\frac{2x^6}{189a^5}+$ &c. Et Area $AVDB=ax-\frac{x^3}{9a}-\frac{x^5}{225a^3}-\frac{2x^7}{6615a^5}-$ &c. Et Arcus $VD=x+\frac{2x^3}{27a^2}+\frac{14x^5}{2025a^4}+\frac{604x^7}{893025a^6}+$ &c (r). Unde vicissim, ex dato BD, vel VT, aut areâ AVDB, arcuve VD, per resolutionem affectarum æquationum erui potest x, seu AB.

9. Esto denique AEB *Sphæroides*, revolutione ellipseos AEB circa axem AB genita, & secta planis quatuor, AB per axem transeunte,

DG

ARC PARAB. COTES.

QS, ML, inter se æquales: et propter rectam LK ad axem transversum ordinatim applicatam, KS, LS, ac proinde KS, GM inter se æquales sunt. E duabus igitur, KS, SQ, composita illa KQ, duabus ML, MG simul sumptis, æqualis erit. Rectangulum igitur VO illius utique rationis est logarithmus, pro modulo $HG\times Ga$, quam duæ ML, MG simul sumptæ ad GH habent; vel rationis ejus quam ad GA habent duæ MA, MG simul sumptæ. (Sunt enim AG, GH inter se æquales, factæ enim; et propter hyperbolam æquilateram, æquales etiam ML, MA.) Sed recta VB est ad rectam Ga ut rectangulum VO, vel $GH\times VB$, ad rectangulum $GH\times Ga$. Quare cùm rectangulum VO logarithmus sit rationis quam duæ MA, MG simul sumptæ habent ad AG, pro modulo rectangulo $GH\times Ga$, erit recta VB ejusdem rationis logarithmus pro modulo rectâ Ga.

Porrò, cùm ED sit ad EP ut GH ad GM, id enim in demonstrando theoremate novissimo ostendimus, erit etiam ED ad EP, ut AG ad GM. Ac proinde EY ad EA ut AG ad GM. Anguli vero YEA, AGM inter se æquales sunt; rectus enim uterque. Triangula igitur YEA, AGM inter se similia; ac propterea duæ AY, AE simul sumptæ erunt ad YE, ut duæ illæ AM, MG simul sumptæ ad AG. Idem igitur utriusque rationis logarithmus erit. Rationis autem illius quam duæ AY, AE simul sumptæ habent ad EY, recta YZ logarithmus est pro modulo rectâ AX. Ita factum enim. Quare et illius quam duæ MA, MG simul sumptæ ad AG habent, erit eadem YA pro modulo utique suo AX logarithmus. Ejusdem vero rationis recta VB logarithmus pro modulo rectâ Ga. Id enim ostensum. Sed datæ alicujus rationis, pro modulis diversis, logarithmi sunt inter se sicut moduli. Recta igitur VB ad rectam YA erit ut Ga ad AX. Sed AX semissis est ipsius Ga. Nempe cùm parametri parabolæ hæc Ga semissis, illa AX pars quarta sit. Recta igitur YA rectæ VA semissis. Sed ostensa est AY semissis rectæ GV. Recta igitur AZ, è duabus AY, YA composita, rectæ GB, è duabus GV, VB, compositæ, semissis erit. Sed arcus parabolicus AD ejusdem GB est semissis. Recta igitur AZ arcui AD æqualis erit. Q. E. D.

Hujus problematis, de arcu parabolico dimetiendo, alia est compositio Hugenii; (De Horolog. Oscillatorio. Pars. 3. inter additamenta. Prop. 9.) quæ tamen Cotesianæ multùm elegantiâ et simplicitate cedit.

ARC. ET AREA

(r) PONATUR $AE=1$. $AY=a$. $AB=x$. E naturâ Quadratricis erit $EA:AV=$ arc. $KH:x$. Quare arc. $KH=\frac{x}{a}$.

Quare etiam GK (sive sinus arcûs HK) $=\frac{x}{a}-\frac{x^3}{6a^3}+\frac{x^5}{120a^5}-\frac{x^7}{5040a^7}+$,

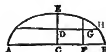
$GK^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^4}{3a^4}+\frac{2x^6}{45a^6}-\frac{x^8}{315a^8}+$,

$AO=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{3a^4}-\frac{2x^6}{45a^6}+\frac{x^8}{315a^8}+}=1-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^4}{24a^4}-\frac{x^6}{720a^6}+$.

Propter

DG parallelo AB, CDE perpendiculariter bifecante axem, & FG parallelo CE: fitque recta $CB=a$, $CE=c$, $CF=x$, & $FG=y$. Et fphæroideos fegmentum CDGF dictis quatuor planis comprehenfum, erit (f) Segmentum Sphæroid.

$$+\,2cxy-\frac{x}{3c}y^3-\frac{x}{20c^3}y^5-\frac{x}{56c^5}y^7-\frac{5x}{576c^7}y^9-\&c.$$
$$-\frac{cx^3}{3a^2}\quad-\frac{x^3}{18ca^2}-\frac{x^3}{40c^3a^2}-\frac{5x^3}{336c^5a^2}-\&c.$$
$$-\frac{cx^5}{20a^4}\quad-\frac{x^5}{40ca^4}-\frac{3x^5}{160c^3a^4}-\&c.$$
$$-\frac{cx^7}{56a^6}\quad-\frac{5x^7}{336ca^6}-\&c.$$
$$-\frac{5cx^9}{576a^8}-\&c.$$
$$-\&c.$$



Ubi

Propter triangula AKD, ADM fimilia, $KG : GA = DM : MA = AB : BD$. Quadratricis

$$\text{Ergo } BD=\frac{AB\times GA}{GK}=\frac{x-\frac{x^3}{2a^2}+\frac{x^5}{24a^4}-\frac{x^7}{720a^6}+,}{\frac{x}{a}-\frac{x^3}{6a^3}+\frac{x^5}{120a^5}-\frac{x^7}{5040a^7}+,}=a-\frac{x^2}{3a}-\frac{x^4}{45a^3}-\frac{2x^6}{945a^5}.$$

$$\text{Hinc area } ABDV=ax-\frac{x^3}{9a}-\frac{x^5}{225a^3}-\frac{2x^7}{6615a^5}-,$$

$$\text{Præterea } \dot{DB}=\frac{2x\dot{x}}{3a}+\frac{4x^3\dot{x}}{45a^3}+\frac{12x^5\dot{x}}{945a^5}+,$$

$$\text{Sed } \dot{AB}:\dot{DB}=DM:MT.\ \text{Ergo } MT=\frac{\dot{DB}\times DM}{\dot{AB}}=\frac{\dot{DB}\times x}{\dot{x}}.\ \text{Ergo } MT=\frac{2x^2}{3a}+\frac{4x^4}{45a^3}+\frac{12x^6}{945a^5}+.$$

$$\text{Et } MV=a-DB=\frac{x^2}{3a}+\frac{x^4}{45a^3}+\frac{2x^6}{945a^5}+.\ \text{Hinc } VT=\frac{x^2}{3a}+\frac{x^4}{15a^3}+\frac{2x^6}{189a^5}+.$$

$$\text{Quadratum ex } \dot{DB}=\dot{x}\dot{x}\times\overline{\frac{2x}{3a}+\frac{4x^3}{45a^3}+\frac{12x^5}{945a^5}+}\Big|^2=\dot{x}\dot{x}\times\frac{4x^2}{9a^2}+\frac{16x^4}{135a^4}+.$$

$$\text{Quare } \dot{DB}^2+\dot{AB}^2=\dot{x}\dot{x}\times\overline{1+\frac{4x^2}{9a^2}+\frac{16x^4}{135a^4}+}$$

$$\text{Et } \sqrt{\dot{DB}^2+\dot{AB}^2}=\dot{x}\times\overline{1+\frac{2x^2}{9a^2}+\frac{14x^4}{405a^4}+}$$

$$\text{Hujus fluens}=VD=x+\frac{2x^3}{27a^2}+\frac{14x^5}{2025a^4}+.$$

(f) FIGURA Sphæroides centro C, circumactu ellipfeos cujus femiaxes CB, CE, circa axem AB, generata, fecari intelligatur quatuor planis. Quorum tribus pofitione datis, fit quartum mobile. Segment. Sphæroid. Ex tribus pofitione datis, duo per centrum tranfeant; atque horum alterum quidem per axem AB, quod fuperficiem fphæroideos fecando ellipfin effecerit generanti fimilem et æqualem. Alterum verò è duobus per centrum, illud ipfum fit, fuper quo axis AB ad perpendiculum eft erectus; quod fuperficiem fecando circulum effecerit, illum ipfum utique quem planetæ fpheroideos, circa axem AB verfatis, Aftronomi Æquinoctialem vocarent. Cum hoc vero reliquum ex planis tribus pofitione datis parallelum fit; ut, fuperficiem fecando, illud etiam circulum efficiat, minorem fcilicet, eum æquinoctiali parallelum. Quartum denique ex iis quibus fphæroidem fecari intelligimus, quod mobile pofuimus, eâ quidem lege fit mobile, ut cum illo, quod per axem AB ductum eft, femper parallelum maneat. Ex quo fiet, ut quocunque loco id confiftat, fuperficiem fphæroideos fecando, ellipfin effecerit, magnitudine quidem in aliis à centro figuræ fphæroideos diftantiis aliam, fpecie verò generantis femper fimilem. Hifce pofitis, magnitudinem fegmenti figuræ

SEGMENTUM SPHÆROID.

Ubi numerales coefficientes supremorum terminorum ($2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{56}, -\frac{5}{576}$, &c.) in infinitum producuntur multiplicando primum

SEGMENTUM

figuræ sphæroideos, quatuor illis planis intercepti, generaliter definire oportet, pro omni situ plani mobilis.

Hunc igitur in finem puta figuram sphæræ idem jam quintùm secari, plano quidem per axem AB, quod super illo per axem AB prius dato ad perpendiculum erectum sit. Hoc igitur planum, sicut omnia quæ per axem AB ducantur, superficiem sphæroideos secando, ellipsin effecerit, generanti similem et æqualem, quam ellipsis quidem AEB lineationis Newtonianæ repræsentat. Idem verò planum circulum æquinoctialem secundum rectam CD secet; circulum minorem cum æquinoctiali parallelum, secundum rectam FG; planum denique mobile secundum DG. Itaque rectæ FG, DG, quas duo plana parallela tertium secando effecerint, inter se parallelæ erunt. (Elem. XI. 16.) Simili ratione duæ CD, FG erunt inter se parallelæ. Figura igitur CFGD parallelogramma erit. Angulus autem FCD est rectus (per Elem. XI. Def. 3.) Nempe cùm recta CD sit in plano circuli æquinoctialis, super quo axis AB ad perpendiculum erectus est. Quare rectangula est figura parallelogramma CFGD. Rectanguli autem CFGD latera CF, DG magnitudine data sunt, propter rectas CD, FG positione datas, quibus illæ CF, DG ad perpendiculum sunt interpositæ. Reliqua verò rectanguli latera, CD, FG magnitudine mutabilia sunt, nimirum cùm CD, et illi æqualis FG, sit plani mobilis à sphæroideos centro mutabilis distantia. Rectæ CD, DG ellipsin AEB productæ in punctis E, H, secent. Recta CE semiaxis erit ellipseos AEB, cujus semiaxis alter est CB, quem recta CE, in centro scilicet, ad perpendiculum insistit. Exponatur recta db rectæ DH æqualis. Huic ad perpendiculum apponatur dk, ad quam db rationem habeat quam CB ad CE. Et semiaxibus db, dk scribatur ellipsis; quæ illi utique similis et æqualis erit, quam planum mobile, si ad distantiam CD à centro sphæroideos id constiterit, superficiem secando, effecerit. Et si in db capiatur dg rectæ DG æqualis, et à puncto g educatur ad perpendiculum recta gl, quæ ellipsin bkm in l secet; tum si producantur kd, lg, usquedum ellipsin utraque rursum secet, hæc in n, illa in m, area $kmnl$ æqualis erit ellipseos, quam planum mobile superficiem sphæroideos secando effecerit, segmento; illi inquam hujus ellipseos segmento, quod duobus planis parallelis, æquinoctialis circuli alteriusque minoris, interceptum est, ista area $kmnl$ æqualis erit. Quare fluxio solidi, cujus magnitudo exquirenda est, exponetur per solidum quoddam, cujus altitudo erit linea recta, sive data, sive mutabilis, per quam fluxio rectæ CD exponitur, bases autem parallelæ, area mutabilis $kmnl$, alteraque huic ipsi similis et æqualis: cujus quidem solidi hoc erit symbolum algebraicum, $Z \times \dot{y}$; designante literâ Z aream mutabilem $kmnl$, literâ y rectam mutabilem CD. Ad fluentis igitur æstimationem illud opus est, ut litera Z in series infinitas resolvatur à radice y procreatas. Hunc in finem designentur rectæ datæ CB, CE, CF, literis a, c, x. Centro d radio db scribatur circulus, qui rectis mk, ln, in utramque partem productis, in punctis K, M, L, N occurrat. Propter ellipsin AEB, quadratum ex DH erit ad differentiam quadratorum ex CE, CD, ut quadratum ex CB ad quadratum ex CE. Hoc est $DH^2 : c^2 - y^2 = a^2 : c^2$. Quare DH, vel db, $= \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - y^2}$. Hinc si formula Areæ Circularis, quæ à Newtono in Analysi per Æquationes Infinitas tradita est, (Cap. III. §. 6.) cum binario multiplicetur, tum in formulam multiplicatione illâ factam si pro a substituatur $\frac{a}{c}\sqrt{c^2 - y^2}$, veniet formula generalis Areæ Circularis KLMN pro radio mutabili DH, vel db. Nempe

$$\text{KLMN} = \frac{2a}{c}\sqrt{c^2 - y^2}\cdot x - \frac{c}{3a\sqrt{c^2 - y^2}}x^3 - \frac{c^3}{20a^3\cdot\overline{c^2 - y^2}|^{\frac{3}{2}}}x^5 - \frac{c^5}{56a^5\cdot\overline{c^2 - y^2}|^{\frac{5}{2}}}x^7 -,$$

Area verò Circularis KLMN ad Aream Ellipticam $klnm$ rationem habet eam, quam db ad dk, sive eam quam CB ad CE (per Rat. Prim. et Ult. Prop. IV. Cor. H. I.) nempe cùm hæc constans sit rectarum LG, lg inter ipsas ratio, in omni magnitudine abscissæ dg. Quare KLMN : Z $= a : c$. Ergo

Z =

mum coefficientem 2 continuò per terminos hujus progressionis Sphæroid.
$-\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{1\times3}{4\times5}, \frac{3\times5}{6\times7}, \frac{5\times7}{8\times9}, \frac{7\times9}{10\times11}$, &c. Et numerales coefficientes terminorum

$$Z=\frac{c}{a}\,\text{KLMN}=2\sqrt{c^2-y^2}\,x-\frac{c^3}{3a^2.\sqrt{c^2-y^2}}x^3-\frac{c^4}{20.a^4.\overline{c^2-y^2}|^{\frac{3}{2}}}x^5-\frac{c^6}{56a^6\overline{c^2-y^2}|^{\frac{5}{2}}}x^7-,$$ Sphæroid.

Itaque, si pro potestatibus hujus binomii, c^2-y^2, quæ indicibus $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -$, designantur, subrogentur series, in quas potestates illæ, per formulam generalem à Newtono in Excerpto Primo traditam, sunt resolvendæ; resolvetur quidem Z in series infinitas à radice y procreatas, vel potiùs à geminâ radice x et y. Etenim licet x datam posuimus, quo calculi scilicet redderentur leviores, reverâ tamen x æquè atque y indefinita censenda est, cùm utraque pro arbitrio sumenda sit. Majoris autem evidentiæ gratiâ calculos subduco.

$$\sqrt{c^2-y^2}=c-\frac{y^2}{2c}-\frac{y^4}{8c^3}-\frac{y^6}{16c^5}-\frac{5y^8}{128c^7}-,$$

$$\overline{c^2-y^2}|^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{c}+\frac{y^2}{2c^3}+\frac{3y^4}{8c^5}+\frac{5y^6}{16c^7}+\frac{35y^8}{128c^9}+,$$

$$\overline{c^2-y^2}|^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{c^3}+\frac{3y^2}{2c^5}+\frac{15y^4}{8c^7}+\frac{35y^6}{16c^9}+\frac{315y^8}{128c^{11}}$$

$$\overline{c^2-y^2}|^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{c^5}+\frac{5y^2}{2c^7}+\frac{35y^4}{8c^9}+\frac{105y^6}{16c^{11}}+\frac{1155y^8}{128c^{13}}$$

$$\overline{c^2-y^2}|^{-\frac{7}{2}}=\frac{1}{c^7}+\frac{7y^2}{2c^9}+,$$

Hine $2\sqrt{c^2-y^2}.\,x=2cx-\frac{y^2}{c}x-\frac{y^4}{4c^3}x-\frac{y^6}{8c^5}x-\frac{5y^8}{64c^7}x$

$$\frac{c^3}{3a^2\sqrt{c^2-y^2}}x^3=\frac{c^2}{3a^2}x^3+\frac{y^2}{6a^2c}x^3+\frac{y^4}{8a^2c^3}x^3+\frac{5y^6}{48c^5a^2}x^3+\frac{35y8}{384a^2c^7}x^3+,$$

$$\frac{c^4}{20a^4.\overline{c^2-y^2}|^{\frac{3}{2}}}x^5=\frac{c}{20.a^4}x^5+\frac{3y^2}{40a^4c}x^5+\frac{3y^4}{32.a^4c^3}x^5+\frac{7y^6}{64a^4c^5}x^5+\frac{63y^8}{512a^4c^7}x^5+,$$

$$\frac{c^6}{56a^6\overline{c^2-y^2}|^{\frac{5}{2}}}x^7=\frac{c}{56a^6}x^7+\frac{5y^2}{112a^6c}x^7+\frac{5y^4}{64a^6c^3}x^7+\frac{15y^6}{128c^5a^6}x^7+\frac{165y^8}{1024a^6c^7}x^7+,$$

$$\frac{5c^8}{576a^8.\overline{c^2-y^2}|^{\frac{7}{2}}}x^9=\frac{5c}{576a^8}x^9+\frac{35y^2}{1152a^8c}x^9+,$$

Horum ordini summo inferiorum omnium ordinum summas auferendo, conficietur

$$Z=2cx-\frac{x}{c}y^2-\frac{x}{4c^3}y^4-\frac{x}{8c^5}y^6-\frac{5x}{64c^7}y^8-\frac{7x}{128c^9}y^{10}-,$$

$$-\frac{cx^3}{3a^2}-\frac{x^3}{6a^2c}y^2-\frac{x^3}{8a^2c^3}y^4-\frac{5x^3}{48c^5a^2}y^6-\frac{35x^3}{384a^2c^7}y^8-,$$

$$-\frac{cx^5}{20.a^4}-\frac{3x^5}{40a^4c}y^2-\frac{3x^5}{32a^4c^3}y^4-\frac{7x^5}{64a^4c^5}y^6-,$$

$$-\frac{cx^7}{56a^6}-\frac{5x^7}{112a^6c}y^2-\frac{5x^7}{64a^6c^3}y^4-,$$

$$-\frac{5cx^9}{576a^8}-\frac{35x^9}{1152a^8c}y^2-,$$

$$-\frac{7c.x^{11}}{1408a^{10}}-,$$

Nimirum ordo quisque eo usque produci debet, ut in membro cujusque extremo indices literarum x, et y, simul sumpti, eundem numerum conficiant. Sicut hic factum est. Etenim in membro extremo ordinis summi, index literæ x est 1, literæ y, 10; qui numeri simul sumpti 11 conficiunt. In membro itidem extremo ordinis proximè inferioris, index literæ x est 3, literæ y, 8; atque hi numeri simul sumpti rursum 11 conficiunt. In membro tertii ordinis extremo index literæ x est 5, literæ y, 6; et hi numeri simul sumpti 11 reddunt. Sic in ordinibus etiam inferioribus,

mem-

EXCERPTUM QUARTUM.

terminorum in unâquâque columnâ descendentium in infinitum producuntur multiplicando continuò coefficientem supremi termini in primâ columnâ per eandem progressionem, in secundâ autem per terminos hujus $\frac{1\times1}{2\times3}$, $\frac{3\times3}{4\times5}$, $\frac{5\times5}{6\times7}$, $\frac{7\times7}{8\times9}$, &c. in tertiâ per terminos hujus $\frac{3\times1}{2\times3}$, $\frac{5\times3}{4\times5}$, $\frac{7\times5}{6\times7}$, $\frac{9\times7}{8\times9}$, &c. in quartâ per terminos hujus $\frac{5\times1}{2\times3}$, $\frac{7\times3}{4\times5}$, $\frac{9\times5}{6\times7}$, &c. in quintâ per terminos hujus $\frac{7\times1}{2\times3}$, $\frac{9\times3}{4\times5}$, $\frac{11\times5}{6\times7}$, &c. Et sic in infinitum.

10. Et eodem modo segmenta aliorum solidorum designari, & valores eorum aliquando commodè per series quasdem numerales in infinitum produci possunt.

11. Ex his videre est, quantum fines analyseos per hujusmodi infinitas æquationes ampliantur: quippe quæ, earum beneficio, ad omnia pæne dixerim problemata (si numeralia *Diophanti* & similia excipias) sese extendit.

12. Non tamen omninò universalis evadit, nisi per ulteriores quasdam methodos eliciendi series infinitas. Sunt enim quædam Problemata, in quibus non liceat ad series infinitas, per divisionem vel

membrorum cujusque extremorum indices simul sumpti, 7 et 4, 9 et 2, 11 & 0, numerum eundem 11 reddunt. Hoc autem idcirco diligentiùs exposuimus, quia in formulis hujusmodi condendis, quæ ex seriebus infinitis, numero infinitis, è duplici radice procreatis conflandæ sunt, idem semper tenendum est; nempe ut series omnes similiter producantur. Similiter autem produci intelligo, quarum in extremis membris indices radicum duarum, simul sumpti, eundem numerum, vel eandem fortè quantitatem fractam conficiunt.

Itaque quantitate Z in series infinitas, quas modò exposuimus, resolutâ, multiplicentur series illæ omnes in fluxionem $\dot{y}$.

Ita veniet

$$
\begin{array}{llllllll}
Z\dot{y} = 2cx & & -x & & -\frac{x}{4} & & -\frac{x}{8} & \\
-\frac{cx^3}{3a^2} & & -\frac{x^3}{6a^2} & & -\frac{x^3}{8a^2} & & -\frac{5x^3}{48a^2} & y^6\dot{y} \\
-\frac{cx^5}{20a^4} & & -\frac{3x^5}{40a^4} & \times\frac{y^2\dot{y}}{c} & -\frac{3x^5}{32a^4} & \times\frac{y^4\dot{y}}{c^3} & -\frac{7x^5\dot{y}}{64a^4} & \\
-\frac{cx^7}{56a^6} & \times\dot{y} & -\frac{5x^7}{112a^6} & & -\frac{5x^7}{64a^6} & & -, & \\
-\frac{5cx^9}{576a^8} & & -\frac{35x^9}{1152a^8} & & -, & & & \\
-\frac{7cx^{11}}{1408a^{10}} & & -, & & & & &
\end{array}
$$

Cujus

vel extractionem radicum simplicium affectarumve, pervenire. Sed quomodo in istis casibus procedendum sit, jam non vacat dicere; ut neque alia quædam tradere, quæ circa reductionem infinitarum serierum in-finitas, ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam parciùs scribo, quòd hæ speculationes diu mihi fastidio esse cœperint, adeo ut ab iisdem jam per quinque ferè annos abstinuerim. CONSTRUCT. MECHANIC.

13. UNUM tamen addam: quòd postquam Problema aliquod ad infinitam æquationem deducitur, possint inde variæ Approximationes, in usum Mechanicæ, nullo ferè negotio formari; quæ, per alias methodos quæsitæ, multo labore temporisque dispendio constare solent (t).

14. Cujus rei exemplo esse possunt tractatus *Hugenii* aliorumque de Quadraturâ circuli. Nam, ut ex datâ arcûs chordâ, A, & demidii arcûs chordâ, B, arcum illum proximè assequaris; finge arcum illum esse z, & circuli radium r; juxtaque superiora erit A (nempe duplum sinûs dimidii z) $= z - \frac{z^3}{4 \times 6r^2} + \frac{z^5}{4 \times 4 \times 120r^4} -$ &c (u). Et $B = \frac{1}{2}z - \frac{z^3}{2 \times 16 \times 6r^2} + \frac{z^5}{2 \times 16 \times 16 \times 120r^4} -$ &c (x). Duc jam B in numerum fictitium n, & à producto aufer A, & residui secundum terminum (nempe $- \frac{nz^3}{2 \times 16 \times 6r^2} + \frac{z^3}{4 \times 6r^2}$,) eo ut evanescat, pone $= 0$; indeque emerget $n = 8$, et erit $8B - A = 3z * - \frac{3z^5}{64 \times 120r^4} +$ &c. hoc est $\frac{8B - A}{3} = z$; errore tantùm existente $\frac{z^5}{7680r^4} -$ &c. in excessu (y). Quod est Theorema *Hugenianum* (z).

Insuper,

Cujus fluens per formulam exponetur ex seriebus infinitis, numero infinitis, conflatam, qualis à Newtono allata est.

(t) Confer Geom. Analyt. C. XI. Sect. I.

(u) In formulam utique generalem sinûs ex arcu suprà § 2. traditam si pro illis z, z^3, z^5, z^7, hæc $\frac{1}{2}z, \frac{z^3}{8}, \frac{z^5}{32}, \frac{z^7}{128}$ ordine substituantur, veniet sinûs dimidii arcûs formula generalis; $\frac{1}{2}z - \frac{z^3}{8 \times 6r^2} + \frac{z^5}{2 \times 16 \times 120r^4} -$; cujus membra omnia cum binario si multiplicaveris, veniet $z - \frac{z^3}{4 \times 6r^2} + \frac{z^5}{4 \times 4 \times 120r^4} -$, $=$ A, atque hæc Chordæ quidem ex arcu Formula generalis erit.

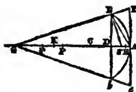
(x) Hanc æquationem ita obtinebis, si in formulam generalem chordæ ex arcu modò inventam, pro illis z, z^3, z^5, z^7, hæc $\frac{z}{2}, \frac{z^3}{8}, \frac{z^5}{32}, \frac{z^7}{128}$ ordine substitueris.

(y) In defectu potiùs; nempe rectæ eo modo inventæ arcubus minores sunt: sicut rectè statuit Hugenius.

(z) Hugen. de Circuli Magnitudine inventâ, Prop. XII.

(u) Per

EXCERPTUM QUARTUM.



15. Insuper, si in arcûs, Bb, sagittâ AD indefinitè productâ, quæratur punctum G, à quo actæ rectæ, GB, Gb, abscindant tangentem Ee quàm proximè æqualem arcui isti: esto circuli centrum C, diameter AK$=d$, & sagitta AD$=x$: et erit DB $(=\sqrt{dx-x^2}) = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}}$ – &c. Et AE (=AB)$=d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}}$ + &c (aa). Et AE – DB : AD :: AE : AG. Quare AG $= \frac{1}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12x^2}{175d}$ – vel + &c (bb). Finge ergo AG$=\frac{1}{2}d-\frac{1}{5}x$; et vicissim erit DG $(\frac{1}{2}d-\frac{6}{5}x)$: DB :: DA : AE – DB. Quare AE – DB $= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}}$ + &c. Adde DB; & prodit AE $=d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}}$ + &c. Hoc aufer de valore ipsius AE suprà habito, & restabit error $\frac{16x^{\frac{7}{2}}}{525d^{\frac{5}{2}}}$ + vel – &c. Quare in AG, cape AH quintam partem DA, et KG=HC, et actæ GBE, Gbe abscindent tangentem Ee quàm proximè æqualem arcui BAb; errore tantùm existente

(aa) Per formulam suprà traditam § 1. arcûs ex sinu verso. Quòd si huic æquationi prodematur, pars scilicet parti, hæc tertia veniet AE – DB $= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^{\frac{7}{2}}}{28d^{\frac{5}{2}}}$ +,

(bb) NAMPE ex hâc analogiâ AE – DB:AD = AE:AG, efficitur AG $= \frac{\text{AD} \times \text{AE}}{\text{AE} - \text{DB}}$.

Sed AD × AE $= x \times$ AE $= x \times d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{7}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}}$ +,

Et AE – DB $= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^{\frac{7}{2}}}{28d^{\frac{5}{2}}}$ +,

Quare AG $= \left\{ \frac{x \times d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} +,}{\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} +,} \right. = \frac{d + \frac{x}{6} + \frac{3x^2}{40d} + \frac{5x^3}{112d^2} +,}{\frac{2}{3} + \frac{x}{5d} + \frac{3x^2}{28d} +,}$

Unde divisione peractâ veniet AG $= \frac{1}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12x^2}{175d}$ – vel +,

(cc) Nimirum si capiatur AG $= \frac{1}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12x^2}{175d}$, ablatâ AK $= d$, relinquetur KG $= \frac{1}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12x^2}{175d} =$ CH $- \frac{12x^2}{175d}$. Sed $\frac{12x^2}{175d} = \frac{3}{5}x \times \frac{4}{5}x \times \frac{1}{7d} = \frac{3\text{AH} \times \text{DH}}{7\text{AK}}$.

(dd) Analys. per Æquationes numero terminorum Infinitas. Cap. III. § 7.

(ee) Immò errore hujus ferè duplo, id quod ex sequenti computatione manifestum fit.

§ AB

istente $\frac{16x^3}{525d^3}\sqrt{dx}$ + vel − &c. multo minore scilicet quàm in Theoremate *Hugenii*. Quòd si fiat 7 AK : 3 AH : : DH : n; et capiatur KG=CH−n, erit error adhuc multo minor [cc]. Con-struct. Mechanic.

16. Atque ita, si Circuli segmentum aliquod BAb per Mechanicam designandum esset: primò reducerem aream istam in infinitam seriem, puta hanc; BbA $=\frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}}-\frac{x^{\frac{9}{2}}}{36d^{\frac{5}{2}}}$ − &c [dd]. Dein quærerem constructiones Mechanicas, quibus hanc seriem proximè assequerer: cujusmodi sunt hæ. Age rectam AB, et erit segmentum BbA $=\overline{\frac{2}{3}\text{AB}+\text{BD}}\times\frac{4}{5}$AD proximè; existente scilicet errore tantùm $\frac{x^3}{70d^2}\sqrt{dx}$ + &c. in defectu [ee]: vel proximiùs, erit segmentum illud (bisecto AD in F, & rectâ actâ BF) $=\frac{4\text{BF}+\text{AB}}{15}\times 4$AD; existente errore solummodo $\frac{x^3}{560d^2}\sqrt{dx}$ + [ff] &c. qui semper minor erit quàm $\frac{1}{1500}$ totius segmenti, etiamsi segmentum illud ad usque semicirculum augeatur.

17. Sic et in Ellipsi BAb, [*vid. fig. præcedent.*] cujus vertex A, axis alteruter AK, & latus rectum AP; cape PG $=\frac{1}{2}$AP $+\frac{19\text{AK}-21\text{AP}}{10\text{AK}}\times$ AD. In Hyperbolâ verò, cape PG $=\frac{1}{2}$AP $+\frac{19\text{AK}+21\text{AP}}{10\text{AK}}\times$ AD [gg]. Et acta.

$$\frac{2}{3}\text{AB}=\frac{2}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$$
$$\text{BD}=d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}}-,$$
$$\frac{2}{3}\text{AB}+\text{BD}=\frac{5}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}}-,$$
$$\frac{4}{5}\text{AD}=\frac{4}{5}x$$
$$\overline{\frac{2}{3}\text{AB}+\text{BD}}\times\frac{4}{5}\text{AD}=\frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{10d^{\frac{3}{2}}}-,$$
$$\text{Area B}b\text{A}=\frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}}$$
$$\Big\}\ \text{Differentia}=\overline{\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{14}}\,\frac{x^{\frac{7}{2}}}{d^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{70}\frac{x^{\frac{7}{2}}}{d^{\frac{3}{2}}}.$$

[ff] Errore rursum duplo

Nempe $\text{BF}^2=\text{AB}^2-\text{AF}^2-\overline{2\text{DF}\times\text{FA}}=\text{AB}^2-3\text{AF}^2=dx-\frac{3}{4}x^2$

$$\text{BF}=\sqrt{dx-\tfrac{3}{4}x^2}=d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{8d^{\frac{1}{2}}}-\frac{9x^{\frac{5}{2}}}{128d^{\frac{3}{2}}}-\frac{27x^{\frac{7}{2}}}{1024d^{\frac{5}{2}}}-,$$
$$4\text{BF}=4d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}}-\frac{9x^{\frac{5}{2}}}{32d^{\frac{3}{2}}}-\frac{27x^{\frac{7}{2}}}{256d^{\frac{5}{2}}}-,$$
$$\text{AB}=d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$$
$$4\text{BF}+\text{AB}=5d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}}-\frac{9x^{\frac{5}{2}}}{32d^{\frac{3}{2}}}-\frac{27x^{\frac{7}{2}}}{256d^{\frac{5}{2}}}-,$$
$$\frac{4\text{AD}}{15}=\frac{4x}{15}$$
$$\frac{4\text{BF}+\text{AB}}{15}\times 4\text{AD}=\frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}}-\frac{3x^{\frac{7}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}}-\frac{9x^{\frac{9}{2}}}{64\times 5d^{\frac{5}{2}}}$$

4

Area

EXCERPTUM QUARTUM. acta recta GBE abscindet tangentem AE quàm proximè æqualem Arcui Elliptico vel Hyperbolico AB, dummodo arcus ille non sit nimis magnus ([hh]).

Et

$$\text{Area } \text{EbA} = \quad \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}} -$$

$$\text{Error} = \overline{\tfrac{3}{20} - \tfrac{1}{14}}\,\frac{x^{\frac{7}{2}}}{d^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3}{280d^2}\sqrt{dx}$$

2. CÆTERUM viam investigandi generalem, quâ hæc et hisce similia assequi liceat, et errores etiam, quantùm velis, imminuere, Newtonus ipse indicavit Geometriæ Analyticæ Cap. 11. § 1.

( ) In Parabolâ capiatur $PG = \frac{1}{5}AP + \frac{18}{10}AO$.

( ) NEMPE posito Problemate quàm maximè generali, ut Curvâ quâlibet AB positione datâ, inveniatur in axe ejus punctum G, unde si recta GB ad punctum quodlibet in curvâ B educatur, producta illa à rectâ AE, quæ curvam in axis vertice contingat, auferat partem AE arcui AB quàm proximè æqualem; hoc inquam Problemate ita generaliter proposito, quæcunque demum sit Curva AB, modò talis sit ut arcûs ejus AB longitudo ex sinu ejus, vel recto quem vocant vel verso, per seriem infinitam exponi possit, eadem servanda erit investigandi ratio, quam Newtonus usurpabat, cùm de arcu Circulari ageretur.

Nimirum factum puta id quod efficiendum est. Sit G punctum illud quod quærimus; junctaque GB tangenti AE in E occurrat, et abscindat AE arcui AB æqualem. A puncto B in axem AG ad perpendiculum deducatur recta BD. Jam cùm arcûs AB longitudo ex utraque rectarum DB, vel DA, puta ex DA, per seriem infinitam data sit, id enim ponimus; per eandem seriem infinitam data erit rectæ AE longitudo. Sed ex curvæ naturâ data erit recta DB ex illâ DA. Symbolum igitur rectæ DB in seriem infinitam, si opus sit, resolutum auferatur seriei, quâ arcus AB exponitur. Relinquetur nova series; cujus, si ea infinitè producatur, summa arcus AB rectæque DB, hoc est rectarum AE, DB, differentiæ ultimò erit æqualis.

Jam ex analogiâ illâ AE − DB : AG = DB : GD, quæ Curvas pariter apud omnes viget, utpote quæ ex triangulorum GDB, GAE inter ipsa similitudine, non ex peculiari curvæ alicujus naturâ ortum ducat; ex hac igitur analogiâ elicitur series, quæ rectæ DG longitudinem exponat. Nempe hoc modo. Quantitas Algebraica, quâ rectæ DB longitudo exhibetur, dividatur à serie illâ cujus inventionem modò exposuimus, quæ rectarum AE, DB differentiam exhibeat. In serie per divisionem factâ, indices potestatum ejus literæ, quâ recta AD designata fuerit, unitate augeantur. Ita veniet nova series; cujus, si ea infinitè producatur, summa rectæ GO ultimò fit æqualis. Huic si auferatur symbolum rectæ DP, sive $p - x$, veniet tandem series, cujus, infinitè utique productæ, summa rectæ PG ultimò æqualis erit. Hujus demum ope Problema absolvendum erit. Capienda nimirum est PG ejus longitudinis, quam membra aliquot seriei novissimæ, inde ab initio ordine sumenda, algebraicè consummata præfinierint. Duo plerumque suffecerint, nisi nimia sit arcûs AB longitudo. Sed quo plura fuerint adhibita, eò veritatem propiùs accesseris.

2. HÆC etsi satis explicatè dixisse mihi videor, majoris tamen evidentiæ gratiâ, posito curvam Parabolam esse primùm, tum Ellipsin, calculos subducam.

3. SIT igitur curva AB primùm Parabola, cujus parametro recta AP sit æqualis. Rectam AP litera p designet, rectam verò AD, arcûs AB sinum versum, litera x.

$$\text{Arcus igitur AB, sive recta AE,} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5p^{\frac{3}{2}}} + \frac{4x^{\frac{7}{2}}}{7p^{\frac{5}{2}}} - \frac{10x^{\frac{9}{2}}}{p^{\frac{7}{2}}} -,$$

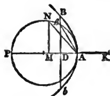
secundum formulam suprà traditam: vide not. *q*. § 1.

Et è naturâ parabolæ, $DB = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$

$$\text{Ergo AE} - \text{DB} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5p^{\frac{3}{2}}} + \frac{4x^{\frac{7}{2}}}{7p^{\frac{5}{2}}} - \frac{10x^{\frac{9}{2}}}{p^{\frac{7}{2}}}$$

$$\text{Ergo } \frac{DB}{AE - DB} = \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5p^{\frac{3}{2}}} + \frac{4x^{\frac{7}{2}}}{7p^{\frac{5}{2}}} -,} = \frac{p}{\frac{2}{3}x - \frac{2}{5p}x^2 + \frac{4}{7p^2}x^3 -} = \frac{3p}{2x} + \frac{9}{10} - \frac{261}{350p}x$$

Hinc



18. Et pro areâ fegmenti Hyperbolici BbA; in DP cape $MD = \frac{3AD^2}{4AK}$, & ad D & M erige perpendicula Dβ, MN occurrentia femicirculo fuper diametro AP defcripto: eritque $\frac{4AN + A\beta}{15} \times 4AD = BbA$ proximè: vel proximiùs, erit $\frac{21AN + 4A\beta}{75} \times 4AD = BbA$; fi modò capiatur $DM = \frac{5AD^2}{7AK}$ (ii). CONSTRUCT. MECHANIC.

TRAC-

Hinc $\frac{DB \times AD}{AE - DB}$ $(= DG)$ $= \frac{3p}{2} + \frac{9x}{10} - \frac{261}{350p}x^2 +,$

Sed $DP =$ $p - x$

Ergo $PG = (DG - DP =)$ $\frac{1}{2}p + \frac{19}{10}x - \frac{261}{350p}x^2$

Hinc fi modicus fit arcus AB, fatis erit fumpfiffe PG æqualem rectæ $\frac{1}{2}AP + \frac{19}{10}AD$.

4. SIT jam curva AB Ellipfis, cujus axis AD literâ d defignetur, parameter AP literâ p, literâ x ut priùs arcûs AE finum verfum defignante.

$$\text{Arcus igitur AB, five recta AE,} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3p^{\frac{1}{2}}} \quad - \frac{2}{5p^{\frac{3}{2}}} \quad + \frac{4}{7p^{\frac{5}{2}}}$$
$$- \frac{p^{\frac{1}{2}}}{2d}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{5p^{\frac{1}{2}}d}x^{\frac{5}{2}} - \frac{9}{7p^{\frac{3}{2}}d}x^{\frac{7}{2}}$$
$$- \frac{p^{\frac{1}{2}}}{8d^2} \quad + \frac{23}{28p^{\frac{1}{2}}d^2}$$
$$- \frac{p^{\frac{1}{2}}}{16d^3}$$

(per formulam fuprà traditam §. 5.)

$$\text{Sed è naturâ Ellipfeos, DB} = \sqrt{\frac{p}{d}dx - x^2} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{2d}x^{\frac{3}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{8d^2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{16d^3}x^{\frac{7}{2}}$$

$$\text{Ergo AE} - \text{DB} = \frac{2}{3p^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5p^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{7p^{\frac{5}{2}}}$$
$$+ \frac{3}{5p^{\frac{1}{2}}d} \quad - \frac{9}{7p^{\frac{3}{2}}d}x^{\frac{7}{2}}$$
$$+ \frac{23}{28p^{\frac{1}{2}}d^2}$$

$$\text{Et } \frac{DB}{AE - DB} = \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{2d}x^{\frac{3}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{8d^2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{16d^3}x^{\frac{7}{2}}}{\frac{2}{3p^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5p^{\frac{3}{2}}} \quad - \frac{4}{7p^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{5p^{\frac{1}{2}}d}x^{\frac{5}{2}} - \frac{9}{7p^{\frac{3}{2}}d}x^{\frac{7}{2}} + \frac{23}{28p^{\frac{1}{2}}d^2}}$$

Hoc

Hoc est $\frac{BD}{AE-DB} = \frac{p - \frac{px}{2d} - \frac{px^2}{8d^2} -,}{\frac{2}{3}x - \frac{2}{5p}x^2 + \frac{4}{7p^2}x^3 -, \quad + \frac{3}{5d}x^2 - \frac{9}{7pd}x^3 +, \quad + \frac{23}{28d^2}x^3 -, \quad +,} = \frac{3p}{2x} + \frac{9}{10} - \frac{261}{350p}x - \frac{21p}{10d} + \frac{144}{175d}x - \frac{51p}{350d^2}x$

Ergo $\frac{DB \times AD}{AE-DB}$ $(=GD)$ $= \frac{3p}{2} + \frac{9}{10}x - \frac{21p}{10d}x - \frac{261}{350p}x^2 + \frac{144}{175d}x^2 - \frac{51p}{350d^2}x^2 \pm$

$DP = p - x \pm$

Ergo $PG = \frac{1}{2}p + \frac{19}{10}x - \frac{21p}{10d}x - \frac{261}{350p}x^2 + \frac{144}{175d}x^2 - \frac{51p}{350d^2}x^2 \pm$

Hinc, si modicus sit arcus AB, satis erit sumpsisse $PG = \frac{1}{2}AP + \frac{19AK - 21AP}{10AK}AD$.

(h) $A\beta = \sqrt{px}$, è naturâ Circuli. $MD = \frac{3x^2}{4d}$ (ex hypothesi) Ergo $AM = x + \frac{3x^2}{4d}$. $AN^2 = AM \times AP = px + \frac{3px^2}{4d}$. Ergo $AN = \sqrt{px + \frac{3px^2}{4d}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{d}} \times \sqrt{4dx + 3x^2}$.

Ergo $4AN = 2\sqrt{\frac{p}{d}} \times \sqrt{4dx + 3x^2}$.

Sed $\sqrt{4dx + 3x^2} = 2d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{4d^{\frac{1}{2}}} - \frac{9x^{\frac{5}{2}}}{64d^{\frac{3}{2}}} + \frac{27x^{\frac{7}{2}}}{512d^{\frac{5}{2}}} -,$

Ergo $4AN = 4p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{2d} - \frac{9p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{32d^2} + \frac{27x^{\frac{7}{2}}}{256d^3} -,$

Et $4AN + A\beta = 5p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{2d} - \frac{9p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{32d^2} + \frac{27x^{\frac{7}{2}}}{256d^3} -,$

Et $\frac{4.AN + AB}{15} = \frac{1}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{10d} - \frac{3p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{160d^2} + \frac{9p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{1280d^3} -,$

Ergo $\frac{4AN + AB}{15} \times 4AD = \frac{4p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5d} - \frac{3p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{40d^2} + \frac{9p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{9}{2}}}{320d^3} -,$

Sed area hyperbolica $B\delta A = \frac{4p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5d} - \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{14d^2} +,$ (Geometr. Analyt.)

Error $\overline{\frac{3}{40} - \frac{1}{14}}\,\frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{d^2} = \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{280d^2}$

2. PONATUR autem $MD = \frac{5AD^2}{7AK} = \frac{5x^2}{7d}$. Tum $AM = x + \frac{5x^2}{7d}$,

Et $AN^2 = AM \times AP = px + \frac{5px^2}{7d}$. Ergo $AN = \sqrt{px + \frac{5px^2}{7d}} = \sqrt{\frac{p}{7d}} \times \sqrt{7dx + 5x^2}$

Et

Et $21.AN = 3\sqrt{\frac{7p}{d}} \times \sqrt{7dx + 5x^2}$

Sed $\sqrt{7dx + 5x^2} = 7^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{5.x^{\frac{3}{2}}}{2.d^{\frac{1}{2}}7^{\frac{1}{2}}} - \frac{25.x^{\frac{5}{2}}}{56.d^{\frac{3}{2}}7^{\frac{1}{2}}} + \frac{125x^{\frac{7}{2}}}{784.d^{\frac{5}{2}}7^{\frac{1}{2}}} -,$

Ergo $21AN = 21.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{15.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{2.d} - \frac{75.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{56.d^2} + \frac{375.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{2}}}{784.d^3} -,$

Sed $4A\beta = 4.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$

Ergo $21AN + 4A\beta = 25.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{15.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{2.d} - \frac{75.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{56.d^2} + \frac{375\, p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{2}}}{784.d^3} -$

Et $\frac{21AN + 4A\beta}{75} = \frac{1}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{10.d} - \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{56.d^2} + \frac{5.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{2}}}{784.d^3} -,$

Et $\frac{21AN + 4A\beta}{75} \times 4AD = \frac{4}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{5.d} - \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{2}}}{14.d^2} + \frac{5p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{9}{2}}}{196d^3} -,$

Sed area hyperbolica $Bb\Lambda = \frac{4}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{5d} - \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{2}}}{14d^2} + \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{9}{2}}}{36d^3} -,$

Error $\overline{\frac{1}{36} - \frac{5}{196}}\, \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{9}{2}}}{d^3} = \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{9}{2}}}{441d^3}.$

TRACTATUS

DE

QUADRATURA CURVARUM.

INTRODUCTIO

AD

QUADRATURAM CURVARUM.

QUANTITATES Mathematicas, non ut ex partibus quàm minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas, hìc considero. Lineæ describuntur, ac describendo generantur, non per appositionem partium, sed per motum continuum punctorum; superficies per motum linearum; solida per motum superficierum; anguli per rotationem laterum; tempora per fluxum continuum; & sic in cæteris. Hæ Geneses in rerum naturâ locum verè habent, & in motu corporum quotidie cernuntur. Et ad hunc modum Veteres, ducendo rectas mobiles in longitudinem rectarum immobilium, genesin docuerunt rectangulorum.

2. Considerando igitur, quòd quantitates æqualibus temporibus crescentes & crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori quâ crescunt ac generantur, evadunt majores vel minores; methodum quærebam, determinandi quantitates, ex velocitatibus motuum vel incrementorum, quibus generantur; & has motuum vel incrementorum velocitates nominando *Fluxiones*, & quantitates genitas nominando *Fluentes*, incidi paulatim *annis* 1665 & 1666 in Methodum Fluxionum, quâ hic usus sum in Quadraturâ Curvarum.

3. Fluxiones sunt, quàm proximè, ut fluentium augmenta æqualibus temporis particulis quàm minimis genita, &, ut accurate loquar, sunt in primâ ratione augmentorum nascentium; exponi autem possunt per lineas quascunque, quæ sunt ipsis proportionales ([a]).

4. Ut si areæ ABC, ABDG ordinatis BC, BD, super basi AB uniformi cum motu progredientibus, describantur; harum arearum

([a]) Vide Nostram Fluxionum Geometriam Def. 4 & 5. & Prop. 1.

fluxiones

INTRODUCTIO. fluxiones erunt inter se ut ordinatæ describentes BC & BD, & per ordinatas illas exponi possunt, propterea quòd ordinatæ illæ sunt ut arearum augmenta nascentia.

Progrediatur ordinata BC de loco suo BC in locum quemvis novum *bc*. Compleatur parallelogrammum BCE*b*, ac ducatur recta VTH, quæ curvam tangat in C, ipsisque *bc* & BA productis occurrat in T & V: & abscissæ AB, ordinatæ BC, & lineæ curvæ AC*c* augmenta modò genita, erunt B*b*, E*c* & C*c*; & in horum augmentorum nascentium ratione primâ sunt latera trianguli CET, ideoque fluxiones ipsarum AB, BC & AC sunt ut trianguli illius CET latera CE, ET & CT, & per eadem latera exponi possunt; vel, quòd perinde est, per latera trianguli consimilis VBC.

5. Eodem recidit, si sumantur fluxiones in ultimâ ratione partium evanescentium. Agatur recta C*c*, & producatur eadem ad K. Redeat ordinata *bc* in locum suum priorem BC, & coeuntibus punctis C & *c*, recta CK coincidet cum tangente CH (b), & triangulum evanescens CE*c*, in ultimâ suâ forma, evadet simile triangulo CET, & ejus latera evanescentia CE, E*c* & C*c* erunt ultimò inter se, ut sunt trianguli alterius CET latera CE, ET & CT; & propterea in hàc ratione sunt fluxiones linearum AB, BC & AC. Si puncta C & *c* parvo quovis intervallo ab invicem distant, recta CK parvo intervallo à tangente CH distabit. Ut recta CK cum tangente CH coincidat, & rationes ultimæ linearum CE, E*c* & C*c* inveniantur, debent puncta C & *c* coire, & omninò coincidere. Errores quàm minimi in rebus mathematicis non sunt contemnendi.

6. Simili argumento si Circulus, centro B radio BC descriptus, in longitudinem abscissæ AB ad angulos rectos, uniformi cum motu, ducatur; fluxio solidi geniti ABC erit ut circulus ille generans, & fluxio superficiei ejus erit ut perimeter circuli illius & fluxio lineæ curvæ AC conjunctim. Nam quo tempore solidum

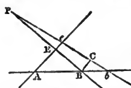
(b) Per Lemma 6m de Method. Rat. Prim. et Ult.

ABC

ABC generatur, ducendo circulum illum in longitudinem abſciſſæ AB, eodem ſuperficies ejus generatur, ducendo perimetrum circuli illius in longitudinem curvæ AC. Hujus methodi accipe etiam exempla quæ ſequuntur.

7. *Recta* PB, *circa polum datum* P *revolvens, ſecet aliam poſitione datam rectam* AB: *quæritur proportio fluxionum rectarum illarum* AB & PB.

Progrediatur recta PB de loco ſuo PB in locum novum P*b*. In P*b* capiatur PC ipſi PB æqualis, & ad AB ducatur PD ſic, ut angulus *b*PD æqualis ſit angulo *b*BC; & ob ſimilitudinem triangulorum *b*BC, *b*PD erit augmentum B*b* ad augmentum C*b*, ut P*b* ad D*b*. Redeat jam P*b* in locum ſuum priorem PB, ut augmenta illa evaneſcant, & evaneſcentium ratio ultima, id eſt ratio ultima P*b* ad D*b*, ea erit, quæ eſt PB ad DB, exiſtente angulo PDB recto; & propterea in hâc ratione eſt fluxio ipſius AB ad fluxionem ipſius PB.



8. *Recta* PB, *circa datum polum* P *revolvens, ſecet alias duas poſitione datas rectas* AB & AE *in* B & E: *quæritur proportio fluxionum rectarum illarum* AB & AE.

Progrediatur recta revolvens PB de loco ſuo PB in locum novum P*b*, rectas AB, AE in punctis *b* & *e* ſecantem, & rectæ AE parallela BC ducatur, ipſi P*b* occurrens in C; & erit B*b* ad BC ut A*b* ad A*e*, & BC ad E*e* ut PB ad PE; &, conjunctis rationibus, B*b* ad E*e* ut A*b*×PB ad A*e*×PE. Redeat jam linea P*b* in locum ſuum priorem PB, & augmentum evaneſcens B*b* erit ad augmentum evaneſcens E*e*, ut AB×PB ad AE×PE; ideoque in hâc ratione eſt fluxio rectæ AB ad fluxionem rectæ AE.

9. Hinc ſi recta revolvens PB lineas quaſvis curvas, poſitione datas, ſecet in punctis B & E, & rectæ jam mobiles, AB, AE, curvas illas tangant in ſectionum punctis B & E: erit fluxio curvæ, quam recta AB tangit, ad fluxionem curvæ, quam recta AE tangit, ut AB×PB ad AD×PE. Id quod etiam eveniet, ſi recta

PB

PB curvam aliquam, poſitione datam, perpetuò tangat in puncto mobili P (').

FORMULA 10. *Fluat quantitas x uniformiter, & invenienda ſit fluxio quantitatis* x^n. Quo tempore quantitas x fluendo evadit $x + o$, quantitas x^n evadet $\overline{x+o}|^n$; id eſt per methodum ſerierum infinitarum, $x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2} oox^{n-2}$ + &c. Et augmenta, o, & nox^{n-1} +

$nn-n$

( ) IN curvas duas Bb, Ee recta PEB incidat, quæ dum quolibet motu transferatur, extremitate ſuâ P curvam, poſitione datam, Pp perpetuò tangat. Per puncta B, E, ubi recta mobilis PB curvis Bb, Ee, occurrit, ducantur rectæ BA, EA quæ curvas illas contingant. Rectæ BA, EA in A concurrant. Dico fluxionem curvæ Bb eſſe ad fluxionem curvæ Ee, ut rectangulum AB × PB ad rectangulum AE × PE. Rectæ enim PB, ea ſitu PB egreſſæ, ſit alius quivis ſitus pcb. Junctæ Bb, Ee in D concurrant; necnon rectæ PB, pb in R. Ducatur per B recta BC cum rectâ Ae parallela. Erit igitur Bb ad BC ut Db ad De: et BC ad Ee ut BR ad RE. Ergo Bb erit ad Ee ut rectangulum Db × BR ad rectangulum De × RE. Redeunte autem rectâ pb in locum ſuum priorem, PB, anguli DBA, DEA vel imminuti uſque vel uſque creſcentes, ultimò quidem, punctis b, B necnon illis e, E coeuntibus, aut in nihilum erunt redacti, aut in duos rectos uterque creverint; aut altero denique in nihilum redacto in duos rectos alter creverit. Unde punctum D cum ipſo A ultimò jungetur. Jungetur etiam ultimò punctum R cum ipſo P, lineâ PR infinitè imminutâ. Quare ſubtenſæ evaneſcentis Bb ad evaneſcentem Ee ea erit ratio ultima, quæ rectanguli AB × PB ad rectangulum AE × PE eſt ratio. Sed ſubtenſæ arcubus ſuis evaneſcentibus ultimò ſunt æquales. (Per Lemma VII. De Rat Prim. et Ult.) Arcuum igitur et ſubtenſarum rationes ultimæ eædem erunt. Quare curvarum Bb, Ee incrementa evaneſcentia erunt ultimò inter ſe ut rectangula AB × PB, AE × PE. Ergo et curvarum illarum fluxiones eorundem rectangulorum inter ſe proportionem gerent. Q. E. D.

(') POST multas jam olim evulgatas hujus Formulæ demonſtrationes, quarum duas potiſſimùm plurimi facio, Robinſii alteram, alteram ipſius Newtoni, quam, in ſecundo Principiorum Libro Lemmate 2°. à Newtono adumbratam traditam, nos in Prop. VIII. Geometriæ noſtræ Fluxionum ejuſque Corollariis accuratiùs expoſuimus, poſt has inquam aliaſque plurimas jam pridem pervagatas, alia nuper in lucem prodiit, quæ auctorem habuit Simſonum celebrem illum Glaſguenſium Geometram; quæ neſcio ſanè an omnes hactenus excogitatas ſimplicitate vincat. Certè dignam eſſe judico, quæ inter pretioſiſſima Geometriæ hic reponatur, tanquam in fiſco Newtoni; ita tamen ut ſermone reddita ſit Newtoniano, quem Simſonus ſine cauſâ, me judice, magnoperè refugiebat. Ex eo autem quòd fluxio poteſtatis quadraticæ, ſive x^2, ſit $2x\dot{x}$, et quòd rectanguli xy fluxio ſit $x\dot{y} + y\dot{x}$, ad hunc modum ratiocinando Formulæ generalis veritatem Vir ſummus evincit.

THEOREMA.

Si ſint rectæ quovis numero proportione convenientes, quarum primâ permanente reliquæ fluant; tum ſi fluxio penultimæ ſit ad fluxionem ſecundæ, ſicut antepenultimæ multiplex aliqua ad primam, et capiatur æquè multiplex penultimæ; fluxio ultimæ erit ad fluxionem ſecundæ ſicut ſumma penultimæ et multiplicis ipſius ad primam.

Sint rectæ quovis numero proportione convenientes A, B, C, D, E, F, quarum primâ A permanente, reliquæ fluant. Harum antepenultimæ D ſit recta G multiplex, et penultimæ E ſit H æquè multiplex; et fluxio rectæ E ad fluxionem ſecundæ B eam rationem habeat quam G ad A. Dico fluxionem ultimæ F ad fluxionem ſecundæ B eam rationem habituram quam ſumma duarum E, H, ad A. Sit enim recta K ad A ut fluxio rectæ F ad fluxionem rectæ B. Cùm igitur $\dot{F}$ ſit ad $\dot{B}$ ut K ad A, rectangula A × $\dot{F}$, K × $\dot{B}$ [*notis* $\dot{F}$, $\dot{B}$ *rectæ intelligantur deſignari, nempe rectarum* F, B *fluxiones*

7 *ſenſu*

$\frac{nn-n}{2}oox^{n-2}$ + &c. funt ad invicem, ut 1 & $nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ox^{n-2}$ + Fluxionis Quantitatis x^n.
&c. Evanefcant jam augmenta illa, & eorum ratio ultima erit 1 ad nx^{n-1}: ideoque fluxio quantitatis x eft ad fluxionem quantitas x^n, ut 1 ad nx^{n-1} (d).

11. Similibus argumentis, per methodum Rationum Primarum & Ultimarum, colligi poffunt fluxiones linearum, feu rectarum,

fenfu Def. 5. Geomet. Flux.] erunt inter fe æqualia. Rectangulum autem $A \times \dot{F}$ fluxio eft rectanguli $A \times F$, cujus latus F fluit, altero A manente. Et, propter continuam rectarum A, B, C, D, E, F, proportionis convenientiam, rectangula $A \times F$, $B \times E$ funt inter fe æqualia. Horum igitur fluxiones erunt inter fe æquales. (Geom. Flux. Prop. 11.) Fluxio autem rectanguli et rectangulorum $B \times \dot{F}$, $E \times \dot{B}$ fummaerit. Et fluxio rectanguli $A \times F$ eft ipfum rectangulum $A \times \dot{F}$. Rectangulum igitur $A \times \dot{F}$ duobus $B \times \dot{E}$, $E \times \dot{B}$ fimul fumptis eft æquale. Iifdem igitur rectangulum $E \times \dot{B}$ æquale erit. Atqui $\dot{B} : \dot{E} = A : G$. (fic enim pofuimus.) Permutando $\dot{B} : A = \dot{E} : G$. Rectangulum igitur $K \times \dot{B} : K \times A = E \times \dot{E} : B \times G$. Et permutando $K \times \dot{B} : B \times \dot{E} = K \times A : B \times G$. Rurfum $K \times \dot{B} : E \times \dot{B} = K : E = E \times A : A \times E$. Quare rectangulum $E \times \dot{B}$ erit ad rectangula duo $B \times \dot{E}$, $E \times \dot{B}$ fimul fumpta, ficut rectangulum $K \times A$ ad rectangula duo $B \times G$, $A \times E$ fimul fumpta (24. 5. Elem.) Sed ex priùs oftenfis rectangulum $K \times \dot{B}$ duobus $B \times \dot{E}$, $E \times \dot{B}$ fimul fumptis eft æquale. Ergo duobus $B \times G$, $A \times E$ fimul fumptis rectangulum $K \times A$ æquale erit. Sed cùm rectæ G, H rectarum D, E æquè fint multiplices, erit G ad H ut D ad E. Sed D ad E ut A ad B. Ergo G ad H ut A ad B. Rectangula igitur $G \times B$, $H \times A$ erunt inter fe æqualia. Et rectangulo $A \times E$ communiter addito, duo $G \times B$, $A \times E$ fimul fumpta duobus $A \times H$, $A \times E$ fimul fumptis æqualia erunt. Sed duobus $G \times B$, $A \times E$ fimul fumptis rectangulum $A \times K$ modò oftenfum eft æquale. Duobus igitur $A \times H$, $A \times E$ fimul fumptis idem $A \times K$ æquale. Ac propterea recta K æqualis erit rectis H, E fimul fumptis. Sed recta E ad A ut $\dot{F}$ ad $\dot{B}$. Id enim pofuimus. Quare $\dot{F}$ ad $\dot{B}$ ut fumma duarum H, E ad A. Q. E. D. Demonstratio Formulæ Flux. x^n.

Hinc fi litera n numerum defignet, cujus tot funt unitates quot funt rectæ præter primam A proportione convenientes, fi fit F proportione convenientium ultima, E penultima, fluxio ultimæ F erit ad fluxionem fecundæ B, five $\dot{F}$ ad $\dot{B}$, ut $n.E$ ad A. Nam ob continuam rectarum A, B, C analogiam, $A \times C = B^2$. Ergo $A \times \dot{C} = 2B\dot{B}$. Ergo $\dot{C} : \dot{B} = 2B : A$. Ac proinde, propter ea quæ modò funt oftenfa, erit $\dot{D} : \dot{B} = 2C + C : A$, hoc eft $\dot{D} : \dot{B} = 3C : A$. Unde rurfum concludetur effe $\dot{E} : \dot{B} = 3D + D : A$. Hoc eft $\dot{E} : \dot{B} = 4D : A$. Eodemque modo progrediendo obtinebitur tandem $\dot{F} : \dot{B} = n.E : A$.

Jam fi proportione convenientium primam, quam datam ponimus, litera a defignet, fecundam x; tertia hoc fymbolo fignificanda erit, $\frac{x^2}{a}$; quarta hoc alio, $\frac{x^3}{a^2}$; penultimam ultimamque fymbola $\frac{x^{n-1}}{a^{n-2}}$, $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ defignabunt. Et fluxio ultimæ erit ad fluxionem fecundæ, ut $n\frac{x^{n-1}}{a^{n-2}}$ ad a. Hoc eft ut $n.x^{n-1}$ ad a^{n-1}. Vel fi arithmeticè omnia æftimare libeat, ponatur $a = 1$. Et fi fecunda proportione convenientium fit x, erit tertia x^2, quarta x^3 penultima x^{n-1}, ultima x^n. Et fluxio ultimæ x^n erit ad fluxionem fecundæ x ficut $n.x^{n-1}$ ad 1. Ac proinde fi fluxio quantitatis x defignetur hâc notâ $\dot{x}$, fluxio quantitatis x^n erit $nx^{n-1}\dot{x}$. Q. E. D.

Vide Librum Roberti Simfoni De Limitibus Quantitatum et Rationum Prop. x.

INTRODUCTIO feu curvarum, in cafibus quibufcunque, ut & fluxiones fuperficierum, angulorum & aliarum quantitatum. In finitis autem quantitatibus analyfin fic inftituere, & finitarum, nafcentium vel evanefcentium, rationes primas vel ultimas inveftigare, confonum eft Geometriæ Veterum: & volui oftendere, quòd in methodo Fluxionum non opus fit figuras infinitè parvas in Geometriam introducere. Peragi tamen poteft analyfis, in figuris quibufcunque, feu finitis, feu infinitè parvis, quæ figuris evanefcentibus finguntur fimiles; ut & in figuris quæ per methodos Indivifibilium pro infinitè parvis haberi folent, modò cautè procedas.

12. Ex Fluxionibus invenire Fluentes, Problema difficilius eft; & folutionis primus gradus æquipollet Quadraturæ Curvarum; de quâ fequentia olim fcripfi.

DE

QUADRATURA CURVARUM.

NOTATIO FLUXIONALIS. QUANTITATES indeterminatas ut motu perpetuò crefcentes vel decrefcentes, id eft, ut fluentes vel defluentes, in fequentibus confidero; defignoque literis x, y, z, v, & earum fluxiones, feu celeritates crefcendi, noto iifdem literis punctatis $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{v}$. Sunt & harum fluxionum fluxiones, feu mutationes, magis aut minùs celeres; quas ipfarum z, y, x, v, fluxiones fecundas nominare licet, & fic defignare $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$; & harum fluxiones primas, feu ipfarum z, y, x, v fluxiones tertias, fic $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$; & quartas fic $\ddddot{z}$, $\ddddot{y}$, $\ddddot{x}$, $\ddddot{v}$. Et quemadmodum $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\ddddot{v}$ funt fluxiones quantitatum $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$, & hæ funt fluxiones quantitatum $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, v, & hæ funt fluxiones quantitatum primarum z, y, x, v: fic hæ quantitates confiderari poffunt ut fluxiones aliarum, quas fic defignabo, $\acute{z}$, $\acute{y}$, $\acute{x}$, $\acute{v}$; & hæ ut fluxiones aliarum $\overset{\prime\prime}{z}$, $\overset{\prime\prime}{y}$, $\overset{\prime\prime}{x}$, $\overset{\prime\prime}{v}$; & hæ ut fluxiones aliarum $\overset{\prime\prime\prime}{z}$, $\overset{\prime\prime\prime}{y}$, $\overset{\prime\prime\prime}{x}$, $\overset{\prime\prime\prime}{v}$. Defignant igitur $\overset{\prime\prime}{z}$, $\acute{z}$, z, $\dot{z}$, $\ddot{z}$, $\dddot{z}$, $\ddddot{z}$, $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{z}$, &c. feriem quantitatum, quarum quælibet pofterior eft fluxio præcedentis, & quælibet prior eft fluens.

fluens quantitas fluxionem habens subsequentem. Similis est series $\overset{||}{\sqrt{az-zz}}$, $\overset{|}{\sqrt{az-zz}}$, $\sqrt{az-zz}$, $\overset{\cdot}{\sqrt{az-zz}}$, $\overset{\cdot\cdot}{\sqrt{az-zz}}$, $\overset{\cdot\cdot\cdot}{\sqrt{az-zz}}$, ut & series $\overset{||}{\frac{az+zz}{a-z}}$, $\overset{|}{\frac{az+zz}{a-z}}$, $\frac{az+zz}{a-z}$, $\overset{\cdot}{\frac{az+zz}{a-z}}$, $\overset{\cdot\cdot}{\frac{az+zz}{a-z}}$, $\frac{az+zz}{a-z}$ (with ···) (c).

Et notandum est, quòd quantitas quælibet prior, in his seriebus, est ut Area figuræ curvilineæ, cujus ordinatim applicata rectangula est quantitas posterior, & abscissa est z: uti $\overset{|}{\sqrt{az-zz}}$ area curvæ cujus ordinata est $\sqrt{az-zz}$ & abscissa z. Quò autem spectant hæc omnia patebit in propositionibus quæ sequuntur.

PROP. I. PROB. I.

Datâ æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, invenire fluxiones. Prop. I.

Solutio.

Multiplicetur omnis æquationis terminus per indicem dignitatis quantitatis cujusque fluentis, quam involvit; & in singulis multiplicationibus mutetur dignitatis latus in fluxionem suam, & aggregatum factorum omnium, sub propriis signis, erit æquatio nova.

Explicatio.

Sunto a, b, c, d, &c. quantitates determinatæ & immutabiles, & proponatur æquatio quævis quantitates fluentes z, y, x, &c. involvens, uti $x^3 - xy^2 + a^2z - b^3 = 0$. Multiplicentur termini primò per indices dignitatum x, &, in singulis multiplicationibus, pro dignitatis latere, seu x unius dimensionis, scribatur $\dot{x}$, & summa factorum erit $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2$. Idem fiat in y, & prodibit $-2xy\dot{y}$. Idem fiat in z & prodibit $aa\dot{z}$. Ponatur summa factorum æqualis nihilo, & habebitur æquatio $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{z} = 0$. Dico quòd hâc æquatione definitur relatio fluxionum.

Demonstratio.

Nam sit o quantitas admodum parva & sunto $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$, quantitatum z, y, x momenta; id est, incrementa momentanea syn-

(c) Vide nostram Fluxionum Geometriam Def. 5.

Prop. I. chrona. Et si quantitates fluentes jam sunt z, y & x, hæ, post momentum temporis, incrementis suis $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$ auctæ, evadent $z+o\dot{z}$, $y+o\dot{y}$, $x+o\dot{x}$, quæ in æquatione primâ pro z, y, & x scriptæ dant æquationem $x^3+3x^2o\dot{x}+3xo^2\dot{x}\dot{x}+o^3\dot{x}^3-xy^2-o\dot{x}y^2-2xo\dot{y}y-2\dot{x}o^2\dot{y}y-xo^2\dot{y}\dot{y}-\dot{x}o^3\dot{y}\dot{y}+a^2z+a^2o\dot{z}-b^3=0$.

Subducatur æquatio prior, & residuum divisum per o erit $3\dot{x}x^2+3\dot{x}\dot{x}ox+\dot{x}^3o^2-\dot{x}y^2-2x\dot{y}y-2\dot{x}o\dot{y}y-xo\dot{y}\dot{y}-\dot{x}o^2\dot{y}\dot{y}+a^2\dot{z}=0$. Minuatur quantitas o in infinitum, & neglectis terminis evanescentibus restabit $3\dot{x}x^2-\dot{x}y^2-2x\dot{y}y+a^2\dot{z}=0$. Q. E. D. (f)

Expli-

(f) EXPLICATIO DEMONSTRATIONIS NEWTONIANÆ.

Demonstratio

Puta rectas, AB, CD, EF, motu punctorum, B, D, F, genitas magnitudines esse mutabiles, quas Newtonus literis z, y, x designari voluit, literâ a designante aliam rectam datæ longitudinis. Hæ rectæ, tempore quovis T, longitudines novas Ab, Cd, Ef sint adeptæ; ut sint, Bb, Dd, Ff incrementa rectarum simul genita. Sit GH alia recta, æquabili velocitate mutabilis, cui, tempore T, incrementum Hh accesserit. Exponatur recta P datæ cujusvis longitudinis. Sint L, M, N aliæ rectæ, ad quas P rationes habeat, quas velocitas æquabilis puncti H, rectam GH generantis, ad velocitates quibus puncta B, D, F, rectas AB, CD, EF generantia, ex suo unumquodque loco B, vel D, vel F discedunt. Erunt L, M, N magnitudines, quæ Newtono notis $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$ designantur (Geom. Flux. Def. v.) Sint Bβ, Dδ, Fφ incrementa quæ rectis, AB, CD, EF, tempore T, accessissent, si puncta B, D, F velocitatibus quibuscum è locis B, D, F discedunt, totum illud tempus T æquabiliter lata essent. Jam cùm æquatio proposita, $x^3-xy^2+a^2z-b^3=0$, quantitatum mutabilium x, y, z relationes mutuas generaliter exprimat, ut quibuslibet harum magnitudinibus, quæ fluendo simul fuerint factæ, pro literis, x, y, z substitutis, æqualitas maneat; cùm præterea sint AB, CD, EF magnitudines fluendo simul factæ, et Ab, Cd, Ef aliæ simul factæ, literis z, y, x significatæ, si illas primò, tum has, pro literis z, y, x substitueris, duæ orientur æquationes

$$\text{EF}^3-\text{EF}\times\text{CD}^2+a^2\,\text{AB}-b^3=0$$

$$\overline{\text{EF}+\text{F}f}\,\big|^3-\overline{\text{EF}+\text{F}f}\times\overline{\text{CD}+\text{D}d}\,\big|^2+a^2\times\overline{\text{AB}+\text{B}b}-b^3=0.$$

Harum posteriori priore detractâ, tertia existet,

$$3\,\overline{\text{EF}}\,\big|^2.\text{F}f+3\text{EF}.\overline{\text{F}f}\,\big|^2+\overline{\text{F}f}\,\big|^3-2\text{EF}.\text{CD}.\text{D}d-\text{EF}.\overline{\text{D}d}\,\big|^2-\text{F}f.\overline{\text{CD}}\,\big|^2-2\text{CD}.\text{F}f.\text{D}d-\text{F}f.\overline{\text{D}d}\,\big|^2+a^2\,\text{B}b=0.$$

Quæ incrementorum simul factorum, Bb, Dd, Ff, mutuas relationes significabit; idque generaliter, qualescunque fuerint illorum magnitudines. Si igitur tempore T infinitè decrescente, incrementa illa evanescant, evanescentium relationes ultimas eadem æquatio significabit. Sed cùm fluentium GH, AB, quarum fluxiones sunt P, L, incrementa simul genita sint Hh, Bb, evanescentium Hh, Bb ultima inter ipsas ratio rectarum P, L ratio erit. (Geometr. Flux. Prop. I.) Sunt autem Hh, Bβ spatia eodem tempore T æquabiliter confecta velocitatibus, quæ sunt inter se ut rectæ P, L. Neque huic rationi obstant spatiorum Hh, Bβ longitudines magnæ parvæve fuerint. Quare tempore T infinitè decrescente, evanescentium Hh, Bβ ratio inter ipsas ultima rectarum P, L ratio erit. Evanescentis igitur Hh ad evanescentes Bb, Bβ eædem erunt rationes ultimæ. Evanescentes igitur Bb, Bβ erunt ultimò inter se æquales. Simili modo ostendetur evanescentes Dd, Dδ, necnon Ff, Fφ esse ultimò inter se æquales. Ac propterea evanescentium, Bβ, Dδ, Fφ, eædem erunt ac illarum Bb, Dd, Ff relationes ultimæ; et si in æquationem novissimam pro his Bb, Dd, Ff, illæ Bβ, Dδ, Fφ substituantur, transmutabitur illa in aliam, quæ evanescentium Bβ, Dδ, Fφ ultimas inter ipsas relationes exprimet. Nempe hoc modo. $3\,\overline{\text{EF}}\,\big|^2\text{F}\varphi+3.\text{EF}.\overline{\text{F}\varphi}\,\big|^2+\overline{\text{F}\varphi}\,\big|^3-2\text{EF}.\text{CD}.\text{D}\delta-\text{EF}.\overline{\text{D}\delta}\,\big|^2-\text{F}\varphi.\overline{\text{CD}}\,\big|^2-2\text{CD}.\text{F}\varphi.\text{D}\delta-\text{F}\varphi.\overline{\text{D}\delta}\,\big|^2+a^2\,\text{B}\beta=0$, ultimò

Jam

Explicatio plenior. PROP. I.

Ad eundem modum si æquatio esset $x^3 - xy^2 + a^2\sqrt{ax-yy} - b^3 = 0$, produceretur $3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}y + a^2\dot{\sqrt{ax-yy}} = 0$. Ubi si fluxionem $\dot{\sqrt{ax-yy}}$ tollere velis, pone $\sqrt{ax-yy} = z$, & erit $ax - y^2 = z^2$, & (per hanc propositionem) $a\dot{x} - 2\dot{y}y = 2\dot{z}z$, seu $\frac{a\dot{x}-2\dot{y}y}{2z} = \dot{z}$; hoc est: $\frac{a\dot{x}-2\dot{y}y}{2\sqrt{ax-yy}} = \dot{\sqrt{ax-yy}}$. Et inde $3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}y + \frac{a^3\dot{x} - 2a^2\dot{y}y}{2\sqrt{ax-yy}} = 0$.

Et per operationem repetitam pergitur ad fluxiones secundas, tertias & sequentes. Sit æquatio $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$; & fiet per operationem primam, $\dot{z}y^3 + 3z\dot{y}y^2 - 4\dot{z}z^3 = 0$: per secundam $\ddot{z}y^3 + 6\dot{z}\dot{y}y^2$

Jam cùm Hb sit ad $B\beta$ ut P ad L, erit $B\beta = \frac{Hb \times L}{P}$; vel si recta Hb per literam o designetur, PROP. Iᵐ. $B\beta = \frac{o \times L}{P}$. Similiter ostendetur $D\delta = \frac{o \times M}{P}$, necnon $F\phi = \frac{o \times N}{P}$. Et in omnibus rectarum, $B\beta$, $D\delta$, $E\phi$, magnitudinibus, dummodo illæ conferantur quæ simul genitæ sint, hæ æqualitates manent. Quare si in æquationem relationum ultimarum pro illis $B\beta$, $D\delta$, $F\phi$, hæ $\frac{oL}{P}$, $\frac{oM}{P}$, $\frac{oN}{P}$ substituantur, nova existet hujusmodi; $\frac{3EF^2.No}{P} + \frac{3EF.N^2o^2}{P^2} + \frac{N^3o^3}{P^3} - 2EF.CD.\frac{o.M}{P} - \frac{EF.o^2.M^2}{P^2} - \frac{\overline{CD}^2.o.N}{P} - \frac{2CD.N.M.o^2}{P^2} - \frac{N.M^2.o^3}{P^3} + \frac{a^2L.o}{P} = 0$; ultimò scilicet. Omnibusque à quantitate $\frac{o}{P}$ divisis, factàque translatione, ut quantitates illæ omnes, quas, peractâ divisione, litera o non erit ingressa, seorsum consistant, $3EF^2.N - 2EF.CD.M - \overline{CD}^2.N + a^2L = \frac{N.M^2.o^2}{P^2} + \frac{2CO.N.M.o}{P} + \frac{EF.M^2.o}{P} - \frac{N^3.o^2}{P^2} - \frac{3EF.N^2.o}{P}$ ultimò. Hoc est, duo illa multinomia hinc illinc constituta, ut sint inæqualia si tempus T datæ capiatur magnitudinis, tempore tamen T infinitè decrescente, ad æqualitatem usque tendunt; quam propiùs tandem accesserint quàm pro datâ quâvis differentiâ. Sed tempore T infinitè decrescente recta o evanescit, et unà cum tempore T ad nihilum redigetur. Quare è duobus multinomiis, quæ constituunt æquationem novissimam, alterum illud, cujus membra singula litera o ingressa est, evanescet; ut unà cum tempore T rectàque o in nihilum abierit. Quare et alterum $3EF^2.N - 2EF.CD.M - CD^2.N + a^2L$ nihilo æquale erit. Non enim. Sed si fieri possit, æquale sit finitæ alicui magnitudini, quam litera V designet. Multinomium igitur alterum, cujus membra singula litera o ingressa est, magnitudinem V propiùs ultimò accesserit quàm pro datâ quâvis differentiâ; ac propterea hanc ipsam V magnitudinem suam habebit ultimam; nec unquam propiùs quàm pro datâ illâ differentiâ V nihilum accesserit. Non igitur unà cum tempore T rectàque o multinomium illud in nihilum abierit. Quod est absurdum. Abierit enim ex priùs demonstratis.

Multinomium igitur $3\overline{EF}^2.N - 2EF.CD.M - \overline{CD}^2.N + a^2L$ nihilo est æquale. Hoc est, pro rectis CD, EF, literis y, x; et pro L, M, N notis $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, substitutis, $3x^2.\dot{x} - 2xy\dot{y} - y^2\dot{x} + a^2\dot{z} = 0$. Q. E. D.

Ita ni fallor absolutam dedimus ac perfectam, quam Newtonus adumbrare voluit, demonstrationem; ab omni certè individuorum vel infinitè parvorum notione liberam.

Cæterùm veritas regulæ de quâ agitur è Corollariis Prop. VIII. Libri nostri de Geometriâ Fluxionum ejusdemque Libri Prop. V. satis elucescit.

Prop. I. & II. $+3z\ddot{y}y^2+6z\dot{y}^2y-4\ddot{z}z^3-12\dot{z}^2z^2=0$: per tertiam $\dddot{z}y^3+9\ddot{z}\dot{y}y^2+9\dot{z}\ddot{y}y^2+18\dot{z}\dot{y}^2y+3z\dddot{y}y^2+18z\ddot{y}\dot{y}y+6z\dot{y}^3-4\dddot{z}z^3-36\ddot{z}\dot{z}z^2-24\dot{z}^3z=0$.

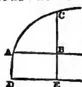
Ubi verò sic pergitur ad fluxiones secundas, tertias & sequentes, convenit quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem considerare; & pro ejus fluxione primâ unitatem scribere, pro secundâ verò & sequentibus nihil. Sit æquatio $zy^3-z^4+a^4=0$, ut suprà; & fluat z uniformiter, sitque ejus fluxio unitas, & fiet per operationem primam $y^3+3z\dot{y}y^2-4z^3=0$: per secundam $6\dot{y}y^2+3z\ddot{y}y^2+6z\dot{y}^2y-12z^2=0$: per tertiam $9\ddot{y}y^2+18\dot{y}^2y+3z\dddot{y}y^2+18z\ddot{y}\dot{y}y+6z\dot{y}^3-24z=0$.

In hujus autem generis æquationibus concipiendum est, quòd fluxiones in singulis terminis sint ejusdem ordinis; id est, vel omnes primi ordinis $\dot{y}$, $\dot{z}$; vel omnes secundi $\ddot{y}$, $\dot{y}^2$, $\dot{y}\dot{z}$, $\dot{z}^2$; vel omnes tertii $\dddot{y}$, $\ddot{y}\dot{y}$, $\ddot{y}\dot{z}$, $\dot{y}^3$, $\dot{y}^2\dot{z}$, $\dot{y}\dot{z}^2$, $\dot{z}^3$, &c. Et ubi res aliter se habet, complendus est ordo per subintellectas fluxiones quantitatis uniformiter fluentis. Sic æquatio novissima complendo ordinem tertium fit $9\dot{z}\ddot{y}y^2+18\dot{z}\dot{y}^2y+3z\dddot{y}y^2+18z\ddot{y}\dot{y}y+6z\dot{y}^3-24z\dot{z}^3=0$ (g).

PROP. II. PROB. II.

Invenire Curvas quæ Quadrari possunt.

Sit ABC figura invenienda, BC ordinatim applicata rectangula, & AB abscissa. Producatur CB ad E, ut fit BE = 1, & compleatur parallelogrammum ABED: & arearum ABC, ABED fluxiones erunt ut BC & BE. Assumatur igitur æquatio quævis quâ relatio arearum definiatur, & inde dabitur relatio ordinatarum BC & BE per Prop. I. Q. E. I. (h).



Hujus rei exempla habentur in propositionibus duabus sequentibus (i).

(g) Vide Geomet. Analytic. Cap. IV. § 21. not. *d*.

(h) Hoc Problema Septimum est Geometriæ Analyticæ, ubi resolutionem ejus, explicatiùs longè quàm hic fecit, Newtonus tradidit. Confer etiam Geometr. Analyt. C. IV. § 13.

(i) Et Tironum captui magis accommodata in Geometriâ Analyticâ, post Problema septimum.

PROP.

PROP. III. THEOR. I.

Prop. III. & IV.

Si pro abscissâ AB, & areâ AE, seu AB × I, promiscuè scribatur z; & si pro $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta}$ + &c. scribatur R: sit autem area curvæ $z^{\theta}R^{\lambda}$, erit ordinatim applicata BC æqualis

$$\theta e + \overline{\theta + \lambda\eta} \times fz^{\eta} + \overline{\theta + 2\lambda\eta} \times gz^{2\eta} + \overline{\theta + 3\lambda\eta} \times hz^{3\eta} + \&c. \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}.$$

Demonstratio.

Nam si sit $z^{\theta}R^{\lambda} = v$, erit (per Prop. I.) $\theta\dot{z}z^{\theta-1}R^{\lambda} + \lambda z^{\theta}\dot{R}R^{\lambda-1} = \dot{v}$. Pro R^{λ}, in primo æquationis termino, & z^{θ}, in secundo, scribe $RR^{\lambda-1}$ & $zz^{\theta-1}$; & fiet $\theta\dot{z}R + \lambda z\dot{R}$ in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1} = \dot{v}$. Erat autem $R = e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta}$ + &c. et inde (per Prop. I.) fit $\dot{R} = \eta f\dot{z}z^{\eta-1} + 2\eta g\dot{z}z^{2\eta-1} + 3\eta h\dot{z}z^{3\eta-1}$ + &c. quibus substitutis, & scriptâ BE, seu I, pro $\dot{z}$, fiet

$$\theta e + \overline{\theta + \lambda\eta} \times fz^{\eta} + \overline{\theta + 2\lambda\eta} \times gz^{2\eta} + \overline{\theta + 3\lambda\eta} \times hz^{3\eta} + \&c. \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1} = \dot{v} = BC.$$

Q. E. D.

PROP. IV. THEOR. II.

Si Curvæ abscissa AB sit z, & si pro $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}$ + &c. scribatur R, & pro $k + lz^{\eta} + mz^{2\eta}$ + &c. scribatur S; sit autem Area Curvæ $z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}$: erit ordinatim applicata BC æqualis

$$\left.\begin{array}{l} \theta ek + \overline{\theta + \lambda\eta} \times fkz^{\eta} + \overline{\theta + 2\lambda\eta} \times gkz^{2\eta} \ldots * \ldots\ldots\ldots * \ldots \\ + \overline{\theta + \mu\eta} \times elz^{\eta} + \overline{\theta + \lambda\eta + \mu\eta} \times flz^{2\eta} + \overline{\theta + 2\lambda\eta + \mu\eta} \times glz^{3\eta} \ldots * \ldots \\ + \overline{\theta + 2\mu\eta} \times emz^{2\eta} + \overline{\theta + \lambda\eta + 2\mu\eta} \times fmz^{3\eta} + \overline{\theta + 2\lambda\eta + 2\mu\eta} \times gmz^{4\eta} \end{array}\right\} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$$

Demonstratur ad modum propositionis superioris (k).

P R O P.

(k) PROP. IV. EXPLICATIUS ENUNTIATA ET DEMONSTRATA.

Si curvæ abscissæ AB sit z, et si pro $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} + iz^{4\eta} +$, scribatur R, et pro $k + lz^{\eta} + mz^{2\eta} + nz^{3\eta} + pz^{4\eta} +$, scribatur S, sitque Area curvæ $z^{\theta}.R^{\lambda}.S^{\mu}$: erit Ordinata BC æqualis rectæ hoc symbolo designatæ

$\theta ek +$

Prop. V.

PROP. V. THEOR. III.

Si Curvæ abſciſſa AB ſit z, & pro $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} +$ &c. ſcribatur R: ſit autem ordinatim applicata $z^{\theta-1}\,\mathrm{R}^{\lambda-1} \times \overline{a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + dz^{3\eta} + \&c.}$ & ponatur $\frac{\theta}{\eta} = r$, $r + \lambda = s$, $s + \lambda = t$, $t + \lambda = v$, &c.

$$\text{Erit area} = z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda} \text{ in } + \frac{\frac{1}{\eta}a}{re}$$

$$+ \frac{\frac{1}{\eta}b - sf\mathrm{A}}{\overline{r+1}\times e}\,z^{\eta}$$

$$+ \frac{\frac{1}{\eta}c - \overline{s+1}\times f\mathrm{B} - tg\mathrm{A}}{\overline{r+2}\times e}\,z^{2\eta}$$

$$+ \frac{\frac{1}{\eta}d - \overline{s+2}\times f\mathrm{C} - \overline{t+1}\times g\mathrm{B} - vh\mathrm{A}}{\overline{r+3}\times e}\,z^{3\eta}$$

$$+ \frac{-\overline{s+3}\times f\mathrm{D} - \overline{t+2}\times g\mathrm{C} - \overline{v+1}\times h\mathrm{B}}{\overline{r+4}\times e}\,z^{4\eta}$$

$$+ \&c.$$

Ubi

DEMONSTRATIO.

$$\left.\begin{array}{lllll}
\theta k & +\theta \times fkz^{\eta} & +\theta \times gkz^{2\eta} & +\theta \times hkz^{3\eta} & +\theta \times ikz^{4\eta} \\
 & +\lambda\eta & +2\lambda\eta & +3\lambda\eta & +4\lambda\eta \\
 & +\theta \times elz^{\eta} & +\theta \times flz^{2\eta} & +\theta \times glz^{3\eta} & +\theta \times hlz^{4\eta} \\
 & +\mu\eta & +\lambda\eta & +2\lambda\eta & +3\lambda\eta \\
 & & +\mu\eta & +\mu\eta & +\mu\eta \\
 & & +\theta \times emz^{2\eta} & +\theta \times fmz^{3\eta} & +\theta \times gmz^{4\eta} \\
 & & +2\mu\eta & +\lambda\eta & +2\lambda\eta \\
 & & & +2\mu\eta & +2\mu\eta \\
 & & & +\theta \times enz^{3\eta} & +\theta \times fnz^{4\eta} \\
 & & & +3\mu\eta & +\lambda\eta \\
 & & & & +3\mu\eta \\
 & & & & +\theta \times epz^{4\eta} \\
 & & & & +4\mu\eta
\end{array}\right\} \times \mathrm{Z}^{\theta-1}.\mathrm{R}^{\lambda-1}.\mathrm{S}^{\mu-1}.$$

D E M O N S T R A T I O.

Ponatur $z^{\theta}.\mathrm{R}^{\lambda}.\mathrm{S}^{\mu} = u$. Erit igitur (Per Prop. 1.)

$$\theta z^{\theta-1}\dot{z}\,\mathrm{R}^{\lambda}\mathrm{S}^{\mu} + \lambda z^{\theta}.\mathrm{R}^{\lambda-1}\dot{\mathrm{R}}\,\mathrm{S}^{\mu} + \mu z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda}\mathrm{S}^{\mu-1}\dot{\mathrm{S}} = \dot{u}.$$

Pro R^{λ} in membro æquationis primo atque tertio, pro z^{θ} in ſecundo et tertio, pro S^{μ} in primo et ſecundo, ſcribantur $\mathrm{R}.\mathrm{R}^{\lambda-1}$, $z.z^{\theta-1}$, $\mathrm{S}.\mathrm{S}^{\mu-1}$. Ita fiet $\overline{\theta\dot{z}\mathrm{RS} + \lambda z\dot{\mathrm{S}}\mathrm{R} + \mu z\dot{\mathrm{R}}\mathrm{S}} \times z^{\theta-1}.\mathrm{R}^{\lambda-1}.\mathrm{S}^{\mu-1}. = \dot{u}$. Erant autem $\mathrm{R} = e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} + iz^{4\eta} +$, et $\mathrm{S} = k + lz^{\eta} + mz^{2\eta} + nz^{3\eta} + pz^{4\eta} +$. Quare (per Prop. 1.) $\dot{\mathrm{R}} = \eta fz^{\eta-1}\dot{z} + 2\eta gz^{2\eta-1}\dot{z} + 3\eta hz^{3\eta-1}\dot{z} + 4\eta iz^{4\eta-1}\dot{z} +$; et $\dot{\mathrm{S}} = \eta lz^{\eta-1}\dot{z} + 2\eta mz^{2\eta-1}\dot{z} + 3\eta nz^{3\eta-1}\dot{z} + 4\eta pz^{4\eta-1}\dot{z} +$. Ex hiſce verò per formulam generalem noſtram multiplicationis primam, in Logiſticâ Infinitorum traditam, efficietur.

RS =

Ubi A, B, C, D, &c. denotant totas coefficientes datas terminorum singulorum in serie cum signis suis + & −, nempe Prop. V.

A primi termini coefficientem $\dfrac{\frac{1}{\eta}a}{re}$

B secundi termini coefficientem $\dfrac{\frac{1}{\eta}b - sfA}{\overline{r+1} \times e}$

C tertii termini coefficientem $\dfrac{\frac{1}{\eta}c - \overline{s+1} \times fB - tgA}{\overline{r+2} \times e}$

Et sic deinceps.

Demonstratio.

Sunto juxta propositionem tertiam.

$$\begin{array}{l|c|l}
\textrm{Curvarum Ordinatæ} & & \textrm{Areæ} \\
1.\ \theta eA + \theta \times fAz^{\eta} + \theta \times gAz^{2\eta} + \theta \times hAz^{3\eta}\ \&c. & & Az^{\theta}R^{\lambda} \\
\quad\quad\quad\ \ {+\lambda\eta} \quad\quad\ \ {+2\lambda\eta} \quad\quad\ \ {+3\lambda\eta} & & \\
2.\ \ldots + \overline{\theta + \eta} \times eBz^{\eta} + \overline{\theta+\eta} \times fBz^{2\eta} + \overline{\theta+\eta} \times gBz^{3\eta}\ \&c. & \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1} & Bz^{\theta+\eta}R^{\lambda} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\ \ {+\lambda\eta} \quad\quad\ \ {+2\lambda\eta} & & \\
3.\ \ldots\ldots + \overline{\theta + 2\eta} \times eCz^{2\eta} + \overline{\theta + 2\eta} \times fCz^{3\eta}\ \&c. & & Cz^{\theta+2\eta}R^{\lambda} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\ {+\lambda\eta} & & \\
4.\ \ldots\ldots\ldots\ldots + \overline{\theta + 3\eta} \times eDz^{3\eta}\ \&c. & & Dz^{\theta+3\eta}R^{\lambda}
\end{array}$$

Et si summa ordinatarum ponatur æqualis ordinatæ $a + bz^{\eta} + cz^{2\eta}$

$$RS = ek \begin{array}{l} +el \\ +fk \end{array} z^{\eta} \begin{array}{l} +em \\ +fl \\ +gk \end{array} z^{2\eta} \begin{array}{l} +en \\ +fm \\ +gl \\ +hk \end{array} z^{3\eta} \begin{array}{l} +ep \\ +fn \\ +gm \\ +hl \\ +ik \end{array} z^{4\eta} +,$$ Prop. IV.

$$\textrm{Et } \dot{R}S = \eta fk . z^{\eta-1} \begin{array}{l} +\eta fl \\ +2\eta gk \end{array} z^{2\eta-1} \begin{array}{l} +\eta fm \\ +2\eta gl \\ +3\eta hk \end{array} z^{3\eta-1} \begin{array}{l} +\eta fn \\ +2\eta gm \\ +3\eta hl \\ +4\eta ik \end{array} z^{4\eta-1} +, \times \dot{z}$$

$$\textrm{Et } \dot{S}R = \eta lez^{\eta-1} \begin{array}{l} +\eta lf \\ +2\eta me \end{array} z^{2\eta-1} \begin{array}{l} +\eta lg \\ +2\eta mf \\ +3\eta ne \end{array} z^{3\eta-1} \begin{array}{l} +\eta lh \\ +2\eta mg \\ +3\eta nf \\ +4\eta pe \end{array} z^{4\eta-1} +, \times \dot{z}$$

Et hisce seriebus pro tribus illis RS, $\dot{R}S$, $\dot{S}R$, in æquationem modò expositam $\overline{\theta\dot{z}RS + \lambda z\dot{R}S + \mu z\dot{S}R} \times z^{\theta-1}.R^{\lambda-1}.S^{\mu-1} = \dot{x}$ ritè substitutis, efficietur

PROP. V. $cz^{2\eta}+dz^{3\eta}+$ &c. in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, ſumma arearum $z^{\theta}R^{\lambda}$ in $A+Bz^{\eta}+Cz^{2\eta}+Dz^{3\eta}+$ &c. æqualis erit areæ curvæ cujus iſta eſt ordinata. Æquentur igitur ordinatarum termini correſpondentes,

$$\text{et fiet } a=\theta eA,$$

$$b=\overline{\theta+\lambda\eta}\times fA+\overline{\theta+\eta}\times eB,$$

$$c=\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gA+\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times fB+\overline{\theta+2\eta}\times eC,$$

&c (l).

$$\text{et inde } A=\frac{a}{\theta e}$$

$$B=\frac{b-\overline{\theta+\lambda\eta}\times fA}{\overline{\theta+\eta}\times e}$$

$$C=\frac{c-\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gA-\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times fB}{\overline{\theta+2\eta}\times e}$$

Et ſic deinceps in infinitum (m).

Pone jam $\frac{\theta}{\eta}=r$, $r+\lambda=s$, $s+\lambda=t$, &c. et in areâ $z^{\theta}R^{\lambda}$ in $A+Bz^{\eta}+Cz^{2\eta}+Dz^{3\eta}+$ &c. ſcribe ipſorum A, B, C, &c. valores inventos, & prodibit ſeries propoſita. Q. E. D.

1. Et notandum eſt, quòd Ordinata omnis duobus modis in ſeriem reſolvitur. Nam index η vel affirmativus eſſe poteſt vel negativus.

Proponatur

$$\theta\times ek+\begin{array}{l}+\theta\times el\\+\theta\times fk\\+\lambda\eta\times fk\\+\mu\eta\times le\end{array}z^{\eta}+\begin{array}{l}+\theta\times em\\+\theta\times fl\\+\theta\times gk\\+\lambda\eta\times fl\\+2\lambda\eta\times gk\\+\mu\eta\times lf\\+2\mu\eta\times me\end{array}z^{2\eta}+\begin{array}{l}+\theta\times en\\+\theta\times fm\\+\theta\times gl\\+\theta\times hk\\+\lambda\eta\times fm\\+2\lambda\eta\times gl\\+3\lambda\eta\times hk\\+\mu\eta\times lg\\+2\mu\eta\times mf\\+3\mu\eta\times ne\end{array}z^{3\eta}+\begin{array}{l}+\theta\times ep\\+\theta\times fn\\+\theta\times gm\\+\theta\times hl\\+\theta\times ik\\+\lambda\eta\times fn\\+2\lambda\eta\times gm\\+3\lambda\eta\times hl\\+4\lambda\eta\times ik\\+\mu\eta\times lh\\+2\mu\eta\times mg\\+3\mu\eta\times nf\\+4\mu\eta\times pe\end{array}z^{4\eta}+,\times z^{\theta-1}.R^{\lambda-1}.S^{\mu-1}\times\dot{z}$$

$$=\dot{s}=BC\times\dot{z}.$$

Unde omnibus ab illâ $\dot{z}$ diviſis, et ritè ordinatis, veniet ſymbolum rectæ BC, quod initio poſuimus. Q. E. D.

(l) $d=\overline{\theta+3\lambda\eta}\times hA+\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\times gB+\overline{\theta+2\eta+\lambda\eta}\times fC+\overline{\theta+3\eta}\times eD$.

(m) Nimirum $D=\dfrac{\frac{1}{\eta}d-\overline{s+2}fC-\overline{t+1}gB-ehA}{\overline{r+3}e}$.

Et

Proponatur Ordinata $\frac{3k-lzz}{zz\sqrt{kz-lz^3+mz^4}}$: hæc vel ſic ſcribi poteſt Prop. V.
$z^{-\frac{1}{2}} \times \overline{3k-lz^2} \times \overline{k-lz^2+mz^3}\big|^{-\frac{1}{2}}$; vel ſic $z^{-2} \times \overline{-l+3kz^{-2}} \times \overline{m-lz^{-1}+kz^{-3}}\big|^{-\frac{1}{2}}$

In caſu priore eſt $a=3k$, $b=0$, $c=-l$, $e=k$, $f=0$, $g=-l$, $h=m$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $\eta=1$, $\theta-1=-\frac{5}{2}$, $\theta=-\frac{3}{2}=r$, $s=-1$, $t=-\frac{1}{2}$, $v=0$.

In poſteriore eſt $a=-l$, $b=0$, $c=3k$, $e=m$, $f=-l$, $g=0$, $h=k$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $\eta=-1$, $\theta-1=-2$, $\theta=-1$, $r=1$, $s=1\frac{1}{2}$, $t=2$, $v=2\frac{1}{2}$. Tentandus eſt caſus uterque. Et ſi ſerierum alterutra, ob terminos tandem deficientes, abrumpitur ac terminatur, habebitur area curvæ in terminis finitis. Sic in exempli hujus priore caſu, ſcribendo in ſerie valores ipſorum a, b, c, e, f, g, h, λ, θ, r, s, t, v, termini omnes poſt primum evaneſcunt in infinitum, & area curvæ prodit $-2\sqrt{\frac{k-lz^2+mz^3}{z^3}}$. Et hæc area ob ſignum negativum adjacet abſciſſæ ultra ordinatam productæ. Nam area omnis affirmativa adjacet tam abſciſſæ quàm ordinatæ; negativa verò cadit ad contrarias partes ordinatæ, & adjacet abſciſſæ productæ, manente ſcilicet ſigno ordinatæ. Hoc modo ſeries alterutra, & nonnunquam utraque, ſemper terminatur, & finita evadit, ſi curva

Et ſi multinomio literâ a deſignato accedat novum nomen $iz^{4\eta}$, et multinomio $a+bz^{\eta}+$, novum etiam nomen $\iota z^{4\eta}$, erit

$$\iota = \overline{\theta+4\lambda\eta} \times i\mathrm{A} + \overline{\theta+\eta+3\lambda\eta}\,h\mathrm{B} + \overline{\theta+2\eta+2\lambda\eta}\,g\mathrm{C} + \overline{\theta+3\eta+\lambda\eta}\,f\mathrm{D} + \overline{\theta+4\eta}\,e\mathrm{E}.$$

Et $\mathrm{E} = \frac{\frac{1}{\eta}\iota - \overline{s+3}\,f\mathrm{D} - \overline{t+2}\,g\mathrm{C} - \overline{v+1}\,h\mathrm{B} - wi\mathrm{A}}{\overline{r+4}\,e}$, ſicut in ſuis etiam ad hunc locum commentariis rectè admonuit J. Stewart Abredonenſis.

Newtonus autem in numeratore coefficientis E membrum primum, $\frac{1}{\eta}\iota$, et ultimum, $wi\mathrm{A}$, omiſit.

Quod eo conſilio eum feciſſe arbitror, ut inſinuaret, formulis illis, $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+$, $a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+$, non ſeries neceſſariò infinitas deſignari, ſed multinomia Algebraica, ſive infinita ſive finita quotvis nominum: et quando illa finita ſint, in areæ formulà literas illas quæ nominum, illis in quibus formulæ $e+fz^{\eta}+$, $a+bz^{\eta}+$, ſubſiſtant, relatiorum coefficientes deſignarent, nihilo ſingulatim æquandas eſſe. Et cujuſque coefficientis eam quantitatem ſumendam, quæ ex membris reliquis conflatur, quæ literis illis, nihilo æquatis, non ſunt implicata. Ut ſi formulæ illæ $e+fz^{\eta}+$, $a+bz^{\eta}+$, in quarto quæque nomine ſubſiſtant; minimè quidem ex eo conſequetur, Areæ quoque formulam in nomine quarto neceſſariò terminatum iri. Quin etiam evenire poteſt, ut illa uſque proferpat. Literæ vero ι, i, et aliæ omnes, quibus formulæ utriuſque, $e+fz^{\eta}+$, $a+bz^{\eta}+$, ultra quartum nomen productæ, coefficientes indicarentur, nihilo ſingulatim ſunt æquandæ. Unde coefficiens E formam induet, quali eam Newtonus protulit, membris $\frac{1}{\eta}\iota$, $wi\mathrm{A}$ è medio ſublatis. Et nominis proximi coefficiens F erit $\frac{-\overline{s+4}\,f\mathrm{E} - \overline{t+3}\,g\mathrm{D} - \overline{v+2}\,h\mathrm{C}}{\overline{r+5}\,e}$.

PROP. V. geometricè quadrari poteſt. At ſi curva talem quadraturam non admittit, ſeries utraque continuabitur in infinitum, & earum altera converget, & aream dabit approximando; præterquam ubi r (propter aream infinitam) vel nihil eſt, vel numerus integer & negativus, vel ubi $\frac{\varepsilon^{\eta}}{e}$ æqualis eſt unitati. Si $\frac{\varepsilon^{\eta}}{e}$ minor eſt unitate, converget ſeries in quâ index η affirmativus eſt: ſin $\frac{\varepsilon^{\eta}}{e}$ unitate major eſt, converget ſeries altera. Si in uno caſu area adjacet abſciſſæ ad uſque ordinatam ductæ, in altero adjacet abſciſſæ ultra ordinatam productæ.

2. Nota inſuper, quòd ſi Ordinata contentum eſt ſub factore rationali

(p) NIMIRUM calculi ita fient ſimpliciſſimi, ſi Ordinata QR^{η} ad eam formam revocetur, quâ latus partis irrationalis R^{η} non metiatur partem rationalem. Si igitur R metiatur Q, metiendo faciat A. Erit igitur $Q = AR$; et ordinata QR^{η} in $AR^{\eta+1}$ migraverit. Si R^{2} metiatur Q, metiendo faciat B. Erit $Q = B.R^{2}$ et ordinata $Q.R^{\eta}$ in $B.R^{\eta+2}$ migraverit. Denique ſi R^{n} metiatur Q, metiendo faciat P. Erit $Q = PR^{n}$ et ordinata $Q.R^{\eta}$ in $P.R^{\eta+n}$ migraverit.

(q) Viâ in Arithmeticâ Univerſali traditâ. Cap. VII. Sect. 2.

(r) HUJUS demonſtratio hic nititur propoſitione.

THEOREMA.

DE FLUXIONIBUS FLUENTIUM *Si quantitas fracta rationalis fluat, ejus fluxio quantitas erit fracta; cujus, minimis ſcilicet quantitatibus expoſitæ, denominator vel quadratus erit, vel ex poteſtatibus cubicis, vel ultra-cubicis etiam, cum quadraticis compoſitus.*

FLUAT quantitas fracta algebraicè rationalis $\frac{X}{Y}$, hiſce quidem, X, Y, minimis expoſita. Hujus fluxio quantitas erit fracta $\frac{Y\dot{X} - X\dot{Y}}{Y^{2}}$: quæ, ſi quantitates $Y\dot{X} - X\dot{Y}$, Y^{2} inter ſe ſint primæ, hiſquidem minimis expoſita erit, et denominatorem habet Y^{2} quadratum. Quantitatum autem, $Y\dot{X} - X\dot{Y}$ et Y^{2}, ſi non ſint inter ſe primæ, inveniatur maximus diviſor communis algebraicus, qui literâ Z deſignetur. Quantitas Z quantitates $Y\dot{X} - X\dot{Y}$, Y^{2} dividens faciat V, S. Hiſce igitur V, S fluxio quantitatis $\frac{X}{Y}$ minimis exponetur. Nempe hoc modo $\frac{V}{S}$. Dico denominatorem S ex poteſtatibus cubicis, vel etiam ultra-cubicis cum aliis quadraticis, compoſitum eſſe.

Quantitas Z vel prima erit, vel ex primis compoſita. Sit primùm prima. Cùm igitur quantitas prima Z quantitatem quadraticam Y^{2} metiatur, radicem ejus Y eadem Z metietur (Elem. VII. 32.) Quare Z metietur $Y\dot{X}$. Sed metitur quoque hujus $Y\dot{X}$, aliuſque $X\dot{Y}$ differentiam Quare et aliam illam $X\dot{Y}$ metitur. Sed non metietur X. Nam ſi metiatur illam, cùm oſtenſum ſit, eandem Z quantitatem etiam Y metiri, duæ X, Y non erunt inter ſe primæ. Sed primas inter ſe poſuimus. Quantitas igitur prima Z quæ non metitur X, cùm tamen $X\dot{Y}$ metiatur, neceſſariò metietur $\dot{Y}$ (Elem. VII. 32.) Metitur igitur Z illam $\dot{Y}$. Et oſtenſum eſt metiri Y. Ponatur igitur Z^{n} poteſtas illius Z, elatiſſima earum quæ fluentem Y metiantur. Jam

rationali Q & factore furdo irreducibili R^{π}, & factoris furdi latus R non dividit factorem rationalem Q; erit $\lambda - 1 = \pi$, & $R^{\lambda-1} = R^{\pi}$. Sin factoris furdi latus R dividit factorem rationalem femel, erit $\lambda - 1 = \pi + 1$, & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+1}$: fi dividit bis, erit $\lambda - 1 = \pi + 2$, & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+2}$: fi ter, erit $\lambda - 1 = \pi + 3$, & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+3}$: & fic deinceps (n). PROP. V.

3. Si Ordinata eft fractio rationalis irreducibilis cum denominatore ex duobus vel pluribus terminis compofito: refolvendus eft denominator in divifores fuos omnes primos (o). Et fi divifor fit aliquis cui nullus alius eft æqualis, curva quadrari nequit (p): fin

cùm z^n metiatur fluentem Y, quantitatem quidem quadraticam Y^2 metietur quadratica z^{2n}, et fluxionem $\dot{Y}$ quantitas z^{n-1} metietur. Sed oftenfum eft z metiri fluxionem $\dot{Y}$. Quare index ille $n-1$ non minor erit unitate, neque fanè major. Non minor: quoniam fi minor effet, quantitas z^{n-1} non effet elatiffima in poteftatibus quantitatis z quæ fluxionem $\dot{Y}$ metirentur: neque igitur z^n elatiffima quæ metiretur fluentem Y: quam tamen elatiffimam pofuimus. Non major: quoniam fi major effet unitate index ille $n-1$, quantitas prima z non effet duarum $Y\dot{X} - X\dot{Y}$, et Y^2 maximus divifor communis. Sed maximum pofuimus. Quare $n-1=1$. Ergo $n=2$. Et $2n=4$. Quantitas igitur z^4 metietur quantitatem Y^2. Metiatur, et faciat T. Ut fit $Tz^4 = Y^2$. Sed $s \times z = Y^2$. Quare $Tz^4 = s \times z$, et $Tz^3 = s$. Quantitatis igitur fractæ, $\frac{V}{S}$, denominator, S, compofitus eft ex poteftate cubicâ primæ quantitatis z, cum aliâ quantitate T. FRACTARUM RATIONALIUM.

Sed non fit z quantitas prima. Ex primis igitur erit compofita. Refolvatur igitur z in divifores fuos primos α, β, γ. Jam cùm α metiatur z, et z metiatur Y^2, idcirco illa α eandem Y^2 metietur. Ex eo autem quòd quantitas prima α quadraticam Y^2 metiatur, efficietur eandem α tum fimplicem Y tum fluxionem $\dot{Y}$ metiri. Id enim iifdem planè argumentis obtinendum erit, quibus priùs idem de quantitate z evicimus, cùm illam primam pofuiffemus. Et pari ratione alii quantitatis z divifores primi, β, γ, fluentem Y et fluxionem $\dot{Y}$ fingulatim metientur. Quantitatum α, β, γ ponantur α^{π}, β^{ρ}, γ^{σ} poteftates elatiffimæ, quæ quantitatem Y fingulatim metiantur. Fluxionem igitur $\dot{Y}$ poteftates, $\alpha^{\pi-1}$, $\beta^{\rho-1}$, $\gamma^{\sigma-1}$, fingulatim metientur, neque illis ullæ quidem elatiores: quantitatem verò quadraticam Y^2 poteftates $\alpha^{2\pi}$, $\beta^{2\rho}$, $\gamma^{2\sigma}$ fingulatim metientur. Jam cùm quantitatem Y metiantur primarum, α, β, γ, poteftates illæ α^{π}, β^{ρ}, γ^{σ} fingulatim, factum quidem ex poteftatum illarum omnium mutuâ in fe multiplicatione, $\alpha^{\pi} \times \beta^{\rho} \times \gamma^{\sigma}$, eandem Y metietur. (Hoc autem demonftratione mox firmabimus.) Et factum $\alpha^{\pi-1} \times \beta^{\rho-1} \times \gamma^{\sigma-1}$, fluxionem $\dot{Y}$ metietur, nimirum, quam illæ $\alpha^{\pi-1}$, $\beta^{\rho-1}$, $\gamma^{\sigma-1}$ primarum poteftates fingulatim. Quantitatem denique quadraticam Y^2 factum $\alpha^{2\pi} \times \beta^{2\rho} \times \gamma^{2\sigma}$ metietur. Hinc efficitur quantitatem $\alpha^{\pi-1} \times \beta^{\rho-1} \times \gamma^{\sigma-1}$ duarum $Y\dot{X} - X\dot{Y}$ et Y^2 communem effe diviforem; et maximum quidem illum, qui ex poteftatibus primarum α, β, γ compofitus communis effe poteft. Major enim fi quis effet, eum ex elatioribus poteftatibus componi oporteret. Ita verò fluxionem $\dot{Y}$ poteftates quantitatum α, β, γ, elatiores quàm funt illæ $\alpha^{\pi-1}$, $\beta^{\rho-1}$, $\gamma^{\sigma-1}$ fingulatim metirentur. Cujus contrarium oftendimus. Quantitatum igitur $\dot{Y}X - X\dot{Y}$, Y^2 erit illa $\alpha^{\pi-1} \times \beta^{\rho-1} \times \gamma^{\sigma-1}$ divifor communis maximus qui ex poteftatibus illarum α, β, γ componi poterit. Eft verò z duarum $Y\dot{X} - X\dot{Y}$, Y^2 divifor maximus communis, et ex illarum α, β, γ poteftatibus totus eft compofitus.

Quare z facto illi $\alpha^{\pi-1} \times \beta^{\rho-1} \times \gamma^{\sigma-1}$ æqualis eft. Sed cùm z dividens Y^2 fecerit s, erit sz =

PROP. V. ſin duo vel plures ſint diviſores æquales, rejiciendus eſt eorum unus; & ſi adhuc alii duo vel plures ſint ſibi mutuò æquales, & prioribus

DE FLUXIONIBUS FLUENTIUM

$sz = Y^2$, hoc eſt $s \times \alpha^{n-1} \times \beta^{p-1} \times \gamma^{q-1} = Y^2$. Sed illam Y^2 hæc $\alpha^{2n} \times \beta^{2p} \times \gamma^{2q}$ metitur (oſtenſum enim.) Metiendo faciat T. Ut ſit $T \times \alpha^{2n} \times \beta^{2p} \times \gamma^{2q} = Y^2$. Ergo $T \times \alpha^{2n} \times \beta^{2p} \times \gamma^{2q} = s \times \alpha^{n-1} \times \beta^{p-1} \times \gamma^{q-1}$. Ac propterea $T \times \alpha^{n+1} \times \beta^{p+1} \times \gamma^{q+1} = s$. Quantitatis igitur fractæ $\frac{V}{s}$, quæ fluentis fractæ, $\frac{X}{Y}$, fluxio eſt, minimis expoſita; hujus denominator s compoſitus eſt ex quantitâte quâdam per literam T deſignata, et primarum α, β, γ poteſtatibus α^{n+1}, β^{p+1}, γ^{q+1}; quæ ſanè cubicis haud erunt depreſſiores. Nam cùm illæ α^{n-1}, β^{p-1}, γ^{q-1} ſint primarum α, β, γ poteſtates elatiſſimæ, quæ fluxionem $\dot{Y}$ metiantur, et nſenſum ſit ipſas α, β, γ illum $\dot{Y}$ metiri, indicum illorum, $n-1$, $p-1$, $q-1$, nullus quidem unitate minor erit. Illorum igitur $n+1$, $p+1$, $q+1$, nullus ternario minor. Poteſtates igitur α^{n+1}, β^{p+1}, γ^{q+1} cubicis non erunt depreſſiores.

Quantitatis igitur fractæ $\frac{V}{s}$, quæ facta eſt ex illâ $\frac{Y\dot{X} - X\dot{Y}}{Y^2}$, illas $Y\dot{X} - X\dot{Y}$, Y^2 dividendo à z, quem maximum illæ communem diviſorem habent; hujus inquam quantitatis fractæ, ſic minimis expoſitæ, denominator s, in caſu utroque. ſive z prima fuerit ſive compoſita, totus erit compoſitus ex quantitate quâdam per literam T deſignatâ, et poteſtatibus quibuſdam, ſive ipſius z, ſive primorum ipſius z diviſorum, quæ cubicis non erunt depreſſiores.

JAM verò dico illam T ex poteſtatibus quadraticis totam eſſe compoſitam. Primùm enim, ſi z prima ſit, erit z^2 quantitatis z poteſtas, earum quæ Y metiuntur elatiſſima (per ea quæ in caſu primo jam antè oſtenſa ſunt.) Metiatur igitur z^2 illam Y, et faciat t. Ut ſit $z^2 \times t = Y$. Erit igitur $z^4 \times t^2 = Y^2$. Sed poſitum eſt $z^4 \times T = Y^2$. Quare $T = t^2$.

In altero caſu, quando z eſt quantitas compoſita, metiatur $\alpha^n \times \beta^p \times \gamma^q$ fluentem Y et t faciat. Ut ſit $\alpha^n\beta^p\gamma^q \times t = Y$; erit igitur $\alpha^{2n}\beta^{2p}\gamma^{2q} \times t^2 = Y^2$. Sed poſitum erat $T \times \alpha^{2n}\beta^{2p}\gamma^{2q} = Y^2$. Unde $T = t^2$.

In caſu igitur utroque quantitas T quadraticæ t^2 æqualis erit. Unde ſi t prima ſit nihilominus T quadratica erit. Si t non ſit prima, reſolvatur ea in diviſores ſui primos, π, ρ, σ; ut ſit $t = \pi \times \rho \times \sigma$. Erit igitur t^2 ſive T, huic facto $\pi^2 \times \rho^2 \times \sigma^2$ æqualis. Quantitas igitur T ex quadraticis tota componetur; pluribus quidem eis, ſi t ſit compoſita; ſi prima ſit t, ex unâ illâ t^2.

Quantitatis igitur fractæ $\frac{V}{s}$ denominator s, quem oſtendimus ex quantitate T & poteſtatibus cubicis, vel ultra-cubicis, totum eſſe compoſitum, is quidem ex cubicis quibuſdam, vel ultrà-cubicis, et aliis quadraticis totus componetur. Q. E. D.

3. ILLUD modò demonſtratione nobis firmandum eſt, quod aſſumpſimus, factum ex quantitatum primarum poteſtatibus, quæ aliam aliquam ſingulatim metiantur, id eandem metiri.

Sint igitur quantitates duæ primæ α, β quæ aliam A metiantur. Et ſint α^n, β^p illarum α, β poteſtates quæ illam A ſingulatim metiantur. Dico $\alpha^n \times \beta^p$ eandem A metiri. Metiatur enim α^n illam A, et faciat a. Ut ſit $\alpha^n \times a = A$. Jam cùm β^p metiatur A, metitur certè $\alpha^n \times a$. Sed β^p non metitur α^n, ad quam utique prima eſt (Elem. IX 13.) Metitur igitur illam a. Nam ſi duæ quantitates inter ſe multiplicatæ aliam fecerint, factam verò alia aliqua metiatur, ea, ſi ad alteram initio poſitarum prima ſit, alteram metietur. Hoc enim iiſdem planè argumentis oſtendi poſſit, quibus evincitur ſecunda à triceſimâ libri ſeptimi Elementorum. Igitur β^p, cùm illam A metiatur è duabus, α^n, a, factam, et ad α^n prima ſit, metietur alteram a. Sed $\beta^p : a = \alpha^n\beta^p : \alpha^n a$. Quare $\alpha^n\beta^p$ metietur $\alpha^n a$; hoc eſt ipſam A metietur. Q. E. D.

A

α β

a

Sint jam tres primæ quantitates α, β, γ, quarum poteſtates α^n, β^p, γ^q quantitatem A ſingulatim

prioribus inæquales, rejiciendus eſt etiam eorum unus; & ſic in aliis omnibus æqualibus, ſi adhuc plures ſint: deinde diviſor qui relinquitur, vel contentum ſub diviſoribus omnibus qui relinquuntur, PROP. V.

ſingulatim metiantur. Dico $\alpha^n \times \beta^p \times \gamma^q$ eandem metiri. Metiatur α^n quantitatem A et faciat a. FRACTARUM RATIONALIUM.

A

α β γ

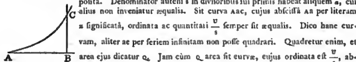
a

Jam β^p metietur a, id enim ut priùs oſtendetur. Sed pari ratione γ^q eandem a metietur. Quare factum etiam $\beta^p \times \gamma^q$ metietur eandem a, per caſum priorem. Sed $\beta^p \times \gamma^q : a = \alpha^n \times \beta^p \times \gamma^q : \alpha^n a$. Quare $\alpha^n \times \beta^p \times \gamma^q$ metietur $\alpha^n a$; hoc eſt ipſam A metietur.

Et ſimili argumentatione, quoteunque poſitæ fuerint quantitates primæ, veritatem aſſumpti uſque probabimus. Q. E. D.

3. PROPOSITIONE noſtrâ ſic tandem ex omni parte firmatâ, illius ope, veritas ejus, quod à Newtono dictum eſt, manifeſta fiet: Curvam utique, cujus ordinata ſit fracta rationalis, ſi fractæ illius, minimis expoſitæ, denominator in diviſoribus ſui primis ullum habeat, cui alius non inveniatur æqualis, eam curvam non poſſe quadrari: non poſſe utique definitâ quadraturâ, per æquationem Algebraicam, nominibus finitam, exponendâ. Nam per ſeries quidem infinitas nihil obſtat, quo minùs talis etiam curvæ area, propiùs ſaltem quàm pro differentiâ datâ, æſtimari poſſit.

4. SIT enim quantitas fracta rationalis $\frac{v}{s}$, his v, s minimis expoſita: ſignificantibus utique literis v, s, multinomia Algebraica rationalia, ex poteſtatibus ſimplicis alicujus quantitatis z compoſita. Denominator autem s in diviſoribus ſui primis habeat aliquem α, cui alius non inveniatur æqualis. Sit curva ABC, cujus abſciſſâ AB per literam z ſignificatâ, ordinata BC quantitati $\frac{v}{s}$ ſemper ſit æqualis. Dico hanc curvam, aliter ac per ſeriem infinitam non poſſe quadrari. Quadretur enim, et area ejus dicatur Q. Jam cùm Q area ſit curvæ, cujus ordinata eſt $\frac{v}{s}$, abſciſſa z, erit fluxio areæ Q æqualis huic $\frac{v}{s}\dot{z}$. Hoc eſt ſi ponatur $\dot{z} = 1$, erit $\dot{Q} = \frac{v}{s}$. Quantitas igitur Q aut fracta rationalis erit, aut ſeries infinita, ſiquidem fluxionem fractam rationalem habeat. Nam fluxio rationalis à fluente irrationali, ab unâ fluente ſimplici factâ, haud venerit: neque fracta à non fractâ rationali; niſi forte ex ſerie infinitâ. Sit igitur Q, modò eſſe poſſit, quantitas fracta rationalis. Quantitatis igitur fractæ rationalis Q, hujus eſt illa $\frac{v}{s}$, fracta rationalis, fluxio; cujus tamen, minimis quidem illis, v, s, expoſitæ, denominator s, cùm in diviſoribus ſui primis habeat quendam α, cui alius non inveniatur æqualis, certè neque quadratus ille erit, neque ex poteſtatibus cubicis, vel ultra-cubicis aliiſque quadraticis totus quidem compoſitus. Hoc autem abſurdum eſt: pugnat enim cum propoſitione modò oſtenſâ. Non igitur fracta rationalis erit quantitas illa Q. Reſtat ut ſeries infinita ſit Q. Curva igitur ACB, niſi per ſeriem infinitam, non poteſt quadrari. Q. E. D.



5. CÆTERUM fluxiones fractas quaſdam rationales ex ſeriebus infinitis nonnunquam emanare, quod tacitè quidem aſſumpſimus; illud et poſſe fieri, et reverà ſolere, ſatis ut opinor intelligatur vel hujus exemplo, $\frac{\dot{z}}{1+z}$, quæ ex hac ſerie infinitâ, $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 -$, emanârit. Hujus enim ſeriei fluxio erit, $\dot{z} - z\dot{z} + z^2\dot{z} - z^3\dot{z} + z^4\dot{z} -, = \frac{\dot{z}}{1+z}$. Hanc autem æquationem verè poni, ſi aliunde non ſatis notum ſit, ex eo intelligatur, quòd ſeriem $\dot{z} - z\dot{z} + z^2\dot{z} - z^3\dot{z} + z^4\dot{z} -$, in binomium $1 + z$ multiplicando, illa $\dot{z}$ effecta fuerit; nominibus aliis omnibus ipſâ multiplicationis operâ deletis, ut videre eſt:

$\dot{z} - z$

Prop. V. linquuntur, si plures sunt, ponendum est pro R; & ejus quadrati reciprocum R^{-2} pro $R^{\lambda-1}$, (præterquam ubi contentum illud est quadratum vel cubus vel quadrato-quadratum, &c. quo casu ejus latus ponendum est pro R, & potestatis index, 2 vel 3 vel 4, negativè sumptus pro λ,) et Ordinata ad denominatorem R^2 vel R^3 vel R^4 vel R^5 &c. reducenda (q).

4 Ut si Ordinata sit $\frac{z^5+z^4-8z^3}{z^5+z^4-5z^3-z^2+8z-4}$; quoniam hæc fractio irreducibilis est, & denominatoris divisores sunt pares, nempe $z-1$, $z-1$, $z-1$, & $z+2$, $z+2$; rejicio magnitudinis utriusque divisorem unum, & reliquorum $z-1$, $z-1$, $z+2$ contentum, z^3-3z+2, pono pro R; & ejus quadrati reciprocum, $\frac{1}{R^2}$ seu R^{-2}, pro $R^{\lambda-1}$. Dein Ordinatam ad denominatorem, R^2 seu $R^{1-\lambda}$, reduco, & fit $\frac{z^6-9z^4+8z^3}{(z^3-3z+2)^2}$, i. e. $z^3 \times \overline{8-9z+z^3} \times \overline{2-3z+z^3}|^{-2}$. Et inde est $a=8$, $b=-9$, $c=0$, $d=1$, &c. $e=2$, $f=-3$, $g=0$, $h=1$, $\lambda-1=-2$, $\lambda=-1$, $\eta=1$, $\theta-1=3$, $\theta=4=r$, $s=3$, $t=2$, $v=1$. Et his in serie scriptis prodit area $\frac{z^4}{z^3-3z+2}$, terminis omnibus in totâ serie post primum evanescentibus.

5. Si denique Ordinata est fractio irreducibilis, & ejus denominator contentum est sub factore rationali Q & factore surdo irreducibili

$$
\begin{array}{l}
\dot{z}-z\dot{z}+z^2\dot{z}-z^3\dot{z}+z^4\dot{z}- \\
\qquad\qquad 1+z \\
\hline
\qquad z\dot{z}-z^2\dot{z}+z^3\dot{z}-z^4\dot{z}+z^5\dot{z}-, \\
\dot{z}-z\dot{z}+z^2\dot{z}-z^3\dot{z}+z^4\dot{z}-z^5\dot{z}+, \\
\hline
\dot{z} \quad * \quad * \quad * \quad * \quad *
\end{array}
$$

(q) Nimirum si factum è divisoribus relictis neque quadratum fuerit, neque cubus neque ulla denique potestas numero quopiam indicata. Sin fuerit, sit quidem potestas numero n indicata. Tum, facto illo dicto F, jubet Newtonus quantitatem R huic $F^{\frac{1}{n}}$ æqualem sumi. Et ordinatam ad denominatorem R^{n+1} vult reduci. Cùm enim indices λ, $-n$ æquandos dixit, perinde est ac si hos $\lambda-1$, $-n-1$ æquandos dixisset.

(r) Nempe harum præceptionum, sicut earum quæ suprà traduntur (§ 2 & 3.) ea mens est: ut Ordinata, sive illa rationalis sive irrationalis sit, ad denominatorem quàm m*ximè simplicem reducatur. Quod ita plerumque fiet, si quibus modis Newtonus præscripsit, ea tractetur.

( ) Raphsoni in hoc symbolo secutus sum emendationes, quas Stewarto quoque sequi placuit, sed celato Raphsoni nomine. (Vide *the History of Fluxions, &c. by the late Mr. Joseph Raphson, A. M. and R. S. S.* 4to. *London*, 1715, *pag.* 42: et confer *Sir Isaac Newton's two Treatises of the Quadrature of Curves and Analysis by Equations, &c. explained by John Stewart, A. M.*

reducibili R^{π}, inveniendi sunt lateris R divisores omnes primi, & rejiciendus est divisor unus magnitudinis cujusque, & per divisores qui restant, siqui sint, multiplicandus est factor rationalis Q: & si factum æquale est lateri R, vel lateris illius potestati alicui cujus index est numerus integer, esto index ille m, & erit $\lambda-1=-\pi-m$, & $R^{\lambda-1}=R^{-\pi-m}$ (r). PROP. V.

Ut si ordinata sit $\frac{3q^5-q^4x+9q^3x^2-q^2x^3-6qx^4}{\overline{q^2-x^2}\times\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}|^{\frac{1}{3}}}$ (s); quoniam factoris surdi latus, R, seu $q^3+q^2x-qx^2-x^3$, divisores habet $q+x, q+x, q-x$, qui duarum sunt magnitudinum; rejicio divisorem unum magnitudinis utriusque: & per divisorem, $q+x$, qui relinquitur, multiplico factorem rationalem q^2-x^2. Et quoniam factum, $q^3+q^2x-qx^2-x^3$, æquale est lateri R, pono $m=1$, & inde, cùm π sit $\frac{1}{3}$, fit $\lambda-1=-\frac{4}{3}$. Ordinatam igitur reduco ad denominatorem (t) $R^{\frac{4}{3}}$, & fit $x^0\times\overline{3q^6+2q^5x+8q^4x^2+8q^3x^3-7q^2x^4-6qx^5}\times\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}|^{-\frac{4}{3}}$. Unde est $a=3q^6$; $b=2q^5$, &c. $e=q^3$; $f=q^2$, &c. $\theta-1=0$; $\theta=1=\eta$; $\lambda=-\frac{1}{3}$; $r=1$; $s=\frac{2}{3}$; $t=\frac{1}{3}$; $v=0$. Et his in serie scriptis prodit area $\frac{3q^3x+3qx^3}{\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}|^{\frac{1}{3}}}$, terminis omnibus in serie totâ post tertium evanescentibus (u).

P R O P.

A. M. Professor of Math. in the Marischal College, Aberdeen, 4to. London, 1745, *page* 13.) Editio Princeps habuit $\frac{3q^4-q4x+9q'xx-qqx^3-6x^3}{qq-xx\sqrt{\text{cub.}\ q^3+qqx-qxx-x^3}}$. Quod in pejus etiam mutatum Jonesius dedit, hoc modo, $\frac{3q^5-q^4x^4+9q^2x^2-q^2x^3-6x^3}{q^2-x^2\times\overline{q^3+q\,x-qx^2-x^3}|^{\frac{1}{3}}}$. Horum enim utrumque vitiosum esse, ex eo intelligere est, quòd neutrum quidem cum alio congruit, inferiùs exposito, ejusdem ordinatæ symbolo ad denominatorem $R^{\frac{4}{3}}$ reductæ; quod utraque editio, princeps illa, et Jonesii, uno modo protulerunt; quodque eo modo prolatum rectè se habere, signo est indicum series ordine progrediens. Cæterùm vel ante Raphsonum, multo certè ante Stewartum, Harrisius ediderat, $\frac{3q^5-q^4x+9q^3xx-qqx^3-6qx^4}{qq-xx\sqrt[3]{\overline{q^3+qqx-qxx-x^3}|}}$. Rectè quidem omnia, nisi quòd indicem literæ q, in nomine numeratoris tertio, non satis emendaverat. (Vide *Lexicon Technicum, &c. by John Harris, D. D. &c. vol. 2. fol. London,* 1710, sub voce *Quadrature.*)

(t) Sic emendavi, pro $R^{-\frac{4}{3}}$, quod editiones habuere ante hanc nostram omnes, et quod ipse quidem Raphsonus habuit.

(u) STEWARTI in hoc symbolo emendationes sequimur. Editio Jonesii, aliæque numeratorem habuere $3q^2x+3x^3$. Vitiosè. Nam si areæ exquirendæ ponatur hoc symbolum generale, $\frac{x}{\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}|^{\frac{1}{3}}}\times A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+$, coefficientes hisce æquati nibus definientur. $A=3q^3$. $B=0$. $C=3q$. $D=0$. $E=0$. $F=0$.

PROP. VI,[t]

PROP. VI. THEOR. IV.

Si Curvæ abſciſſa AB ſit z, & ſcribantur R pro $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+hz^{3\eta}+$ &c. & S pro $k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+nz^{3\eta}+$ &c. ſit autem ordinatim applicata $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$ in $a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+dz^{3\eta}+$ &c. et ſi terminorum, e, f, g, h, &c. et k, l, m, n, &c. rectangula ſint

ek	*fk*	*gk*	*hk*	&c.
el	*fl*	*gl*	*hl*	&c.
em	*fm*	*gm*	*hm*	&c.
en	*fn*	*gn*	*hn*	&c.

Et ſi rectangulorum illorum coefficientes numerales ſint reſpectivè

$$\tfrac{\theta}{\eta}=r.\ r+\lambda=s.\ s+\lambda=t\ \ t+\lambda=v.\ \text{\&c.}$$

$$r+\mu=\dot{s}.\ s+\mu=\dot{t}.\ t+\mu=\dot{v}.\ v+\mu=\dot{w}.\ \text{\&c.}$$

$$\dot{s}+\mu=\ddot{t}.\ \dot{t}+\mu=\ddot{v}.\ \dot{v}+\mu=\ddot{w}.\ \dot{w}+\mu=\ddot{x}.\ \text{\&c.}$$

$$\ddot{t}+\mu=\dddot{v}.\ \ddot{v}+\mu=\dddot{w}.\ \ddot{w}+\mu=\dddot{x}.\ \ddot{x}+\mu=\dddot{y}.\ \text{\&c.}$$

Area

Hæ autem æquationes è formulâ generali Propoſitionis v. Newtonianæ veniunt, pro literis, a, b, c, &c. e, f, g, &c. $\eta, \theta, \lambda, r, s, t$, &c. eis earum æſtimationibus in formulam illam ſubſtitutis, quas ſymbolum ordinatæ promit.

Itaque coefficiente ſecundâ, E, omnibuſque poſt tertiam c in nihilum abeuntibus, Area erit $\dfrac{x}{\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}|^{\frac{2}{3}}}\times 3q^2+3qx^2=\dfrac{3q^3x+3qx^3}{\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}|^{\frac{2}{3}}}$.

([1]) DEMONSTRATIO PROPOSITIONIS SEXTÆ.

Sunto juxta Propoſitionem quartam.

CURVARUM ORDINATÆ — AREÆ.

$$1^{o}.\ \left.\begin{array}{llll} \theta ekA & \substack{+\theta\\+\lambda\eta}\, fkAz^{\eta} & \substack{+\theta\\+2\lambda\eta}\, gkAz^{2\eta} & \substack{+\theta\\+3\lambda\eta}\, hkAz^{3\eta} \\ \substack{+\theta\\+\mu\eta}\, elAz^{\eta} & \substack{+\theta\\+\lambda\eta\\+\mu\eta}\, flAz^{2\eta} & \substack{+\theta\\+2\lambda\eta\\+\mu\eta}\, glAz^{3\eta} & \text{\&c.} \\ & \substack{+\theta\\+2\mu\eta}\, emAz^{2\eta} & \substack{+\theta\\+\lambda\eta\\+2\mu\eta}\, fmAz^{3\eta} & \\ & & \substack{+\theta\\+3\mu\eta}\, enAz^{3\eta} & \end{array}\right\}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}\ \Bigg|\ Az^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}$$

2°.

Area curvæ erit hæc

$$z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu} \text{ in } + \frac{\frac{1}{n}a}{rek}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}b \begin{matrix}-sfk\\-s'el\end{matrix} A}{\overline{r+1}\times ek} z^{n}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}c \begin{matrix}-\overline{s+1}\times fk\\-\overline{s'+1}\times el\end{matrix} B \begin{matrix}-tgk\\-t'fl\\-t''em\end{matrix} A}{\overline{r+2}\times ek} z^{2n}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}d \begin{matrix}-\overline{s+2}\times fk\\-\overline{s'+2}\times el\end{matrix} C \begin{matrix}-\overline{t+1}\times gk\\-\overline{t'+1}\times fl\\-\overline{t''+1}\times em\end{matrix} B \begin{matrix}-vhk\\-v'gl\\-v''fm\\-v'''en\end{matrix} A}{\overline{r+3}\times ek} z^{3n}$$

$$+ \&c.$$

Ubi A denotat termini primi coefficientem datam, $\frac{\frac{1}{n}a}{rek}$, cum signo suo + vel −; B coefficientem datam secundi; C coefficientem datam tertii; & sic deinceps. Terminorum vero, a, b, c, &c. e, f, g, &c. k, l, m, &c. unus vel plures deesse possunt.

Demonstratur Propositio ad modum præcedentis, & quæ ibi notantur hic obtinent. Pergit autem series talium Propositionum in infinitum, & progressio seriei manifesta est (x).

Demonstratio

2°. $$\left.\begin{matrix}\overline{\theta+\nu n}\,kBz^{n} + \begin{matrix}\overline{\theta+n}\\+\lambda n\end{matrix} fkBz^{2n} + \begin{matrix}\overline{\theta+n}\\+2\lambda n\end{matrix} gkBz^{3n}\\ + \begin{matrix}\overline{\theta+n}\\+\mu n\end{matrix} elBz^{2n} + \begin{matrix}\overline{\theta+n}\\+\lambda n\\+\mu n\end{matrix} flBz^{3n} \;\&c.\\ + \begin{matrix}\overline{\theta+n}\\+2\mu n\end{matrix} emBz^{3n}\end{matrix}\right\} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1} \;\Big|\; Bz^{\theta+n}R^{\lambda}S^{\mu}$$

3°. $$\left.\begin{matrix}\overline{\theta+2\nu n}\,kCz^{2n} + \begin{matrix}\overline{\theta+2n}\\+\lambda n\end{matrix} fkCz^{3n}\\ + \begin{matrix}\overline{\theta+2n}\\+\mu n\end{matrix} elCz^{3n}\end{matrix} \;\&c.\right\} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1} \;\Big|\; Cz^{\theta+2n}R^{\lambda}S^{\mu}$$

4°. $$\overline{\theta+3\nu n}\,ekDz^{3n} \;\&c. \quad \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1} \quad Dz^{\theta+3n}R^{\lambda}S^{\mu}$$

Et si summa Ordinatarum ponatur æqualis ordinatæ $a + bz^{n} + cz^{2n} + dz^{3n} +, \times z^{\theta-1}.R^{\lambda-1}.S^{\mu-1}$, summa arearum $z^{\theta}.R^{\lambda}.S^{\mu} \times A + Bz^{n} + Cz^{2n} + Dz^{3n} +$, æqualis erit areæ curvæ, cujus ista est ordinata. Æquentur igitur ordinatarum membra homologa,

Prop. VII.

PROP. VII. THEOR. V.

Si pro $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+$ &c. ſcribatur R ut ſuprà, & in Curvæ alicujus Ordinatâ, $z^{\theta\pm\eta\sigma}R^{\lambda\pm\tau}$, maneant quantitates datæ θ, η, λ, e, f, g, &c. et pro σ ac τ ſcribantur ſucceſſivè numeri quicunque integri: & ſi detur Area unius ex curvis, quæ per ordinatas innumeras ſic prodeuntes deſignantur, ſi Ordinatæ ſunt duorum nominum in vinculo radicis; vel ſi dentur Areæ duarum ex curvis, ſi Ordinatæ ſunt trium nominum in vinculo radicis; vel Areæ trium ex curvis, ſi Ordinatæ ſunt quatuor nominum in vinculo radicis; & ſic deinceps in infinitum: dico quòd dabuntur Areæ curvarum omnium.

Pro nominibus hîc habeo terminos omnes in vinculo radicis, tam deficientes quàm plenos, quorum indices dignitatum ſunt in progreſſione arithmeticâ. Sic Ordinata $\sqrt{a^4-ax^3+x^4}$, ob terminos duos inter a^4 & $-ax^3$ deficientes, pro quinquinomio haberi debet. At $\sqrt{a^4+x^4}$ binomium eſt; & $\sqrt{a^4+x^4-\frac{x^8}{a^4}}$ trinomium;

Prop. VI.

et fiet $a=\theta ek\text{A}$.

$$b=\overline{\theta+\lambda\eta}\times fk\text{A}+\overline{\theta+\mu\eta}\times el\text{A}+\overline{\theta+\eta}\times ek\text{B}$$

$$c=\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gk\text{A}+\overline{\theta+\lambda\eta+\mu\eta}\times fl\text{A}+\overline{\theta+2\mu\eta}\times em\text{A}+\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times fk\text{B}+\overline{\theta+\eta+\mu\eta}\times el\text{B}+\overline{\theta+2\eta}\times ek\text{C}.$$

$$d=\overline{\theta+3\lambda\eta}\times hk\text{A}+\overline{\theta+2\lambda\eta+\mu\eta}\times gl\text{A}+\overline{\theta+\lambda\eta+2\mu\eta}\times fm\text{A}+\overline{\theta+3\mu\eta}\times en\text{A}+\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\times gk\text{B}+\overline{\theta+\eta+\lambda\eta+\mu\eta}\times fl\text{B}+\overline{\theta+\eta+2\mu\eta}\times em\text{B}+\overline{\theta+2\eta+\lambda\eta}\times fk\text{C}+\overline{\theta+2\eta+\mu\eta}\times el\text{C}+\overline{\theta+3\eta}\times ek\text{D}.$$

Ex quibus venient

$$\text{A}=\frac{a}{\theta ek}.\quad \text{B}=\frac{b-\overline{\theta+\lambda\eta}\times fk\text{A}-\overline{\theta+\mu\eta}\times el\text{A}}{\overline{\theta+\eta}\times ek}.$$

$$\text{C}=\frac{c-\overline{\theta+2\lambda\eta}\,gk\text{A}-\overline{\theta+\lambda\eta+\mu\eta}\,fl\text{A}-\overline{\theta+2\mu\eta}\,em\text{A}-\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\,fk\text{B}-\overline{\theta+\eta+\mu\eta}\,el\text{B}}{\overline{\theta+2\eta}\times ek}.$$

$$\text{D}=\frac{d-\overline{\theta+3\lambda\eta}\,hk\text{A}-\overline{\theta+2\lambda\eta+\mu\eta}\,gl\text{A}-\overline{\theta+\lambda\eta+2\mu\eta}\,fm\text{A}-\overline{\theta+3\mu\eta}\,en\text{A}-\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\,gk\text{B}-\overline{\theta+\eta+\lambda\eta+\mu\eta}\,fl\text{B}-\overline{\theta+\eta+2\mu\eta}\,em\text{B}-\overline{\theta+2\eta+\lambda\eta}\,fk\text{C}-\overline{\theta+2\eta+\mu\eta}\,el\text{C}}{\overline{\theta+3\eta}\,ek}$$

Jam

mium; cùm progressio jam per majores differentias procedat. Prop. VII. Propositio verò sic demonstratur.

CAS. I.

Sunto Curvarum duarum Ordinatæ $pz^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ (y) & $qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}$, & Areæ pA & qB, existente R quantitate trium nominum $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}$. Et cùm per Prop. III. sit $z^{\theta}R^{\lambda}$ Area curvæ, cujus Ordinata est $\theta e+\overline{\theta+\lambda\eta}\times fz^{\eta}+\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gz^{2\eta}$ in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, subduc ordinatas & areas priores de areâ & ordinatâ posteriori, & manebit $\theta e-p+\overline{\begin{matrix}\theta\\+\lambda\eta\end{matrix}}\times\overline{f-q}\times z^{\eta}+\overline{\begin{matrix}\theta\\+2\lambda\eta\end{matrix}}\times gz^{2\eta}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ Ordinata nova curvæ, et $z^{\theta}R^{\lambda}-pA-qB$ ejusdem Area. Pone $\theta e=p$, & $\theta f+\lambda\eta f=q$ (z), & Ordinata evadet $\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gz^{2\eta}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, & Area $z^{\theta}R^{\lambda}-\theta eA-\theta fB-\lambda\eta fB$. Divide utramque per $\theta g+2\lambda\eta g$, & aream prodeuntem dic C; & assumptâ utcunque r, erit rC Area curvæ, cujus Ordinata est $rz^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}$. Et quâ ratione ex areis pA & qB aream rC, ordinatæ $rz^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}$ congruentem, invenimus, licebit ex areis qB & rC Aream quartam, puta sD, Ordinatæ $sz^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda-1}$ congruentem, invenire; & sic deinceps in infinitum. Et par est ratio progressionis

Jam pono $\frac{\theta}{\eta}=r$, $r+\lambda=s$, $s+\lambda=t$, $t+\lambda=u$, $u+\lambda=w$

$r+\mu={}'s$, $s+\mu={}'t$, $t+\mu={}'u$, $u+\mu={}'w$

${}'s+\mu={}''t$, ${}'t+\mu={}''u$, ${}'u+\mu={}''w$

${}''t+\mu={}'''u$, ${}''u+\mu={}'''w$

Et in areâ $z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}\times A+Bz^{\eta}+Cz^{2\eta}+Dz^{3\eta}+$, in membro primo pro A, in secundo pro B, in tertio pro C, in quarto pro D, scribantur literarum A, B, C, D, æstimationes illæ, quas æquationes jam suprà positæ, si novissimarum ope transformentur, promant; ita exsistet Areæ formula qualis à Newtono posita est. Q. E. D.

Atque hæc est sextæ propositionis demonstratio, ad superioris exemplar confecta, quam et ante nos Stewartus, in suis ad hunc locum commentariis, eodem ferè modo concinnatam dedit.

(y) In hâc demonstratione symbola, $\theta-1$, $\lambda-1$, ponuntur pro θ, et λ enunciationis.

(z) Nimirum cùm id semper obtineat, secundum omnem literarum p, q æstimationem, ut arearum differentia area sit curvæ, cujus ordinata ordinatarum differentiæ æqualis sit, obtinebit etiam, si p, q, earum sumantur magnitudinum, quæ efficiant, ut duo prima ordinatarum differentiæ membra in nihilum singulatim abeant. Hoc autem efficietur si sumatur $p=\theta e$, & $q=\theta f+\lambda\eta f$. Ita enim fiet $\theta e-p=0$, & $\theta f+\lambda\eta f-q=0$. Ponatur igitur $\theta e=p$, & $\theta f+\lambda\eta f=q$, atque ea consequentur quæ Newtonus dicit.

(aa) Hæc

PROP. VII. progressionis ab areis B & A in partem contrariam pergentis. Si terminorum θ, $\theta+\lambda\eta$, & $\theta+2\lambda\eta$ aliquis deficit, & seriem abrumpit, assumatur area pA, in principio progressionis unius, & area qB, in principio alterius, & ex his duabus areis dabuntur areæ omnes in progressione utrâque ([aa]). Et contrà, ex aliis duabus areis assumptis fit regressus, per analysin, ad areas A & B; adeo ut ex duabus datis cæteræ omnes dentur. Q. E. O.

Hic est casus Curvarum ubi ipsius z index θ augetur vel diminuitur perpetuà additione vel subductione quantitatis η. Casus alter est curvarum ubi index λ augetur vel diminuitur unitatibus.

C A S. II.

Ordinatæ $pz^{\theta-1}R^{\lambda}$ ([bb]) et $qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda}$, quibus areæ pA et qB jam respondeant, si in R, seu $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}$, ducantur, ac deinde ad R vicissim applicentur, evadunt $\overline{pe+pfz^{\eta}+pgz^{2\eta}}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, et $\overline{qez^{\eta}+qfz^{2\eta}+qgz^{3\eta}}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$.

Et (per Prop. III.) est $az^{\theta}R^{\lambda}$ Area curvæ, cujus Ordinata est $\overline{\theta ae+\overline{\theta+\lambda\eta}\times afz^{\eta}+\overline{\theta+2\lambda\eta}\times agz^{2\eta}}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$; et $bz^{\theta+\eta}R^{\lambda}$ Area curvæ, cujus Ordinata est $\overline{\theta+\eta}\times bez^{\eta}+\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times bfz^{2\eta}+\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\times bgz^{3\eta}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$.

Et

([aa]) Hæc præcisè nimis et obscurè quidem dicta sunt, credo tamen hâc mente dici. "Si forte eveniat ut vel θ, vel $\theta+\lambda\theta$, vel $\theta+2\lambda\eta$, hoc est, ut in symbolo illo generali $z^{\theta}R^{\lambda}-\theta\eta A-\overline{\theta+\lambda\eta}\,f\eta B=\overline{\theta+2\lambda\eta}\,gC$, coefficiens cujuslibet arearum A, B, C nihilo æqualis sit, hoc fortè si eveniat, nihilo minus, per eandem investigationis viam dabuntur areæ omnes utriusque progressionis; sive illius quæ, initio ab illâ pA sumpto, infinitè usque ascendit, sive alterius, quæ, ab alterâ pB incipiens, infinitè usque descendit; sive utriusque. Hæc autem explicatiùs mox dicam, ac verè dicta esse ostendam.

([bb]) Rursum ponitur $\theta-1$, pro θ enunciationis.

([cc]) NEMPE hoc modo.
Propter coefficientem membri secundi nihilo æqualem, fiet
$p=-\frac{\theta af+\lambda\eta af+\theta be+\eta be+ge}{f}$. Rursum, $p=-\frac{\theta ag+2\lambda\eta ag+\theta bf+\eta bf+\lambda\eta bf+qf}{g}$; propter coefficientem membri tertii nihilo æqualem. Rursum, propter coefficientem membri quarti nihilo æqualem, $q=-\theta b-\eta b-2\lambda\eta b$.

Ex his autem efficietur $b=\frac{afg}{f-2ge}$; et $p=\frac{2\lambda\eta age}{f^2-2ge}-\theta a-\lambda\eta a$; et $q=\frac{\theta+\eta+2\lambda\eta}{2ge-f^2}afg$.

Jam verò cùm id semper obtineat, ut Arearum summa $p\text{A}+q\text{B}+az^{\theta}R^{\lambda}+bz^{\theta+\eta}R^{\lambda}$ curvæ sit Area, cujus

Et harum quatuor Arearum ſumma eſt $p\text{A}+q\text{B}+az^{\theta}\text{R}^{\lambda}+bz^{\theta+\eta}\text{R}^{\lambda}$; Prop. VII. & ſumma reſpondentium Ordinatarum

$$\overline{\begin{array}{llll} \theta ae+\overline{\theta+\lambda\eta}\times afz^{\eta} & +\overline{\theta+2\lambda\eta}\times agz^{2\eta} & +\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\times bgz^{3\eta} & \times z^{\theta-1}\text{R}^{\lambda-1}. \\ +pe+\overline{\theta+\eta}\times be & +\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times bf & +1\times qg & \\ \quad +1\times pf & \quad +1\times pg & & \\ \quad +1\times qe & \quad +1\times qf & & \end{array}}$$

Si terminus primus, tertius, & quartus, ponatur ſeorſim æquales nihilo, per primum fiet $\theta ae+pe=0$, ſeu $-\theta a=p$; per quartum $-\theta b-\eta b-2\lambda\eta b=q$, & per tertium (eliminando p & q) $\frac{2ag}{f}=b$. Unde ſecundus fit $\frac{\lambda\eta aff-4\lambda\eta age}{f}$; adeoque ſumma quatuor Ordinatarum eſt $\frac{\lambda\eta aff-4\lambda\eta age}{f}z^{\theta+\eta-1}\text{R}^{\lambda-1}$, & ſumma totidem reſpondentium Arearum eſt $az^{\theta}\text{R}^{\lambda}+\frac{2ag}{f}z^{\theta+\eta}\text{R}^{\lambda}-\theta a\text{A}-\frac{\overline{2\theta+2\eta+4\lambda\eta}}{f}ag\text{B}$. Dividantur hæ ſummæ per $\frac{\lambda\eta aff-4\lambda\eta age}{f}$; & ſi quotum poſterius dicatur D, erit D Area curvæ, cujus Ordinata eſt quotum prius, $z^{\theta+\eta-1}\text{R}^{\lambda-1}$. Et eâdem ratione, ponendo omnes ordinatæ terminos, præter primum, æquales nihilo, poteſt Area curvæ inveniri, cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1}\text{R}^{\lambda-1}$(cc). Dicatur area iſta C; & quâ ratione ex areis A & B inventæ ſunt areæ C ac D, ex his areis, C ac D, inveniri poſſunt aliæ duæ, E & F, ordinatis $z^{\theta-1}\text{R}^{\lambda-2}$ et $z^{\theta+\eta-1}\text{R}^{\lambda-2}$ congruentes, & ſic deinceps in infinitum. Et, per analyſin contrariam, regredi licet ab areis E & F ad areas C ac D, & inde ad

cujus Ordinata ſummæ Ordinatarum eſt æqualis, ſi ſumantur b, p, q, earum magnitudinum, quæ efficiant, ut membra omnia ſummæ ordinatatarum poſt primum in nihilum ſingulatim abeant, erit $p\text{A}+q\text{B}+az^{\theta}\text{R}^{\lambda}+bz^{\theta+\eta}\text{R}^{\lambda}$ Area curvæ, cujus Ordinata erit $\overline{\theta a+p}\times ez^{\theta-1}\text{R}^{\lambda-1}$.

Quare $\frac{p\text{A}+q\text{B}+az^{\theta}.\text{R}^{\lambda}+bz^{\theta+\eta}\text{R}^{\lambda}}{\overline{\theta a+p}\times e}$ erit Area curvæ, cujus Ordinata $z^{\theta-1}\text{R}^{\lambda-1}$. Hoc eſt, ſi pro p, q, b ſcribantur earum æſtimationes illæ, quas è membris Ordinatæ ſecundo, tertio atque quarto, ſingulatim nihilo æquatis elicuimus, et pro Areâ curvæ cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1}\text{R}^{\lambda-1}$, ſcribatur C, erit

$$\overline{az^{\theta}.\text{R}^{\lambda}+\frac{afg}{f^2-2ge}z^{\theta+\eta}\text{R}^{\lambda}+\overline{\frac{2\lambda\eta ge}{f^2-2ge}-\theta-\lambda\eta}\,a\text{A}+\frac{\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}}{2ge-f^2}\,afg\text{B}}\times\frac{f^2-2ge}{4\lambda\eta age^2-f^2\lambda\eta ae}=\text{C}.$$

Hoc eſt $\frac{\overline{f^2-2ge}\,z^{\theta}.\text{R}^{\lambda}+fgz^{\theta+\eta}\text{R}^{\lambda}+\overline{\theta+2\lambda\eta}\,\overline{2ge-\theta+\lambda\eta}\,f^2\,\text{A}-\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\,fg\text{B}}{\overline{4ge-f^2}\times\lambda\eta e}=\text{C}$. Quali etiam formâ ſymbolum areæ C, ſimili computandi ratione, Stewartus protulit. Symbolum, quod in Hiſtoriâ ſuâ, capite undecimo, (p. 85.) Raphſonus poſuit, vitioſum eſt.

4 areas

Prop. VII. areas A & B, aliasque quæ in progressione sequuntur. Igitur si index λ, perpetuâ unitatum additione vel subductione, augeatur vel minuatur, & ex Areis, quæ Ordinatis sic prodeuntibus respondent, duæ simplicissimæ habentur; dantur aliæ omnes in infinitum. Q. E. O.

CAS. III.

Et per casus hosce duos conjunctos, si tam index θ perpetuâ additione vel subductione ipsius η, quàm index λ perpetuâ additione

Prop. VII. Æquat. Canon.

([d]) Apertiora quidem sunt hæc, quàm ut explicatione egeant. Illud modò nobis agendum est, ut hujus Propositionis summam formulis quibusdam exponamus ad usum computandi accommodatis.

Hunc igitur in finem, Areæ curvarum quarum Ordinatæ sunt $pz^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, $qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}$, $rz^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}$, $sz^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda-1}$, $tz^{\theta+4\eta-1}$, $R^{\lambda-1}$, *, *, *, $vz^{\theta+\sigma\eta-1}R^{\lambda-1}$, harum inquam Areæ significentur notis pA, qB, rC, sD, tE, *, *, *, vZ. Tum, ope Casûs Primi hujus Propositionis, hæ elicientur Æquationes, quas Canonicas vocare liceat.

Primùm quidem, si quantitas R è duobus constet nominibus

1. $B = \dfrac{z^{\theta}R^{\lambda} - \theta eA}{\overline{\theta+\lambda\eta}\times f}$. 2. $A = \dfrac{z^{\theta}R^{\lambda} - \overline{\theta+\lambda\eta}\times fB}{\theta e}$.

II. Si R ex tribus constet nominibus.

1. $C = \dfrac{z^{\theta}R^{\lambda} - \theta eA - \overline{\theta+\lambda\eta}\,fB}{\overline{\theta+2\lambda\eta}\times g}$.

2. $B = \dfrac{z^{\theta}R^{\lambda} - \theta eA - \overline{\theta+2\lambda\eta}\times gC}{\overline{\theta+\lambda\eta}\times f}$.

3. $A = \dfrac{z^{\theta}R^{\lambda} - \overline{\theta+\lambda\eta}\,fB - \overline{\theta+2\lambda\eta}\times gC}{\theta e}$.

III. Si R ex quatuor constet nominibus.

1. $D = \dfrac{z^{\theta}R^{\lambda} - \theta eA - \overline{\theta+\lambda\eta}\,fB - \overline{\theta+2\lambda\eta}\times gC}{\overline{\theta+3\lambda\eta}\times h}$.

2. $C = \dfrac{z^{\theta}R^{\lambda} - \theta eA - \overline{\theta+\lambda\eta}\,fB - \overline{\theta+3\lambda\eta}\,hD}{\overline{\theta+2\lambda\eta}\,g}$.

3. $B = \dfrac{z^{\theta}R^{\lambda} - \theta eA - \overline{\theta+2\lambda\eta}\,gC - \overline{\theta+3\lambda\eta}\,hD}{\overline{\theta+\lambda\eta}\,f}$.

4. $A = \dfrac{z^{\theta}R^{\lambda} - \overline{\theta+\lambda\eta}\,fB - \overline{\theta+2\lambda\eta}\,gC - \overline{\theta+3\lambda\eta}\,hD}{\theta e}$.

Denique si quantitas R ex tot constet nominibus, quot sint in numero $\sigma + 1$ unitates

8. $Z = \dfrac{z^{\theta}R^{\lambda} - \theta eA - \overline{\theta+\lambda\eta}\,fB - \overline{\theta+2\lambda\eta}\,gC - \overline{\theta+3\lambda\eta}\,hD - * - * - * - \overline{\theta+\overline{\sigma-1}\,\lambda\eta}\,yY}{\overline{\theta+\sigma\lambda\eta}\,z}$.

designante

ditione vel fubductione unitatis, utcunque augeatur vel mi-
nuatur, dabuntur areæ fingulis prodeuntibus ordinatis refpondentes. Q. E. O.

C A S. IV.

Et fimili argumento, fi Ordinata conftat ex quatuor nominibus in vinculo radicali, & dantur tres arearum, vel fi conftat ex quinque nominibus & dantur quatuor arearum, & fic deinceps: dabuntur Areæ omnes, quæ, addendo vel fubducendo numerum η indici θ, vel unitatem indici λ, generari poffunt. Et par eft ratio Curvarum ubi Ordinatæ ex binomiis conflantur, & Area una earum, quæ non funt geometricè quadrabiles, datur (dd). Q. E. O.

PROP.

defignante z denominatoris coefficientem nominis extremi quantitatis R.

a. $Y = \frac{z^{\theta} R^{\lambda} - \theta e A - \overline{\theta + \lambda n}\, f B - \overline{\theta + 2\lambda n}\, g C - \overline{\theta + 3\lambda n}\, h D - * - * - * - \overline{\theta + \sigma\lambda n}\, z Z}{\overline{\overline{\theta + \sigma - 1}\, \lambda n}\, y}.$

$* = *$
$* = *$
$* = *$

$D = \frac{z^{\theta} R^{\lambda} - \theta e A - \overline{\theta + \lambda n}\, f B - \overline{\theta + 2\lambda n}\, g C - * - * - * - \overline{\overline{\theta + \sigma - 1}\, \lambda n}\, y Y - \overline{\theta + \sigma\lambda n}\, z Z}{\overline{\theta + 3\lambda n}\, h}.$

2. Atque harum formularum ope optimè quidem explicantur ea, quæ de alicujus è coefficientibus hifce θ, $\theta + \lambda n$, $\theta + 2\lambda n$ defectu Newtonus dixit; faltem quæ Newtonum dicentem mihi videor audiviffe. Primùm enim exiftente R quantitate trium nominum, θ deficiat. Hoc eft ponatur $\theta = 0$. Nihilominus fi detur B, dabitur quidem C per æquationem fecundæ claffis primam, quæ, pofito $\theta = 0$, in hanc migraverit: $C = \frac{R^{\lambda} - \lambda n f B}{2\lambda n g}$. Si verò detur C, dabitur A per æquationem fecundæ claffis fecundam, quæ pofito $\theta = 0$, in hanc migraverit; $B = \frac{R^{\lambda} - 2\lambda n g C}{\lambda n f}$. Ex datis autem duabus B, C invenietur D; et ex datis C, D, invenietur E; eodemque ufque modo progredi licebit, pro θ, illis n, $2n$, $3n$, $4n$, pro e, illis D, E, F, pro B illis, C, D, E, pro A illis, B, C, D, in primam fecundæ claffis æquationem ordine fubftitutis. Nempe hoc modo, ut exemplis res magis elucefcat;

$$D = \frac{z^{n} R^{\lambda} + n e B - \overline{n + \lambda n}\, f C}{\overline{n + 2\lambda n}\, g}.$$

$$E = \frac{z^{2n} R^{\lambda} - 2n e C - \overline{2n + \lambda n}\, f D}{\overline{2n + 2\lambda n}\, g}.$$

$$F = \frac{z^{3n} R^{\lambda} - 3n e D - \overline{3n + \lambda n}\, f E}{\overline{3n + 2\lambda n}\, g}.$$

In hoc igitur cafu dabuntur areæ omnes progreffionis ejus, quæ, ab illâ A initio fumpto, infinitè ufque afcendet. Ipfa autem A, cujus, in æquationibus Canonicis, coefficientem nihilo æqualem pofuimus, illa quidem infinita erit; id quod æquatio fecundæ claffis tertia fatis indicat; quæ, pofito $\theta = 0$, in hanc migraverit. $A = \frac{R^{\lambda} - \lambda n f B - 2\lambda n g C}{0}$.

Prop. VIII.

PROP. VIII. THEOR. VI.

Si pro $e+fz^{n}+gz^{2n}+$ &c. et $k+lz^{n}+mz^{2n}+$ &c. scribantur R & S, ut suprà, & in Curvæ alicujus Ordinatâ $z^{\theta\pm\tau\nu}R^{\lambda\pm\tau}S^{\mu\pm\nu}$ maneant quanti-

Progressionis autem illius, quæ, ab illâ B incipiens, infinitè descendit, hujus quidem areæ omnes infinitæ erunt. Primùm enim esse A infinitam jam ostendimus. Designet autem $\mathfrak{a}$ curvam progressionis descendentis ab illâ A proximè inferiorem, sive eam, cujus Ordinata est $z^{\theta-n}R^{\lambda-1}$. Area $\mathfrak{a}$, ope tertiæ æquationis secundæ classis, invenienda est; scribendo, $-n$ pro θ, $\mathfrak{a}$ pro A, A pro B, B pro C; nempe hoc modo, $\mathfrak{a} = \frac{z^{-n}R^{\lambda} - \overline{\lambda\nu - n}\,fA - \overline{2\lambda n - n}\,gB}{-ne}$. Ubi numerator quantitatis fractæ, propter membrum, $\overline{\lambda n - n}\,fA$, infinitum, cùm reliqua finita sint, totus quidem infinitus erit. Unde, cùm denominator sit finitus, quantitas ipsa fracta infinita erit. Ergo area $\mathfrak{a}$ infinita. Simili modo, si b designat aream progressionis descendentis ab illâ $\mathfrak{a}$ proximè inferiorem, ostendetur b infinita. Eodemque usque modo progredi licebit. Omnes igitur hujus progressionis areæ post primam a infinitæ erunt.

3. Sed deficiat $\theta + 2\lambda n$. Hoc est, sit $\theta + 2\lambda n = 0$, existente nimirum $\theta = -2\lambda n$.

Nihilominus, si detur A, dabitur B, per æquationem secundæ classis secundam; quæ, posito $\overline{\theta + 2\lambda n} = 0$, in hanc migraverit $a = \frac{z^{-2\lambda n}B^{\lambda} + 2\lambda neA}{-\lambda nf}$. Vel si detur a, dabitur A per æquationem secundæ classis tertiam; quæ, posito $\theta + 3\lambda n = 0$, in hanc migraverit: $A = \frac{z^{-3\lambda n}B^{\lambda} + \lambda nfa}{-2\lambda ne}$. E duabus autem B, A datis, dabitur $\mathfrak{a}$, quæ, in progressione descendente, ab illâ A proximè est inferior; è duabus A, $\mathfrak{a}$, dabitur rursum proximè inferior b; è duabus $\mathfrak{a}$, b dabitur c, eodemque usque modo progredi licebit. Omnes enim a, b, c, d ope tertiæ æquationis secundæ classis inveniendæ sunt, pro θ, illis $-2\lambda n - n$, $-2\lambda n - 2n$, $-2\lambda n - 3n$, pro A, illis a, b, c, d, et pro B, illis A, a, b, c, pro C illis B, A, a, b ordine substitutis.

In hoc igitur casu dabuntur areæ omnes progressionis ejus, quæ, ab illâ a initio sumpto, infinitè descendit. Ipsa autem C, cujus, in æquationibus Canonicis, coefficientem nihilo æqualem posuimus, illa quidem infinita erit. Id quod æquatio prima secundæ classis satis indicat; quæ, posito $\theta + 2\lambda n = 0$, in hanc migraverit, $C = \frac{z^{-2\lambda n}B^{\lambda} + 2\lambda neA + \lambda nfB}{0}$.

Ac propterea progressionis ejus, quæ ab illâ B incipiens, infinitè ascendit, hujus quidem, hoc in casu, areæ omnes infinitæ erunt. Id enim eâdem plane argumentandi ratione ex æquatione primâ efficietur, quâ in priore casu ex tertiâ efficiebatur, contrariæ progressionis areas omnes, post primam B, infinitas esse.

4. Denique deficiat $\theta + \lambda n$. Hoc est, sit $\theta + \lambda n = 0$, existente utique $\theta = -\lambda n$. Jam si detur A, dabitur quidem C per æquationem secundæ classis primam; quæ, posito $\theta + \lambda n = 0$, in hanc migraverit: $C = \frac{z^{-\lambda n}B^{\lambda} + \lambda neA}{\lambda ng}$. Vel si detur C, dabitur A per æquationem secundæ classis tertiam; quæ, posito $\theta + \lambda n = 0$, in hanc migraverit: $A = \frac{z^{-\lambda n}B^{\lambda} - \lambda ngC}{-\lambda ne}$. Ipsa vero B, cujus, in æquationibus Canonicis, coefficientem nihilo æqualem posuimus, illa quidem infinita erit. Id quod æquatio secunda classis secundæ satis indicat; quæ, posito $\theta + \lambda n = 0$, in hanc migraverit: $B = \frac{z^{-\lambda n}R^{\lambda} + \lambda neA - \lambda ngC}{0}$.

Utriusque autem progressionis, tam illius quæ ab illâ B incipiens infinitè ascendit, quàm ejus quæ ab illâ A infinitè descendit, areæ quidem omnes, illis, A, C exceptis, in hoc casu infinitæ erunt. Descendentis enim progressionis infinitas esse areas omnes post A, id quidem ex tertiâ æquatione secundæ classis efficietur, Ascendentis omnes post B, id verò ex primâ; simili prorsus argumentandi ratione, quâ in primo casu Descendentis, in secundo Ascendentis progressionis, omnes, post primam utriusque, infinitæ efficiebantur.

5. In

quantitates datæ θ, η, λ, μ, e, f, g, k, l, m, &c. et pro σ, τ, & υ, Prop. VIII
ſcribantur ſucceſſivè numeri quicunque integri: & ſi dentur Areæ duarum ex curvis, quæ per Ordinatas ſic prodeuntes deſignantur, ſi quanti-

5. In ſummâ ſi ponatur $\theta = 0$, datâ ſive A, ſive B, dabuntur areæ omnes progreſſionis inde ab illâ A aſcendentis. Alterius, à B deſcendentis, omnes infinitæ erunt.

Si ponatur $\theta + 2\lambda\eta = 0$, datâ ſive A, ſive B, dabuntur areæ omnes deſcendentis inde ab illâ B progreſſionis. Alterius, à A aſcendentis, omnes infinitæ erunt.

Denique ſi ponatur $\theta + \lambda\eta = 0$, ſi duarum A, C detur altera, dabitur altera quoque. Præter illas A, C, omnes utrinſque progreſſionis infinitæ erunt.

Præcisè igitur et breviter loquenti, cujus generis Newtonus nimium amans erat, dicere quodam modo liceat, è datis illis p A, q B omnes in utràque progreſſione dari. Si quidem unâ illâ inveſtigationis viâ, à Newtono traditâ, quæ omninò æſtimari poſſunt, harum juſtæ inveniuntur æſtimationes; quarum verò infinitas omnem æſtimationem fugiit, de iis id ipſum duntaxat innoteſcet, infinitas eas eſſe.

6. Cæterùm quæ de curvis trinominalibus diſſeruimus, ea, ſi operæ pretium eſſet, quod vix cenſeo, ad alias facilè transferrentur. Illud verò minimè nobis reticendum eſt, Æquationes Canonicas primæ & ſecundæ claſſis, Stewartum Abredonenſem ante nos protuliſſe.

7. In ſecundo Propoſitionis hujus caſu, eam ſecutus eſt Newtonus demonſtrandi rationem, quâ nulla certè vel evidentiæ plus vel firmitatis habeat; ad æquationes tamen, ſive Canonicas, ſive pro re natâ, inferendas, minùs, ut videtur, accommodatam; tum propter creſcentem uſque, quo quantitas R plurium fuerit nominum, notarum multitudinem, tum verò maximè propter non ſatis manifeſtam, ex paucis quibuſdam formulis primis, continuationis legem. Nos igitur aliam propoſitionis in hoc caſu demonſtrationem apponemus, Newtonianâ non minùs generalem; quæ per viam planè contrariam, ex datis primùm infimi ordinis, quot opus fuerit, curvarum areis, elatiorum areas pedetentim venari docet; tum, converſis formulis, ab elatioribus ad inferiores deſcenſûs rationem indicat, et Æquationes Canonicas, è Newtonianis ægrè quidem eliciendas, tantùm non ſponte promit. Neque verò noſtra eſt hæc Demonſtratio, ſed Maclaurini. (Vide *Treatiſe of Fluxions by Colin Maclaurin, Edinburgh*, 1742, § 790) Prop. VII. Cas. II. Demons.

Sint Curvæ	A	B	C	D	E
Quarum Ordinatæ	$z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$.	$z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}$.	$z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}$.	$z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda-1}$.	$z^{\theta+4\eta-1}R^{\lambda-1}$.
Curvæ	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$
Quarum Ordinatæ	$z^{\theta-1}R^{\lambda}$.	$z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda}$.	$z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda}$.	$z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda}$.	$z^{\theta+4\eta-1}R^{\lambda}$.
Curvæ	A	B	C	D	E
Quarum Ordinatæ	$z^{\theta-1}R^{\lambda+1}$.	$z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda+1}$.	$z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda+1}$.	$z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda+1}$.	$z^{\theta+4\eta-1}R^{\lambda+1}$.
Curvæ	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{E}$
Quarum Ordinatæ	$z^{\theta-1}R^{\lambda+2}$.	$z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda+2}$.	$z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda+2}$.	$z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda+2}$.	$z^{\theta+4\eta-1}R^{\lambda+2}$.

Dico primum datâ ſerie infimâ A, B, C, D, E, &c. ſuperiores omnes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, &c. A, B, C, D, E, &c. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, uſque dari.

Nam cùm $\mathcal{A}$ area ſit curvæ cujuſdam, cujus abſciſſa eſt z, ordinata $z^{\theta-1}R^{\lambda}$; et cùm fluxio areæ æqualis ſit rectangulo ſub ordinatâ et fluxione abſciſſæ, erit $\dot{\mathcal{A}} = z^{\theta-1}\dot{z}R^{\lambda} = z^{\theta-1}\dot{z}RR^{\lambda-1}$. Hoc eſt, propter $R = e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} +$, $\dot{\mathcal{A}} = z^{\theta-1}\dot{z}R^{\lambda-1} \times \overline{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} +}$, $= ez^{\theta-1}\dot{z}R^{\lambda-1} + fz^{\theta+\eta-1}\dot{z}R^{\lambda-1} + gz^{\theta+2\eta-1}\dot{z}R^{\lambda-1} + hz^{\theta+3\eta-1}\dot{z}R^{\lambda-1} +$, Jam verò $ez^{\theta-1}\dot{z}R^{\lambda-1} = e\dot{A}$. $fz^{\theta+\eta-1}\dot{z}R^{\lambda-1} = f\dot{B}$. $gz^{\theta+2\eta-1}\dot{z}R^{\lambda-1} = g\dot{C}$. $hz^{\theta+3\eta-1}\dot{z}R^{\lambda-1} = h\dot{D}$.

Quare $\dot{\mathcal{A}} = e\dot{A} + f\dot{B} + g\dot{C} + h\dot{D} +$,
et $\mathcal{A} = eA + fB + gC + hD +$,

PROP. VIII. quantitates R & S sunt binomia, vel si dentur Areæ trium ex curvis, si R & S conjunctim ex quinque nominibus constant, et sic deinceps

…STRATIO MACLAURINI

Simili modo ostendetur $\mathcal{B} = e\mathrm{B} + f\mathrm{C} + g\mathrm{D} + h\mathrm{E} +$, $\mathcal{C} = e\mathrm{C} + f\mathrm{D} + g\mathrm{E} + h\mathrm{F} +$, $\mathcal{D} = e\mathrm{D} + f\mathrm{E} + g\mathrm{F} + h\mathrm{G}$, eodemque usque modo.

Datâ igitur serie infimâ A, B, C, D, E, dabitur $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, series proximè superior. Eodemque modo, quo hæc ex serie infimâ, ex hâc invenietur hâc ipsâ proximè superior. Nimirum $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$. Dataque $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, rursum ex illâ invenietur $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, eodem modo quo $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, &c. ex infimâ.

Eodemque modo pedetentim usque progredi licebit.

Dico præterea ex unâ areâ A, si quantitas R duobus tantùm constet nominibus, è duabus A, B, si tribus, è tribus A, B, C, si quatuor; semper ex areis infimæ seriei unâ paucioribus quàm sunt nomina quantitatis R, areas omnes progressionum omnium usque dari.

Nam si R duorum sit nominum, datâ A, dabitur B et series tota A, B, C, D, per casum primum; quare reliquæ omnes dabuntur. Rursum si R trium sit nominum, datis areis duabus A, B, dabitur tertia C, et series tota A, B, C, D, per casum primum. Unde series reliquæ dabuntur. Et, quotvis demum nominum sit quantitas R, viget usque similis ratiocinatio.

Atque hæc est demonstratio illa cujus fundamenta Vir summus Maclaurinus jecit, minùs tamen accuratè eam, quàm nos fecimus, deduxit.

8. JAM verò Æquationes Canonicæ conficientur, si in æquationem illam $\mathcal{A} = e\mathrm{A} + f\mathrm{B} + g\mathrm{C} + h\mathrm{D}$, illarum B, C, D, E æstimationes substituantur, ex Canonicis primi casûs petendæ. Nempe, si R duobus constet nominibus

ÆQUAT. CANON PROP. VII. CAS. II.

1. $\mathcal{A} = e\mathrm{A} + f\mathrm{B} = \frac{\lambda n e \mathrm{A} + z^{\theta} \mathrm{R}^{\lambda}}{\theta + \lambda n}$. (per Canonic. 1^m primæ Classis Casûs prioris)

2. $\mathrm{A} = \frac{\overline{\theta + \lambda n}\,\mathcal{A} - z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda}}{\lambda n e}$.

Si R tribus constet nominibus,

1. $\mathcal{A} = e\mathrm{A} + f\mathrm{B} + g\mathrm{C} = \frac{2\lambda n e \mathrm{A} + \lambda n f \mathrm{B} + z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda}}{\theta + 2\lambda n}$. (Cas. 1. Class. 2. Can. 1.)

2. $\mathrm{B} = \frac{\overline{\theta + 2\lambda n}\,\mathcal{A} - 2\lambda n e \mathrm{A} - z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda}}{\lambda n f}$.

3. $\mathrm{A} = \frac{\overline{\theta + 2\lambda n}\,\mathcal{A} - \lambda n f \mathrm{B} - z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda}}{2\lambda n e}$.

Si R quatuor constet nominibus.

1. $\mathcal{A} = e\mathrm{A} + f\mathrm{B} + g\mathrm{C} + h\mathrm{D} = \frac{3\lambda n e \mathrm{A} + 2\lambda n f \mathrm{B} + \lambda n g \mathrm{C} + z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda}}{\theta + 3\lambda n}$. (Cas. 1. Class. 3. Can. 1.)

2. $\mathrm{C} = \frac{-z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda} - 3\lambda n e \mathrm{A} - 2\lambda n f \mathrm{B} + \overline{\theta + 3\lambda n}\,\mathcal{A}}{\lambda n g}$.

3. $\mathrm{B} = \frac{-z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda} - 3\lambda n e \mathrm{A} - \lambda n g \mathrm{C} + \overline{\theta + 3\lambda n}\,\mathcal{A}}{2\lambda n f}$.

4. $\mathrm{A} = \frac{-z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda} - 2\lambda n f \mathrm{B} - \lambda n g \mathrm{C} + \overline{\theta + 3\lambda n}\,\mathcal{A}}{3\lambda n e}$.

Denique si R tot constet nominibus quot sunt in numero $\sigma + 1$ unitates.

1. $\mathcal{A} = \frac{\sigma\lambda n e \mathrm{A} + \overline{\sigma - 1}\,\lambda n f \mathrm{B} + \overline{\sigma - 2}\,\lambda n g \mathrm{C} + \overline{\sigma - 3}\,\lambda n h \mathrm{D} * * * + \lambda n v \mathrm{Y} + z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda}}{\theta + \sigma\lambda n}$. (per Canonicam generalem Casûs prioris)

2. Y =

deinceps in infinitum: dico, quòd dabuntur Areæ curvarum omnium. Prop. VIII.

Demonſtratur ad modum propoſitionis ſuperioris (dd).

P R O P.

$$\text{R, Y} = \frac{-z^{\theta}R^{\lambda} - \sigma\lambda n e A - \overline{\sigma-1}\lambda n f B - \overline{\sigma-2}\lambda n g C - \overline{\sigma-3}\lambda n h D * * * + \overline{\tau+\sigma n}\,\mathfrak{A}}{\lambda n \gamma}.$$

$$\text{A} = \frac{-z^{\theta}R^{\lambda} - \overline{\sigma-1}\lambda n f B - \overline{\sigma-2}\lambda n g C - \overline{\sigma-3}\lambda n h D * * * - \lambda n \gamma Y + \overline{\tau+\sigma\lambda n}\,\mathfrak{A}}{\sigma\lambda n e}.$$

9. Per has æquationes definiuntur etiam areæ $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, pro θ, illis $\theta+n$, $\theta+2n$, $\theta+3n$, pro illis A, B, C, D, illis, a, c, o, pro λ illis $\lambda+1$, $\lambda+2$, $\lambda+3$, pro A, a, c, D, E, illis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, vel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, vel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, ritè ſubſtitutis. Quæ ſi brevius forte dicta ſunt, ex iis tamen apertiſſimè, credo, intelligantur, quæ ad Canonicas prioris caſûs enodatè admodum diſſeruimus.

(dd) DEMONSTRATIO PROPOSITIONIS OCTAVÆ.

CAS. I.

Sunto Curvarum trium Ordinatæ $pz^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$, $qz^{\theta+n-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$, $rz^{\theta+2n-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$, et Areæ pA, qB, rC, exiſteute R quantitate trium nominum, $e+fz^{n}+gz^{2n}$, S duorum, $k+lz^{n}$. Et cùm per Prop. IV. ſit $z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}$ area curvæ, cujus ordinata eſt $\theta ek + \overline{\theta+\lambda n}fk + \overline{\theta+\mu n}el\,z^{n} + \overline{\theta+2\lambda n}gk + \overline{\theta+\lambda n+\mu n}fl\,z^{2n} + \overline{\theta+2\lambda n+\mu n}gl\,z^{3n}$ in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$, ſubduc ordinatas et areas priores de areâ et ordinatâ poſteriore, et manebit $\overline{\theta ek-p} + \overline{\theta+\lambda n}fk + \overline{\theta+\mu n}el - q\,z^{n} + \overline{\theta+2\lambda n}gk + \overline{\theta+\lambda n+\mu n}fl - r\,z^{2n} + \overline{\theta+2\lambda n+\mu n}gl\,z^{3n} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$ Ordinata novæ Curvæ, et $z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu} - p\text{A} - q\text{B} - r\text{C}$ ejuſdem Area. Et cùm hoc ſemper obtineat, in omni literarum, p, q, r, æſtimatione, ut arearum differentia ſit Area curvæ, cujus Ordinata ordinatarum differentiæ æqualis ſit; obtinebit etiam ſi p, q, r, earum ſumantur magnitudinum, quæ efficiant, ut ordinatarum differentiæ membra tria prima in nihilum ſingulatim abeant. Hoc autem efficietur, ſi ſumatur $p=\theta ek$, $q=\overline{\theta+\lambda n}fk+\overline{\theta+\mu n}el$, $r=\overline{\theta+2\lambda n}gk+\overline{\theta+\lambda n+\mu n}fl$. Sumantur igitur p, q, r, iſtarum magnitudinum. Itaque Ordinata evadet $\overline{\theta+2\lambda n+\mu n}gl\,z^{3n}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$, et Area $z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu} - \theta ek\text{A} \,\frac{-\overline{\theta+\lambda n}fk}{-\overline{\theta+\mu n}el}\,\text{B} \,\frac{-\overline{\theta+2\lambda n}gk}{-\overline{\theta+\lambda n+\mu n}fl}\,\text{C}$. Divide utramque à $\overline{\theta+2\lambda n+\mu n}gl$, et Aream diviſione factam dic D; et, aſſumtâ utcunque s, erit sD Area Curvæ, cujus Ordinata eſt $sz^{\theta+3n-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$. Et quâ ratione ex areis pA, qB, rC aream sD ordinatæ $sz^{\theta+3n-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$ congruentem invenimus, licebit ex areis qB, rC, sD, quartam, puta tE, ordinatæ $tz^{\theta+4n-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$ congruentem invenire; eodemque deinceps uſque modo.

Quòd ſi R, S utrique duorum tantùm nominum fuerit, vel trium utraque, pluriumve, eadem erit demonſtrandi ratio.

Hic eſt caſus Curvarum, in quibus ipſius z index θ augetur vel diminuitur perpetuâ additione, vel ſubductione, quantitatis n. Secundus caſus eſt Curvarum, in quibus index λ vel μ augetur, vel diminuitur, unitatibus.

CAS. II.

Puta indicem λ unitatibus perpetim augeri. Ordinatæ $pz^{\theta-1}R^{\lambda}S^{\mu-1}$, $qz^{\theta+n-1}R^{\lambda}S^{\mu-1}$, $rz^{\theta+2n-1}R^{\lambda}S^{\mu-1}$, ſi in R, ſeu $e+fz^{n}+gz^{2n}$, ducantur, ac deinde ad R viciſſim applicentur, evadunt $\overline{pe+pfz^{n}+pgz^{2n}} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$, $\overline{qez^{n}+qfz^{2n}+qgz^{3n}} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$, $\overline{rez^{2n}+rfz^{3n}+rfz^{4n}} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$. Et per Prop. IV. eſt $z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}$ Area Curvæ, cujus Ordinata eſt $\text{a}+\text{b}z^{n}+\text{c}z^{2n}+\text{d}z^{3n} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$; deſignantibus a, b, c, d, coefficientes è formulâ Propoſitionis IV. deſumendas. Et $bz^{\theta+n}R^{\lambda}S^{\mu}$ Area erit curvæ, cujus Ordinata eſt $\grave{\text{a}}bz^{n}+\grave{\text{b}}bz^{2n}+\grave{\text{c}}bz^{3n}+\grave{\text{d}}bz^{4n} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$, de-
ſignantibus

DEMONSTRATIO

signantibus notis, $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$, $\dot{d}$, coefficientes è formulâ Propositionis IV. desumendas. Et harum quinque arearum summa est $pA+qB+rC+z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}+hz^{\theta+\eta}R^{\lambda}S^{\mu}$, et summa ordinatarum

$$\left.\begin{array}{l} a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+dz^{3\eta} \\ \quad +\dot{a}hz^{\eta}+\dot{b}hz^{2\eta}+\dot{c}hz^{3\eta}+\dot{d}hz^{4\eta} \\ +pe+pfz^{\eta}+pgz^{2\eta} \\ \quad +qez^{\eta}+qfz^{2\eta}+qgz^{3\eta} \\ \qquad +rez^{2\eta}+rfz^{3\eta}+rgz^{4\eta} \end{array}\right\} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}.$$

Jam si summæ ordinatarum membra præter tertium omnia nihilo æquentur singulatim, nacti erimus quatuor æquationes, ad quatuor illas, h, q, p, r, quæ indefinitè positæ sunt, definiendas. Tum si in symbolo summæ arearum, $pA+qB+rC+z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}+hz^{\theta+\eta}R^{\lambda}S^{\mu}$, pro p, q, r, h ponantur earum æstimationes, quæ ex æquationibus illis quatuor venerint; habebimus Aream Curvæ, cujus Ordinata erit $\overline{c+\dot{b}h+pg+qf+re}\,z^{2\eta}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$. Et utramque, aream dico et ordinatam, ab illâ $\overline{c+\dot{b}h+pg+qf+re}$ dividendo, habebimus Aream curvæ, cujus Ordinata erit $z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$. Dicatur illa area F.

Simili ratione, si summæ ordinatarum membra præter secundum omnia nihilo æquentur, invenietur Area Curvæ, cujus Ordinata erit $z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$. Dicatur area illa E.

Atque rursum si membra omnia summæ ordinatarum præter primum nihilo æquentur, invenietur Area curvæ, cujus Ordinata erit $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$. Dicatur area illa D. Et quâ ratione ex areis tribus A, B, C, inventæ sunt areæ D, E, F, ex tribus illis D, E, F, inveniri possunt tres aliæ G, H, K; eodemque deinceps usque modo.

A L I T E R.

Et ad computandi usum magis accommodatè.

Sint Curvæ A, B, C, D,
Quarum Ordinatæ $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$, $z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$, $z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$, $z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$.

Curvæ $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$,
Quarum Ordinatæ $z^{\theta-1}R^{\lambda}S^{\mu-1}$, $z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda}S^{\mu-1}$, $z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda}S^{\mu-1}$, $z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda}S^{\mu-1}$.

Curvæ $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$,
Quarum Ordinatæ $z^{\theta-1}R^{\lambda+1}S^{\mu-1}$, $z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda+1}S^{\mu-1}$, $z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda+1}S^{\mu-1}$, $z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda+1}S^{\mu-1}$.

Curvæ $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$,
Quarum Ordinatæ $z^{\theta-1}R^{\lambda+2}S^{\mu-1}$, $z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda+2}S^{\mu-1}$, $z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda+2}S^{\mu-1}$, $z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda+2}S^{\mu-1}$.

Et progressio infinita sit.

Dico primùm datâ serie infinitâ A, B, C, D, E, superiores omnes usque dari.
Erit enim $\mathcal{A} = eA+fB+gC+hD+$,
Erit etiam $\mathcal{B} = eB+fC+gD+hE+$,
$\mathcal{C} = eC+fD+gE+hF$,
Et simili deinceps usque modo. Hæc enim simili prorsus argumentatione ostendentur, quâ in superiore propositione ostensa sunt. Datâ igitur serie infinitâ A, B, C, D, E, dabitur $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, proximè superior. Tum hâc datâ, dabitur etiam huic proxima, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, Eodemque modo pedetentim usque progredi licebit.

Dico præterea è duabus areis A, B, si quantitates R, S, duorum utraque sint nominum, è tribus A, B, C, si altera duorum altera trium fuerit, semper ex areis infinitæ seriei binario paucioribus quàm sunt nomina quantitatum, R, S, simul sumpta, Areas omnes progressionum omnium usque dari.

Nam si, R, S, duorum tantùm utraque sit nominum, datis A, B, dabitur tota series A, B, C, D, per Casum primum. Quare et reliquæ dabuntur, per ea quæ modò sunt ostensa. Rursum si duarum R, S, altera duorum, altera trium nominum fuerit, datis tribus A, B, C, dabitur series tota prima, per casum primum. Unde rursum reliquæ dabuntur. Et quotvis demum nominum quantitatum R, S hæc vel illa fuerit, vigebit usque similis ratiocinatio.

Eodem modo Propositionem approbare licebit, si index μ augeatur, vel diminuatur, unitatibus.

C A S.

C A S. III.

Si igitur tam index μ quàm index λ, perpetuâ additione, vel fubductione, unitatum augeatur vel minuatur, dabuntur Areæ ordinatis fingulatim refpondentes.

C A S. IV.

Cafum fecundum cum primo conjungendo, fi tam index θ, perpetuâ additione vel fubductione quantitatis n, quam indicum λ vel μ alteruter, perpetuâ additione vel fubductione unitatis, augeatur vel minuatur, dabuntur Areæ ordinatis fingulatim refpondentes.

C A S. V.

Et cafum tertium cum primo conjungendo, fi tam index θ, perpetuâ additione vel fubductione quantitatis n, quam uterque λ, μ, perpetuâ unitatum additione vel fubductione, augeatur vel minuatur, dabuntur Areæ ordinatis fingulatim refpondentes.

C A S. VI.

Et universè, fi dentur Areæ duabus pauciores quàm funt nomina quantitatum R, S fimul fumpta, dabuntur omnes. Nam quotcunque nominum illæ R, S, fuerint, eadem erit demonftrandi ratio, ficut jam antè in cafu primo monuimus.

2. Reftat ut æquationes Canonicas defcribamus.

CANONICÆ PRIMI CASUS.

I. Si, quantitates R, S utraque è duobus conftent nominibus

$$1.\ C = \frac{z^\theta R^\lambda S^\mu - \theta ek\,A \begin{matrix} -\overline{\theta+\lambda n}\,fk \\ -\overline{\theta+\mu n}\,el \end{matrix} B}{\theta+\lambda n+\mu n\,fl}$$

$$2.\ B = \frac{z^\theta R^\lambda S^\mu - \theta ek\,A - \overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl\,C}{\overline{\theta+\lambda n}\,fk + \overline{\theta+\mu n}\,el}$$

$$3.\ A = \frac{z^\theta R^\lambda S^\mu \begin{matrix} -\overline{\theta+\lambda n}\,fk \\ -\overline{\theta+\mu n}\,el \end{matrix} B - \overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl\,C}{\theta ek}$$

II. Si R ex tribus conftet nominibus, S è duobus.

$$1.\ D = \frac{z^\theta R^\lambda S^\mu - \theta ek\,A \begin{matrix} -\overline{\theta+\lambda n}\,fk \\ -\overline{\theta+\mu n}\,el \end{matrix} B \begin{matrix} -\overline{\theta+2\lambda n}\,gk \\ -\overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl \end{matrix} C}{\overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl}$$

$$2.\ C = \frac{z^\theta R^\lambda S^\mu - \theta ek\,A \begin{matrix} -\overline{\theta+\lambda n}\,fk \\ -\overline{\theta+\mu n}\,el \end{matrix} B - \overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl\,D}{\overline{\theta+2\lambda n}\,gk + \overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl}$$

$$3.\ B = \frac{z^\theta R^\lambda S^\mu - \theta ek\,A \begin{matrix} -\overline{\theta+2\lambda n}\,gk \\ -\overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl \end{matrix} C - \overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl\,D}{\overline{\theta+\lambda n}\,fk + \overline{\theta+\mu n}\,el}$$

$$4.\ A = \frac{z^\theta R^\lambda S^\mu \begin{matrix} -\overline{\theta+\lambda n}\,fk \\ -\overline{\theta+\mu n}\,el \end{matrix} B \begin{matrix} -\overline{\theta+2\lambda n}\,gk \\ -\overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl \end{matrix} C - \overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl\,D}{\theta ek}$$

III. Si R, S ex tribus utraque conftet nominibus

Prop. IX.

PROP. IX. THEOR. VII.

Æquantur Curvarum Areæ inter se quarum Ordinatæ sunt reciprocè ut fluxiones abscissarum(ee).

Nam contenta sub ordinatis & fluxionibus Abscissarum erunt æqualia; & fluxiones arearum sunt ut hæc contenta.

COROL. I.

Si assumatur relatio quævis inter abscissas duarum curvarum, & inde per Prop. 1. quæratur relatio fluxionum abscissarum, & ponantur Ordinatæ reciprocè proportionales fluxionibus, inveniri possunt innumeræ Curvæ, quarum Areæ sibi mutuò æquales erunt (ff).

COROL. II.

Sic enim curva omnis, cujus hæc est ordinata $z^{\theta-1} \times \overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda}$, assumendo quantitatem quamvis pro ν, & ponendo

Æquat. Canon. Prop. VIII. Cas. I.

$$1.\ E = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu} - \theta ek A \begin{matrix} -\overline{\theta+\lambda\eta}|fk \\ -\overline{\theta+\mu\eta}|el \end{matrix} B \begin{matrix} -\overline{\theta+2\lambda\eta}|gk \\ -\overline{\theta+\lambda\eta+\mu\eta}|fl \\ -\overline{\theta+\mu\eta}|em \end{matrix} C \begin{matrix} -\overline{\theta+2\lambda\eta+\mu\eta}|gl \\ -\overline{\theta+\lambda\eta+2\mu\eta}|fm \end{matrix} D}{\overline{\theta+2\lambda\eta+2\mu\eta}|gm}.$$

$$2.\ D = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu} - \theta ek A \begin{matrix} -\overline{\theta+\lambda\eta}|fk \\ -\overline{\theta+\mu\eta}|el \end{matrix} B \begin{matrix} -\overline{\theta+2\lambda\eta}|gk \\ -\overline{\theta+\lambda\eta+\mu\eta}|fl \\ -\overline{\theta+2\mu\eta}|em \end{matrix} C - \overline{\theta+2\lambda\eta+2\mu\eta}|gm E}{\overline{\theta+2\lambda\eta+\mu\eta}|gl + \overline{\theta+\lambda\eta+2\mu\eta}|fm}$$

$$3.\ C = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu} - \theta ek A \begin{matrix} -\overline{\theta+\lambda\eta}|fk \\ -\overline{\theta+\mu\eta}|el \end{matrix} B \begin{matrix} -\overline{\theta+2\lambda\eta+\mu\eta}|gl \\ -\overline{\theta+\lambda\eta+2\mu\eta}|fm \end{matrix} D - \overline{\theta+2\lambda\eta+2\mu\eta}|gm E}{\overline{\theta+2\lambda\eta}|gk + \overline{\theta+\lambda\eta+\mu\eta}|fl + \overline{\theta+2\mu\eta}|em}$$

$$4.\ B = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu} - \theta ek A \begin{matrix} -\overline{\theta+2\lambda\eta}|gk \\ -\overline{\theta+\lambda\eta+\mu\eta}|fl \\ -\overline{\theta+2\mu\eta}|em \end{matrix} C \begin{matrix} -\overline{\theta+2\lambda\eta+\mu\eta}|gl \\ -\overline{\theta+\lambda\eta+2\mu\eta}|fm \end{matrix} D - \overline{\theta+2\lambda\eta+2\mu\eta}|gm E}{\overline{\theta+\lambda\eta}|fk + \overline{\theta+\mu\eta}|el}$$

$$5.\ A = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu} \begin{matrix} -\overline{\theta+\lambda\eta}|fk \\ -\overline{\theta+\mu\eta}|el \end{matrix} B \begin{matrix} -\overline{\theta+2\lambda\eta}|gk \\ -\overline{\theta+\lambda\eta+\mu\eta}|fl \\ -\overline{\theta+2\mu\eta}|em \end{matrix} C \begin{matrix} -\overline{\theta+2\lambda\eta+\mu\eta}|gl \\ -\overline{\theta+\lambda\eta+2\mu\eta}|fm \end{matrix} D - \overline{\theta+2\lambda\eta+2\mu\eta}|gm E}{\theta ek}$$

IV. Si

ponendo $\frac{\eta}{\nu}=s$, & $z^{s}=x$, migrat in aliam sibi æqualem, cujus Ordinata est $\frac{\nu}{\eta}x^{\frac{\nu\theta-\eta}{\eta}}\times\overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\text{\&c.}}|^{\lambda}$ (gg). Prop. IX. Cor. III & IV.

COROL. III.

Et Curva omnis, cujus Ordinata est $z^{\theta-1}\times\overline{a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+\text{\&c.}}$ $\times\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\text{\&c.}}|^{\lambda}$, assumendo quantitatem quamvis pro ν, & ponendo $\frac{\eta}{\nu}=s$, & $z^{s}=x$, migrat in aliam sibi æqualem, cujus Ordinata est $\frac{\nu}{\eta}x^{\frac{\nu\theta-\eta}{\eta}}\times\overline{a+bx^{\nu}+cx^{2\nu}+\text{\&c.}}\times\overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\text{\&c.}}|^{\lambda}$.

COROL. IV.

Et Curva omnis, cujus Ordinata est $z^{\theta-1}\times\overline{a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+\text{\&c.}}|$ $\times\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\text{\&c.}}|^{\lambda}\times\overline{k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+\text{\&c.}}|^{\mu}$, assumendo quantitatem quamvis pro ν, & ponendo $\frac{\eta}{\nu}=s$, & $z^{s}=x$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $\frac{\nu}{\eta}x^{\frac{\nu\theta-\eta}{\eta}}\times\overline{a+bx^{\nu}+cx^{2\nu}+\text{\&c.}}$ $\times\overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\text{\&c.}}|^{\lambda}\times\overline{k+lx^{\nu}+mx^{2\nu}+\text{\&c}}|^{\mu}$.

IV. Si R ex quatuor constet nominibus, S ex duobus.

$$1.\ E=\frac{z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}-\overline{\theta+\lambda n}|fk\ B\ -\overline{\theta+2\lambda n}|gk\ C\ -\overline{\theta+3\lambda n}|hk\ D}{\begin{array}{c}-\overline{\theta+\mu n}|el\quad -\overline{\theta+\lambda n+\mu n}|fl\quad -\overline{\theta+2\lambda n+\mu n}|gl\\ \hline \overline{\theta+3\lambda n+\mu n}|hl\end{array}}$$

(ee) Dummodo simul à nihilo generari inceperint. Aliter enim altera alterâ dato major erit (Geometr. Flux. Prop. II.) Arearum autem partes simul genitæ vel sic etiam æquales erunt.

(ff) Vide Geometr. Analyt. Prop. VIII.

(gg) Ponatur enim $z^{\theta-1}\times\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+}|^{\lambda},=y$, et sit v Ordinata, x Abscissa curvæ cujusdam, cujus Area areæ alterius, cujus Ordinata sit y Abscissa z, semper sit æqualis. Abscissarum igitur fluxiones inversas Ordinatarum inter se proportiones gerunt (ex hâc Prop.) Hoc est $\dot{z}:\dot{x}=v:y$. Sed propter $z^{s}=x$, erit $\dot{x}=sz^{s-1}\dot{z}$. Quare $v:y=\dot{z}:sz^{s-1}\dot{z}=1:sz^{s-1}$. Quare $v=\frac{y}{sz^{s-1}}=\frac{1}{s}z^{\theta-s}\times\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+,}|^{\lambda}$. Sed propter $\frac{\eta}{\nu}=s$, erit $\frac{1}{s}=\frac{\nu}{\eta}$. Et propter $z^{s}=x$, erit $z=x^{\frac{1}{s}}$, et $z^{\theta}=x^{\frac{\theta}{s}}=x^{\frac{\nu\theta}{\eta}}$, et $z^{\theta-s}=x^{\frac{\nu\theta}{\eta}-1}=x^{\frac{\nu\theta-\eta}{\eta}}$. Et $z^{\eta}=x^{\frac{\eta}{s}}=x^{\nu}$. Ergo $z^{2\eta}=x^{2\nu}$; $z^{3\eta}=x^{3\nu}$; * * *; $z^{m\eta}=x^{m\nu}$. Quare $\frac{1}{s}z^{\theta-s}\times\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+,}|^{\lambda}=v=\frac{\nu}{\eta}x^{\frac{\nu\theta-\eta}{\eta}}\times\overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+,}|^{\lambda}$. Q. E. D. Demonstratio Cor. II.

Similem hujus Corollarii demonstrationem in commentariis suis Stewartus attulit.

 COROL.

PROP. IX. COR. V. & VI.

COROL. V.

Et Curva omnis cujus Ordinata est $z^{\theta-1} \times \overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+ \&c.}|^{\lambda}$, ponendo $\frac{1}{z}=x$, migrat in aliam sibi æqualem, cujus Ordinata est $\frac{1}{x^{\theta+1}} \times \overline{e+fx^{-\eta}+gx^{-2\eta}+ \&c.}|^{\lambda}$: id est $\frac{1}{x^{\theta+1+\eta\lambda}} \times \overline{f+ex^{\eta}}|^{\lambda}$, si duo sunt nomina in vinculo radicis: vel $\frac{1}{x^{\theta+1+2\eta\lambda}} \times \overline{g+fx^{\eta}+ex^{2\eta}}|^{\lambda}$, si tria sunt nomina; & sic deinceps.

COROL. VI.

Et Curva omnis cujus Ordinata est $z^{\theta-1} \times \overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+ \&c.}|^{\lambda} \times \overline{k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+ \&c.}|^{\mu}$, ponendo $\frac{1}{z}=x$, migrat in aliam sibi æqualem, cujus Ordinata est $\frac{1}{x^{\theta+1}} \times \overline{e+fx^{-\eta}+gx^{-2\eta}+ \&c.}|^{\lambda} \times \overline{k+lx^{-\eta}+mx^{-2\eta}+ \&c}|^{\mu}$: id est $\frac{1}{x^{\theta+1+\eta\lambda+\eta\mu}} \times \overline{f+ex^{\eta}}|^{\lambda} \times \overline{l+kx^{\eta}}|^{\mu}$, si bina sunt nomina in vinculis radicum: vel $\frac{1}{x^{\theta+1+2\eta\lambda+\eta\mu}} \times \overline{g+fx^{\eta}+ex^{2\eta}}|^{\lambda} \times \overline{l+kx^{\eta}}|^{\mu}$, si tria sunt nomina in vinculo radicis prioris, ac duo in vinculo posterioris: & sic in aliis.

Et

(b) Editionem principem cum Stewarto sequor. Editio Jonesii habuit $\frac{\eta-\theta}{\alpha\theta-\beta\eta}$. Vitiosè.

DEMONSTRATIO COR. VII.

(d) Hujus Corollarii hanc ferè demonstrationem Stewartus attulit.

Hæ sunt æquationes à Newtono positæ, præter illam ad curvam scilicet cujus abscissa z, ordinata y.

1. $s=\frac{\eta-\theta}{\eta}$. 2. $x=\frac{1}{s}z^{s}$. 3. $\lambda=\frac{\eta-\theta}{\alpha\theta+\beta\eta}$.

Ex quibus has alias deducere licet.

1. $s^{\frac{1}{s}}x^{\frac{1}{s}}=z$. 2. $s^{\frac{\beta}{s}}x^{\frac{\beta}{s}}=z^{\beta}$. 3. $s^{\frac{\theta}{s}}x^{\frac{\theta}{s}}=z^{\theta}$ (ex secundâ positarum). 4. $\eta-\eta s=\theta$ (ex primâ positarum). 5. $\frac{s}{\frac{1}{\eta}\alpha\theta+\beta}=\lambda$ (per primam et tertiam positarum). 6. $\frac{\alpha+\beta-s\alpha}{s}=\frac{1}{\lambda}$ (per 4m & 5m deductarum).

Jam cùm Area curvæ cujus Abscissa est z Ordinata y, alterius areæ sit æqualis, cujus Abscissa x, Ordinata v, idcirco abscissarum Fluxiones inversas ordinatarum inter se proportiones gerent. Hoc est, erit $\dot{z}:\dot{x}=v:y$. Sed, per æquationem positarum secundam, $\dot{z}:\dot{x}=1:z^{s-1}$. Ergo $v:y=1:z^{s-1}=z:z^{s}$. Sed $z:z^{s}=s^{\frac{1}{s}}x^{\frac{1}{s}}:sx$ (per æquationes deductarum primam et positarum secundam). Ergo $v:y=s^{\frac{1}{s}}x^{\frac{1}{s}}:sx$. Hinc æquationes aliæ venient. Nempe, 7. $y=s^{\frac{s-1}{s}}$

Et nota, quòd Areæ duæ æquales, in noviſſimis hiſce duobus Corollariis, jacent ad contrarias partes Ordinatarum. Si area in alterutrâ Curvâ adjacet abſciſſæ, area huic æqualis, in alterâ Curvâ, adjacet abſciſſæ productæ. PROP. IX. COR. VII. & VIII.

COROL. VII.

Si relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam, y, & Abſciſſam z, definiatur per æquationem quamvis affectam hujus formæ, $y^\alpha \times \overline{e+fy^\eta z^\delta+gy^{2\eta}z^{2\delta}+hy^{3\eta}z^{3\delta}+\&c.} = z^\beta \times \overline{k+ly^\eta z^\delta+my^{2\eta}z^{2\delta}+\&c.}$ hæc figura, aſſumendo $s=\frac{\eta-\delta}{\eta}$, $x=\frac{1}{s}z^s$, & $\lambda=\frac{\eta-\delta}{\alpha\delta+\beta\eta}$ (hh), migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Abſciſſa x, ex datâ Ordinatâ v, determinatur per æquationem non affectam; $\frac{1}{s}v^{\alpha\lambda}\times\overline{e+fv^\eta+gv^{2\eta}+\&c.}|^\lambda \times \overline{k+lv^\eta+mv^{2\eta}+\&c.}|^{-\lambda}=x$ (ii).

COROL. VIII.

Si relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam, y, & Abſciſſam, z, definitur per æquationem quamvis affectam hujus formæ,

$$y^\alpha\times\overline{e+fy^\eta z^\delta+gy^{2\eta}z^{2\delta}+\&c.} = z^\beta\times\overline{k+ly^\eta z^\delta+my^{2\eta}z^{2\delta}+\&c.}$$
$$+ z^\gamma\times\overline{p+qy^\eta z^\delta+ry^{2\eta}z^{2\delta}+\&c.}$$

hæc figura, aſſumendo $s=\frac{\eta-\delta}{\eta}$, $x=\frac{1}{s}z^s$, $\mu=\frac{\alpha\delta+\beta\eta}{\eta-\delta}$, & $\nu=\frac{\alpha\delta+\gamma\eta}{\eta-\delta}$,

$s^{\frac{s-1}{s}}x^{\frac{s-1}{s}}v$. 8. $y^\eta = s^{\frac{\eta s-\eta}{s}}x^{\frac{\eta s-\eta}{s}}v^\eta$. 9. $y^\alpha = s^{\frac{\alpha s-\alpha}{s}}x^{\frac{\alpha s-\alpha}{s}}v^\alpha$. Cæterùm $\frac{\eta s-\eta}{s}=-\frac{\delta}{s}$ (per æquationem deductarum quartam.) Unde noviſſima in hanc migrabit. 10. $y^\eta = s^{-\frac{\delta}{s}}x^{-\frac{\delta}{s}}v^\eta$. Ex hàc autem et tertiâ deductarum efficietur, 11. $y^\eta z^\delta = v^\eta$. Ac propterea $y^{2\eta}z^{2\delta}=v^{2\eta}$, $y^{3\eta}z^{3\delta}=v^{3\eta}$, $y^{4\eta}z^{4\delta}=v^{4\eta}$, eodemque uſque modo. Jam in æquationem ad curvam, cujus abſciſſa z, ordinata y, in hujus inquam æquationem à Newtono poſitam, pro z^β, y^α, $y^\eta z^\delta$, ſubſtituantur earum æſtimationes, æquationibus deductarum 2ª. 8ª. et 11ª expoſitæ; et æquatio illa in hanc tranſmutabitur. $s^{\frac{\alpha s-\alpha}{s}}x^{\frac{\alpha s-\alpha}{s}}v^\alpha\times\overline{e+fv^\eta+gv^{2\eta}+hv^{3\eta}+,} = s^{\frac{\beta}{s}}x^{\frac{\beta}{s}}\times\overline{k+lv^\eta+mv^{2\eta}+nv^{3\eta}+}|$. Utramque hujus æquationis partem dividat quantitas, $x^{\frac{\alpha s-\alpha}{s}}\times s^{\frac{\beta}{s}}\times\overline{k+lv^\eta+mv^{2\eta}+}|$. Fiet $s^{\frac{\alpha s-\alpha-\beta}{s}}v^\alpha\times\overline{e+fv^\eta+gv^{2\eta}+hv^{3\eta}+,}|\times\overline{k+lv^\eta+mv^{2\eta}+}|^{-1}=x^{\frac{\beta+\alpha-\alpha s}{s}}$. Hoc eſt, per æquationem deductarum 6ᵃ. $s^{-\frac{1}{\lambda}}v^\alpha\times\overline{e+fv^\eta+gv^{2\eta}+hv^{3\eta}+,}|\times\overline{k+lv^\eta+mv^{2\eta}+}|^{-1}=x^{\frac{1}{\lambda}}$. Hujus denique pars utraque evehatur ad gradum illum cujus index quantitas λ; fiet $\frac{1}{s}v^{\alpha\lambda}\times\overline{e+fv^\eta+gv^{2\eta}+hv^{3\eta}+}|^\lambda\times\overline{k+lv^\eta+mv^{2\eta}+,}|^{-\lambda}=x$. Q. E. D. DEMONSTRATIO COR. VII.

Prop. IX. Cor. IX.

migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Abſciſſa, x, ex datâ Ordinatâ, v, determinatur per æquationem minùs affectam;

$$v^n\times\overline{e+fv^n+gv^{2n}+\&c.}=s^{\mu}x^{\mu}\times\overline{k+lv^n+mv^{2n}+\&c.}$$
$$+s^{\nu}x^{\nu}\times\overline{p+qv^n+rv^{2n}+\&c}\ \text{(kk)}.$$

COROL. IX.

Curva omnis cujus Ordinata eſt $\pi z^{\delta-1}\times\overline{\gamma e+\overline{\gamma+\eta}fz^n+\overline{\gamma+2\eta}gz^{2n}+\&c.}$ $\times\overline{e+fz^n+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda-1}$ in $\overline{a+b\times\overline{ez^\eta+fz^{\eta+n}+gz^{\eta+2n}+\&c.}|^{\tau}}|^{\mu}$, ſi ſit $\theta=\lambda\gamma$, & aſſumantur $x=\overline{ez^\eta+fz^{\eta+n}+gz^{\eta+2n}+\&c.}|^{\tau}$, $\sigma=\frac{\tau}{\eta}$, & $\vartheta=\frac{\lambda-\tau}{\tau}$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $x^{\vartheta}\times\overline{a+bx^{\sigma}}|^{\mu}$ (ll). Et nota, quòd Ordinata prior in hoc corollario evadit ſimplicior, ponendo $\lambda=1$, vel ponendo $\tau=1$; & efficiendo, ut radix dignitatis

Demonstratio Cor. VIII.

(kk) Hujus Corollarii veritatem cum Stewarto ſic oſtendimus.

Hæ ſunt æquationes à Newtono poſitæ, præter illam ad Curvam ſcilicet cujus abſciſſa z, ordinata y. 1. $s=\frac{\eta-\delta}{\eta}$. 2. $x=\frac{1}{s}z^{s}$. 3. $\mu=\frac{\alpha\delta+\beta\eta}{\eta-\delta}$. 4. $\nu=\frac{\alpha\delta+\gamma\eta}{\eta-\delta}$. Quarum duæ primæ eædem ſunt ac duæ primæ poſitarum corollarii ſuperioris. Cæterùm quatuor illarum $\dot{z}$, $\dot{x}$, v, y eadem erit in hoc, atque in illo fuit, proportionis convenientia. Quare deductæ etiam Corollarii ſuperioris, quarum ope æquationis ad Curvam tranſmutationes efficiebantur, hæ inquam omnes, præter quintam et ſextam, in hoc etiam obtinebunt. Utpote quæ omnes, præter illas, duabus poſitarum primis, & analogiâ illâ nituntur, quam analogiam huic cum illo communem diximus. Loco autem 5æ & 6æ corollarii ſuperioris, venient $\frac{s}{\frac{1}{\eta}\alpha\delta+\beta}=\frac{1}{\mu}$ (ex primâ et tertiâ poſitarum) et $\frac{\alpha+\beta-\alpha s}{s}=\mu$ (è noviſſimâ, et quartâ deductarum Corollarii ſuperioris).

Ex primâ autem et quartâ poſitarum elicietur $\frac{s}{\frac{1}{\eta}\alpha\delta+\gamma}=\frac{1}{\nu}$: et ex hâc et quartâ deductarum Corollarii ſuperioris, $\frac{\alpha+\gamma-\alpha s}{s}=\nu$. Præterea ex ſecundâ poſitarum elicietur, $z^{\gamma}=s^{\frac{\gamma}{s}}x^{\frac{\gamma}{s}}$. Jam in æquationem ad curvam cujus abſciſſa z, ordinata y, in hujus inquam æquationem à Newtono poſitam, pro y^{η}, z^{β}, $y^{\eta}z^{\delta}$ ſubſtituantur earum æſtimationes æquationibus deductarum ſuperioris 2a. 8a. et 11a. expoſitæ; et pro z^{γ} ſubſtituatur $s^{\frac{\gamma}{s}}x^{\frac{\gamma}{s}}$; et æquatio illa in hanc tranſmutabitur; $s^{\frac{sm-\alpha}{s}}x^{\frac{sm-\alpha}{s}}v^{n}\times\overline{e+fv^{\eta}+gv^{2\eta}+hv^{3\eta}+,}=s^{\frac{\beta}{s}}x^{\frac{\beta}{s}}\times\overline{k+lv^{\eta}+mv^{2\eta}+,}+s^{\frac{\gamma}{s}}x^{\frac{\gamma}{s}}\times\overline{p+qv^{\eta}+rv^{2\eta}+}$. Hujus pars utraque à quantitate $s^{\frac{sm-\alpha}{s}}x^{\frac{sm-\alpha}{s}}$ dividatur; fiet $v^{n}\times$

$$\overline{e+fv^{\eta}+gv^{2\eta}+hv^{3\eta}+,}=s^{\frac{\alpha+\beta-sm}{s}}x^{\frac{\alpha+\beta-sm}{s}}\times\overline{k+lv^{\eta}+mv^{2\eta}+,}$$
$$+s^{\frac{\alpha+\gamma-sm}{s}}x^{\frac{\alpha+\gamma-sm}{s}}\times\overline{p+qv^{\eta}+rv^{2\eta}+,}$$

Unde pro illis $\frac{\alpha+\beta-sm}{s}$, $\frac{\alpha+\gamma-sm}{s}$ ſcriptis μ, ν, veniet tandem æquatio quantitatum v, x, ab ipſo Newtono poſita. Q. E. D.

(ll) Ostenⅾ-

tatis extrahi possit, cujus index est ω; vel etiam ponendo $\iota=-1$, & $\lambda=1=\tau=\sigma=\pi$, ut alios casus prætercam. Prop. IX. Cor. X.

COROL. X.

Pro $\overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+\eta}+gz^{\nu+2\eta}+\&c.}$ $\overline{\nu ez^{\nu-1}+\overline{\nu+\eta}fz^{\nu+\eta-1}+\overline{\nu+2\eta}gz^{\nu+2\eta-1}+\&c.}$ $\overline{k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+\&c.}$ et $\overline{\eta lz^{\eta-1}+2\eta mz^{2\eta-1}+\&c.}$ scribantur R, r, S, & s respectivè; & Curva omnis cujus Ordinata est $\overline{\pi Sr+\phi Rs}\times R^{\lambda-1}S^{\mu-1}\times\overline{aS^{-\nu}+bR^{\tau}}|^{\omega}$ (mm), si sit $\frac{\mu-\nu\omega}{\lambda}=\frac{\nu}{\tau}=\frac{\phi}{\pi}$, $\frac{\tau}{\pi}=\sigma$, $\frac{\lambda-\pi}{\pi}=\vartheta$, & $R^{\pi}S^{\phi}=x$, migrat in aliam sibi æqualem, cujus Ordinata est $x^{\vartheta}\times\overline{a+bx^{\sigma}}|^{\omega}$. (nn) Et nota, quòd Ordinata prior evadit simplicior, ponendo unitates

pro

(ll) Ostendimus quod Newtonus dicit hoc modo. Demonstratio Cor. IX.

Hæ sunt æquationes à Newtono positæ 1. $\theta=\lambda\nu$. 2. $x=\overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+\eta}+gz^{\nu+2\eta}+,}|^{\pi}$. 3. $\sigma=\frac{\tau}{\pi}$. 4. $\vartheta=\frac{\lambda-\pi}{\pi}$. Ponantur præterea, 5. $\overline{\nu e+\overline{\nu+\eta}fz^{\eta}+\overline{\nu+2\eta}gz^{2\eta}+,}=R$. 6. $\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+,}=S$. 7. $\overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+\eta}+gz^{\nu+2\eta}+}=\Sigma$. 8. $\overline{\nu ez^{\nu-1}+\overline{\nu+\eta}fz^{\nu+\eta-1}+\overline{\nu+2\eta}gz^{\nu+2\eta-1}+,}=\Gamma$.

Ex his æquationibus hæ aliæ deducentur.

1. $x=\Sigma^{\pi}$ (ex 2ª & 7ª positarum) Ergo 2. $\frac{\dot{x}}{\pi\Sigma^{\pi-1}}=\dot{\Sigma}$. 3. $\dot{\Sigma}=\Gamma\dot{z}$ (per 7ᵐ et 8ᵐ positarum) 4. $S=\frac{\Sigma}{z^{\nu}}$ (ex sextâ et septimâ positarum) Ex hâc autem, et eâ quæ primùm deducebatur, veniet 5. $S=x^{\frac{1}{\pi}}z^{-\nu}$.

Datæ autem curvæ Ordinata significabitur hoc symbolo; $\pi z^{\theta-1}\times R\times S^{\lambda-1}\times\overline{a+b\Sigma^{\tau}}|^{\omega}$.

Curvæ transmutatæ, cujus abscissa x, Ordinata designetur literâ O.

Erit igitur $\dot{x}:\dot{z}=\pi z^{\theta-1}\times R\times S^{\lambda-1}\times\overline{a+b\Sigma^{\tau}}|^{\omega}:O$. Sed (per æquationes 2ᵐ & 3ᵐ deductarum) efficitur $\dot{x}:\dot{z}=\Gamma:\frac{1}{\pi\Sigma^{\pi-1}}$. Ergo $\pi z^{\theta-1}\times R\times S^{\lambda-1}\times\overline{a+b\Sigma^{\tau}}|^{\omega}:O=\Gamma:\frac{1}{\pi\Sigma^{\pi-1}}$. Ergo $O=\frac{z^{\theta-1}\times R}{\Gamma}\times\frac{S^{\lambda-1}}{\Sigma^{\pi-1}}\times\overline{a+b\Sigma^{\tau}}|^{\omega}$. Sed (per æquationem deductarum quintam) $S^{\lambda-1}=x^{\frac{\lambda-1}{\pi}}z^{\nu-\lambda\nu}$. Et (per æquationem deductarum primam) $\Sigma^{\pi-1}=x^{\frac{\pi-1}{\pi}}$. Quare $\frac{S^{\lambda-1}}{\Sigma^{\pi-1}}=x^{\frac{\lambda-\pi}{\pi}}z^{\nu-\lambda\nu}=x^{\vartheta}z^{\nu-\theta}$ (per æquationes positarum 4ᵐ & 1ᵐ). Hinc $O=\frac{z^{\nu-1}x^{\vartheta}\times R}{\Gamma}\times\overline{a+b\Sigma^{\tau}}|^{\omega}$. Sed $z^{\nu-1}\times R=\Gamma$ (per æquationes quintam et octavam positarum). Ergo $O=\frac{x^{\vartheta}\times\Gamma}{\Gamma}\times\overline{a+b\Sigma^{\tau}}|^{\omega}=x^{\vartheta}\times\overline{a+b\Sigma^{\tau}}|^{\omega}$. Sed $\Sigma^{\tau}=x^{\frac{\tau}{\pi}}$ (per æquationem deductarum primam) $=x^{\sigma}$ (per æquationem positarum tertiam). Ergo $O=x^{\vartheta}\times\overline{a+bx^{\sigma}}|^{\omega}$. Q. E. D.

(mm) Stewarti emendationem sequor. Editiones ipsius priores habuere $\overline{aS^{\nu}+bR^{\tau}}|^{\omega}$; vitiosè.

(nn) Hujus Corollarii veritatem cum Stewarto sic ostendimus.
Hæ sunt æquationes à Newtono positæ.
1. $\overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+\eta}+gz^{\nu+2\eta}+,}=R$.

2.

PROP. X. pro τ, υ, & λ vel μ, & faciendo, ut radix dignitatis extrahi possit, cujus index est ω; vel ponendo $\omega=-1$, vel $\mu=0$.

PROP. X. PROB. III.

Invenire figuras simplicissimas, cum quibus Curva quævis geometricè comparari potest, cujus Ordinatim applicata, y, per æquationem non affectam ex datâ Abscissâ, z, determinatur.

CAS. I.

Sit Ordinata $az^{\theta-1}$, & Area erit $\frac{1}{\theta}az^{\theta}$, ut ex Prop. v. ponendo $b=0=c=d=f=g=h$, & $e=1$, facilè colligitur.

CAS. II.

Sit Ordinata $az^{\theta-1}\times\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda-1}$; et si Curva cum figuris rectilineis geometricè comparari potest, quadrabitur per Prop. v. ponendo $b=0=c=d$. Sin minùs, convertetur in aliam curvam sibi æqualem, cujus Ordinata est $\frac{a}{\eta}x^{\frac{\theta-\eta}{\eta}}\times\overline{e+fx+gx^{2}+\&c.}|^{\lambda-1}$ per Corol. 2. Prop. IX. Deinde si de dignitatum indicibus $\frac{\theta-\eta}{\eta}$ & $\lambda-1$ (per Prop. VII.) rejiciantur unitates, donec dignitates illæ fiant quàm minimæ, devenietur ad figuras simplicissimas, quæ hâc ratione colligi possunt. Dein harum unaquæque, per Corol. 5.

DEMONSTRATIO. 2. $\overline{\eta e z^{\eta-1}+\overline{\theta+\eta}fz^{\theta+\eta-1}+\overline{\theta+2\eta}gz^{\theta+2\eta-1}+\&c.}=r$. 3. $\overline{k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+\&c.}=s$. 4. $\overline{\eta lz^{\eta-1}+2\eta mz^{2\eta-1}+\&c.}=s$. 5. $\frac{\mu-1\omega}{\lambda}=\frac{\nu}{\tau}=\frac{\phi}{\pi}$. 6. $\frac{\tau}{\pi}=\sigma$. 7. $\frac{\lambda-\pi}{\pi}=\vartheta$. 8. $R^{\pi}S^{\rho}=x$.

Ex his autem hæ aliæ deducentur. 1. $\dot{R}=r\dot{z}$. 2. $\dot{S}=s\dot{z}$. 3. $\pi R^{\pi-1}S^{\rho}\dot{R}+\rho R^{\pi}S^{\rho-1}\dot{S}=\dot{x}$. Et ex his tribus veniet. 4. $\overline{r\pi R^{\pi-1}S^{\rho}+s\rho R^{\pi}S^{\rho-1}}\times\dot{z}=\dot{x}$.

Jam Curvæ transmutatæ, cujus abscissa x, hujus Ordinata designetur literâ O. Et cùm Curvæ datæ cujus abscissa z, ordinata sit $\overline{\pi sr+\rho Rs}\times R^{\lambda-1}\times S^{\mu-1}\times\overline{aS^{-\nu}+bS}|^{\omega}$, sive $\overline{r\pi S^{\mu}R^{\lambda-1}+s\rho R^{\lambda}S^{\mu-1}}\times\overline{aS^{-\nu}+bS}|^{\omega}$; erit $\dot{x}:\dot{z}=\overline{r\pi S^{\mu}R^{\lambda-1}+s\rho R^{\lambda}S^{\mu-1}}\times\overline{aS^{-\nu}+bR}|^{\omega}:O$. Sed $\dot{x}:\dot{z}=r\pi R^{\pi-1}S^{\rho}+s\rho R^{\pi}S^{\rho-1}:1$ (per æquationem deductarum quartam). Quare $r\pi R^{\pi-1}S^{\rho}+s\rho R^{\pi}S^{\rho-1}:1=\overline{r\pi S^{\mu}R^{\lambda-1}+s\rho S^{\lambda}S^{\mu-1}}\times\overline{aS^{-\nu}+bR}|^{\omega}:O$.

Unde $O=\frac{r\pi S^{\mu}R^{\lambda-1}+s\rho S^{\lambda}S^{\mu-1}}{r\pi R^{\pi-1}S^{\rho}+s\rho R^{\pi}S^{\rho-1}}\times\overline{aS^{-\nu}+bR}|^{\omega}$. Quantitatis autem fractæ denominator numeratorem algebraicè metitur, et quantitas divisione facta erit $R^{\lambda-\pi}.S^{\mu-\rho}$. Quare $O=R^{\lambda-\pi}S^{\mu-\rho}$

×

5. Prop. IX. dat aliam, quæ nonnunquam ſimplicior eſt. Et ex his, per Prop. III. & Corol. 9 & 10. Prop. IX. inter ſe collatis, figuræ adhuc ſimpliciores quandoque prodeunt. Deniqne ex figuris ſimpliciſſimis aſſumptis, facto regreſſu, computabitur Area quæſita. Prop. X.

CAS. III.

Sit Ordinata $z^{\vartheta-1}\times\overline{a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+\&c.}\times\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda-1}$, & hæc figura, ſi quadrari poteſt, quadrabitur per Prop. V. Sin minùs, diſtinguenda eſt Ordinata in partes, $z^{\vartheta-1}\times a\times\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda-1}$, $z^{\vartheta-1}\times bz^{\eta}\times\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda-1}$; &c. et per Caſ. II. inveniendæ ſunt figuræ ſimpliciſſimæ, cum quibus figuræ, partibus illis reſpondentes, comparari poſſunt.

Nam Areæ figurarum, partibus illis reſpondentium, ſub ſignis ſuis + & − conjunctæ, component Aream totam quæſitam.

CAS. IV.

Sit Ordinata $z^{\vartheta-1}\times\overline{a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+\&c.}\times\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda-1}$ in $\overline{k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+\&c.}|^{\mu-1}$; et ſi curva quadrari poteſt, quadrabitur per Prop. VI. Sin minùs, convertetur in ſimpliciorem, per Corol. 4. Prop. IX. ac inde comparabitur cum figuris ſimpliciſſimis, per Prop. VIII. et Corol. 6, 9 & 10. Prop. IX. ut fit in Caſu 2 & 3.

$\times\overline{as^{-\nu}+bx}|^{\pi}$. Sed $R^{\tau}=x^{\frac{\tau}{\pi}}\times\Sigma^{-\frac{\varphi\tau}{\pi}}$ (per æquationem poſitarum octavam). Et $\frac{\tau}{\pi}=\sigma$ (per ſextam poſitarum) et $\frac{\varphi\tau}{\pi}=\upsilon$ (per quintam poſitarum). Quare $R^{\tau}=x^{\sigma}\times\Sigma^{-\upsilon}$. Et $O=R^{\lambda-\tau}S^{\mu-\vartheta}\times\overline{as^{-\nu}+bx^{\tau}\times s^{-\nu}}|^{\pi}=R^{\lambda-\tau}S^{\mu-\vartheta-\nu\pi}\times\overline{a+bx}|^{\pi}$. Sed $\mu-\nu\pi=\frac{\lambda\varphi}{\pi}$ (per æquationem poſitarum quintam). Quare $\mu-\vartheta-\nu\pi=\frac{\lambda\vartheta-\tau\vartheta}{\pi}$. Et $\frac{\lambda\vartheta-\tau\vartheta}{\pi}=\varphi\vartheta$ (per æquationem poſitarum ſeptimam). Ergo $O=R^{\lambda-\tau}\Sigma^{\varphi\vartheta}\times\overline{a+bx}|^{\pi}$. Sed $R^{\lambda-\tau}=R^{\pi\vartheta}$ (per æquationem poſitarum ſeptimam). Et $R^{\vartheta}=\frac{x^{\vartheta}}{\Sigma^{\varphi\vartheta}}$ (per octavam poſitarum). Quare $R^{\lambda-\tau}\Sigma^{\varphi\vartheta}=\frac{x^{\vartheta}\times\Sigma^{\varphi\vartheta}}{\Sigma^{\varphi\vartheta}}=x^{\vartheta}$. Et $O\ (=R^{\lambda-\tau}\Sigma^{\varphi\vartheta}\times\overline{a+bx}|^{\pi})=x^{\vartheta}\times\overline{a+bx}|^{\pi}$. Q. E. D. Cor. X.

Unum moneo, quod tamen leviſſimum eſt; editiones hâc noſtrâ priores pro r, s, habuiſſe $\dot{r}$, $\dot{s}$, errore ut videtur ab editione principe in omnes poſteriores propagato.

CAS.

PROB. X. COR. I. II. & III.

CAS. V.

Si Ordinata ex variis partibus conftat, partes fingulæ pro Ordinatis curvarum totidem habendæ funt, & Curvæ illæ, quotquot quadrari poffunt, figillatim quadrandæ funt; earumque Ordinatæ de Ordinatâ totâ demendæ. Dein Curva, quam Ordinatæ pars refidua defignat, feorfim (ut in Cafu 2, 3 & 4.) cum figuris fimpliciffimis comparanda eft, cum quibus comparari poteft. Et fumma Arearum omnium pro Areâ curvæ propofitæ habenda eft.

COROL. I.

Hinc etiam Curva omnis, cujus Ordinata eft radix quadratica affecta æquationis fuæ, cum figuris fimpliciffimis, feu rectilineis feu curvilineis, comparari poteft. Nam radix illa ex duabus partibus femper conftat, quæ feorfim fpectatæ non funt æquationum radices affectæ.

Proponatur æquatio $a^2y^2+z^2y^2=2a^3y+2z^3y-z^4$, & extracta radix erit $y=\frac{a^3+z^3+a\sqrt{a^4+2az^3-z^4}}{aa+zz}$; cujus pars rationalis, $\frac{a^3+z^3}{aa+zz}$, & pars irrationalis, $\frac{a\sqrt{a^4+2az^3-z^4}}{aa+zz}$, funt Ordinatæ curvarum, quæ, per hanc propofitionem, vel quadrari poffunt, vel cum figuris fimpliciffimis comparari, cum quibus collationem geometricam admittunt.

COROL. II.

Et Curva omnis, cujus Ordinata per æquationem quamvis affectam definitur, quæ per Corol. 7. Prop. IX. in æquationem non affectam migrat, vel quadratur per hanc propofitionem, fi quadrari poteft, vel comparatur cum figuris fimpliciffimis, cum quibus comparari poteft. Et hâc ratione curva omnis quadratur, cujus æquatio eft trium terminorum. Nam æquatio illa, fi affecta fit, tranfmutatur in non affectam per Corol. 7. Prop. IX ac deinde per Corol. 2 & 5. Prop. IX. in fimpliciffimam migrando, dat vel quadraturam figuræ, fi quadrari poteft, vel curvam fimpliciffimam quâcum comparatur.

COROL. III.

Et curva omnis, cujus Ordinata per æquationem quamvis affectam

fectam definitur, quæ per Corol. 8. Prop. IX. in æquationem qua- PROP. X.
draticam affectam migrat; vel quadratur per hanc propositionem & hujus Corol. 1. si quadrari potest, vel comparatur cum figuris simplicissimis, cum quibus collationem geometricam admittit.

SCHOLIUM.

Ubi quadrandæ sunt figuræ; ad regulas hasce generales semper recurrere nimis molestum esset: præstat figuras, quæ simpliciores sunt & magis usui esse possunt, semel quadrare, & quadraturas in Tabulam referre; deinde Tabulam consulere, quoties ejusmodi Curvam aliquam quadrare oportet. Hujus autem generis sunt Tabulæ duæ sequentes; in quibus z denotat Abscissam, y Ordinatam rectangulam, & t Aream curvæ quadrandæ; & d, e, f, g, h, η sunt quantitates datæ cum signis suis + & −.

TABULA

CURVARUM SIMPLICIORUM QUÆ QUADRARI POSSUNT.

		CURVARUM FORMÆ	CURVARUM AREÆ
I		$dz^{\eta-1}=y$	$\frac{d}{\eta}z^{\eta}=t$
II		$\frac{dz^{\eta-1}}{e^2+2efz^{\eta}+f^2z^{2\eta}}=y$	$\frac{dz^{\eta}}{\eta e^2+\eta efz^{\eta}}=t$, vel $\frac{-d}{\eta ef+\eta f^2z^{\eta}}=t$
III	1	$dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{2d}{3\eta f}R^3=t$, existente $R=\sqrt{e+fz^{\eta}}$
	2	$dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{-4e+6fz^{\eta}}{15\eta f^2}dR^3=t$
	3	$dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{16e^2-24efz^{\eta}+30f^2z^{2\eta}}{105\eta f^3}dR^3=t$
	4	$dz^{4\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{-96e^3+144e^2fz^{\eta}-180ef^2z^{2\eta}+210f^3z^{3\eta}}{945\eta f^4}dR^3=t$
IV	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{2d}{\eta f}R=t$
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{-4e+2fz^{\eta}}{3\eta f^2}dR=t$
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{16e^2-8efz^{\eta}+6f^2z^{2\eta}}{15\eta f^3}dR=t$
	4	$\frac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{-96e^3+48e^2fz^{\eta}-36ef^2z^{2\eta}+30f^3z^{3\eta}}{105\eta f^4}dR=t$

CURVARUM MPARARI POSSUNT.

Sit jam aGD vel PGI Centrum A. Axis Ka. Vertex a, Semiaxis conjugatus angula BD = v, et Area ABDP vel aBDG vel αBDG = s n' Abscissæ AB in T, & compleatur parallelogrammum ABDOm, dicatur posterioris Abscissa ξ, Ordinata τ, et Area σ. Sor de posteriori subduci debeat. Et in Forma sexta scrib

CURVARUM FORMÆ

I	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	
II	1	$\frac{dz^{\frac{1}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	
	2	$\frac{dz^{\frac{3}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	
	3	$\frac{dz^{\frac{5}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	
III	1	$\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	DB + TDB. Fig. 2.3.4.
		vel s	DA + $\frac{f^2v}{4e^2x}$. Fig. 3.4.
	2	$\frac{d}{z^{\eta+1}}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	
		vel s	4.
	3	$\frac{d}{z^{2\eta+1}}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	
	4	$\frac{d}{z^{3\eta+1}}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	
IV	1	$\frac{d}{z\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	A. Fig. 2.3.4.
		vel s	g. 3.4.
	2	$\frac{d}{z^{\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	DGa. Fig. 2.3.4.
		vel s	
	3	$\frac{d}{z^{2\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	. Fig. 2.3.4.
	4	$\frac{d}{z^{3\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	

1

2

3

4

Iohan. Senex sculp.

RESIDUUM TABULÆ CURVARUM QUÆ CUM ELLIPSI VEL HYPERBOLA COMPARARI POSSUNT

		CURVARUM FORMÆ	SECTION… Abscissa	…AREÆ
V	1	$\frac{dz^{n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^n+gz^{2n}}} = x$	
	2	vel sic	$\sqrt{\frac{dz^{2n}}{e+fz^n+gz^{2n}}} = x$	
	3	$\frac{dz^{2n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^n+gz^{2n}}} = x$ $fz^n+gz^{2n} = \mathfrak{z}$	
VI	1	$\frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$\sqrt{\frac{2dq}{f-p+2gz^n}} = x$ $\sqrt{\frac{2dq}{f+p+2gz^n}} = \mathfrak{z}$	
	2	$\frac{dz^{\frac{3}{2}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$\sqrt{\frac{2dz^n}{fz^n-pz^n+2e}} = x$ $\sqrt{\frac{2dz^n}{fz^n+pz^n+2e}} = \mathfrak{z}$	
VII	1	$\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$z^n = x$ $\frac{1}{z^n} = \mathfrak{z}$	… $= t$.
	2	$dz^{n-1}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$z^n = x$	
	3	$dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$z^n = x$	
	4	$dz^{3n-1}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$z^n = x$	
VIII	1	$\frac{dz^{n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} = y$	$z^n = x$	B ± ΔDBA. Fig. 3.4.
	2	$\frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} = y$	$z^n = x$	
	3	$\frac{dz^{3n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} = y$	$z^n = x$	
	4	$\frac{dz^{4n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} = y$	$z^n = x$	
IX	1	$\frac{dz^{n-1}\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n} = y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}} = x$	
	2	$\frac{dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n} = y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}} = x$	
X	1	$\frac{dz^{n-1}}{g+hz^n\sqrt{e+fz^n}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}} = x$	
	2	$\frac{dz^{2n-1}}{g+hz^n\sqrt{e+fz^n}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}} = x$	
XI	1	$dz^{-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}} = y$	$\sqrt{g+hz^n} = x$ $\sqrt{k+gz^{-n}} = \mathfrak{z}$	
	2	$dz^{n-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}} = y$	$\sqrt{g+hz^n} = x$	
	3	$dz^{2n-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}} = y$	$\sqrt{g+hz^n} = x$	

Iohan. Senex sculp.

In Tabulis hisce, series curvarum cujusque formæ utrinque in infinitum continuari potest. Scilicet in Tabulâ primâ, in numeratoribus Arearum formæ tertiæ & quartæ, numeri coefficientes initialium terminorum (2, −4, 16, −96, 768 (oo) &c.) generantur multiplicando numeros −2, −4, −6, −8, −10, &c. in se continuò (pp), & subsequentium terminorum coefficientes ex initialibus derivantur multiplicando ipsos gradatim; in Formâ quidem tertiâ, per $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{7}{6}, -\frac{9}{8}, -\frac{11}{10}$, &c. in quartâ vero per $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, -\frac{7}{8}, -\frac{9}{10}$, &c. Et denominatorum coefficientes 3, 15, 105, &c. prodeunt multiplicando numeros 1, 3, 5, 7, 9, &c. in se continuè.

In secundâ vero Tabulâ, series curvarum Formæ primæ, secundæ, quintæ, sextæ, nonæ, & decimæ ope solius divisionis, & Formæ reliquæ ope Propositionis tertiæ & quartæ, utrinque producuntur in infinitum.

Quinetiam hæ series mutando signum numeri η variari solent. Sic enim *e. g.* Curva $\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$, evadit $\frac{d}{z^{\frac{1}{2}\eta+1}}\sqrt{f+ez^{\eta}}=y$ (qq).

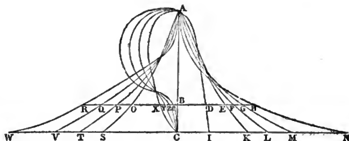
PROP. XI. THEOR. VIII.

Sit ADIC Curva quævis Abscissam habens AB $=z$, & Ordinatam BD $=y$; & sit AEKC Curva alia, cujus Ordinata, BE, æqualis est prioris areæ, ADB, ad unitatem applicatæ; & AFLC Curva tertia, cujus Ordinata, BF, æqualis est secundæ areæ, AEB, ad unitatem applicatæ; & AGMC Curva quarta, cujus Ordinata, BG, æqualis est tertiæ areæ, AFB, ad unitatem applicatæ; & AHNC Curva quinta, cujus Ordinata, BH, æqualis est quartæ areæ, AGB, ad unitatem applicatæ; & sic deinceps in infinitum. Et sunto *A*, *B*, *C*, *D*, *E*,

(oo) Editiones priores habuere 868. Vitiosè. Colsonus in Geometriâ Analyticâ hunc numerum emendatè dedit. Vid. Geometr. Analyt. C. x. Not. *a*.

(pp) Rectius ni fallor dixisset coefficientes illos generari multiplicando binarium in hanc seriem 1, −2, −4, −6, −8, −. Nimirum in Formâ tertiâ et quartâ Tabulæ primæ, coefficiens primi membri numeratoris areæ primæ binarius est, sive factus è duobus, 2, 1, inter se multiplicatis. Areæ secundæ coefficiens ille numeratoris factus est ex tribus, 2, 1, −2; tertiæ, ex quatuor, 2, 1, −2, −4; quartæ, ex quinque 2, 1, −2, −4, −6 inter se multiplicatis, eodemque usque modo progrediendum est.

(qq) Vide Geomet. Analyt. C. x.



&c. Areæ curvarum Ordinatas habentium y, zy, z^2y, z^3y, z^4y, &c. et Abſciſſam communem z.

Detur Abſciſſa quævis $AC=t$, ſitque $BC=t-z=x$, & ſunto P, Q, R,

(r) PROPOSITIONIS XI[ae]. DEMONSTRATIO ROBINESII.

Hujus Propoſitionis ſunt partes duæ; quarum Prima eſt hæc.

Sit Curva quæpiam ADI, cujus abſciſſa Aa literâ z ſignificetur; ordinata aD, cuicuimodi ejus cum abſciſſâ ſit cognatio, literâ y. Tum, vocatâ hâc curvâ primâ, ſint aliæ curvæ AEK, AFL, AGM, AHN, quarum abſciſſa omnium quidem communis z, ſingularum ordinatæ aE, aF, aG, aH. Harum autem aE, ſecundæ curvæ ordinata, æqualis ſit areæ primæ ad unitatem applicatæ; Curvæ tertiæ ordinata aF æqualis ſit areæ ſecundæ ad unitatem applicatæ: Quartæ ordinata, aG, æqualis ſit areæ tertiæ ad unitatem applicatæ: et ſimili lege progreſſio uſque fiat.

Jam ſint aliæ etiam Curvæ, AOS, APT, AQV, ARW, eâdem abſciſſâ z, ordinatis aO, aP, aQ, aR; quarum aO, curvæ AOS ordinata, æqualis ſit quantitati zy: Ordinata aP curvæ APT æqualis ſit quantitati z^2y. Ordinata aQ curvæ AQV æqualis ſit quantitati z^3y. Ordinata aR curvæ ARW æqualis ſit quantitati z^4y. Tum literâ A deſignante aream ACI, literâ B aream ACS, literâ C aream ACT, literâ D aream ACV, literâ E Aream ACW, areæ ACI, ACK, ACL, ACM, ACN, ſic ordine erunt æſtimandæ.

$$\text{Area prima } ACI = A$$

$$\text{Secunda } ACK = zA - B.$$

$$\text{Tertia } ACL = \frac{z^2A - 2zB + C}{2}$$

$$\text{Quarta } ACM = \frac{z^3A - 3z^2B + 3zC + D}{6}$$

$$\text{Quinta } ACN = \frac{z^4A - 4z^3B + 6z^2C - 4zD + E}{24}$$

Eodemque deinceps uſque modo.

Harum formularum ea quidem eſt conditio, ut in omnibus poſt primam, index elatiſſimæ poteſtatis literæ z ſit numerus ille, qui curvæ cujuſque à primâ diſtantiam ſignificet; index autem elatiſſimus ille unitate gradatim minuat. Membrum primum multiplicatur cum A, ſecundum cum B, tertium cum C, eodemque deinceps uſque modo. Coefficientes iidem ſunt ac poteſtatis ejus à quâlibet duorum nominum radice, quæ poteſtas pari ſit gradu cum elatiſſimâ quantitatis z. Diviſor verò factus eſt ex tot numeris (1, 2, 3, 4, 5, 6) naturali ordine ſumendis, quot ſint unitates in numero elatiſſimam poteſtatem literæ z indicante.

Vel ſi curvæ, cujus æſtimationem inire oporteat, ſi hujus à primâ diſtantiam numerus n ſignificet,

R, S, T Areæ curvarum Ordinatas habentium x, xy, x^2y, x^3y, x^4y, &c. et Abſciſſam communem x. Prop. XI.

Terminentur autem hæ Areæ omnes ad Abſciſſam totam datam AC, nec non ad Ordinatam, poſitione datam & infinitè productam, CI.

Et erit Arearum ſub initio poſitarum

Prima ADIC $= A = P$.

Secunda AEKC $= tA - B = Q$.

Tertia AFLC $= \frac{t^2A - 2tB + C}{2} = \frac{1}{2}R$.

Quarta AGMC $= \frac{t^3A - 3t^2B + 3tC - D}{6} = \frac{1}{6}S$.

Quinta AHNC $= \frac{t^4A - 4t^3B + 6t^2C - 4tD + E}{24} = \frac{1}{24}T$ (rr).

COROL.

ficet, Area exquirenda ita quidem invenietur, ſi quantitas $\overline{z-1}|^n$ in ſeriem explicabitur, cujus membrum primum multiplicabitur cum A, ſecundum cum B, tertium cum C, quartum cum D; tum omnium ſumma dividetur numero à mutuâ horum multiplicatione facto; n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, horum utique ſerie eò uſque continuatâ, ut in unitatem deſinat.

ALTERA Pars Propoſitionis hæc eſt.

Sint curvæ prima, ſecunda, tertia, et reliquæ, quæ ſuperiùs poſitæ ſunt. Jam literâ t deſignante abſciſſam totam AC, literâ verò x, partem ejus ac, ſcribi intelligantur curvæ CXA, CYA, CZA, CΓA, eâ quidem lege, ut ex ordinatis aX, aY, BZ, aΓ, illa aX æquetur quantitati xy; illa BY quantitati x^2y; illa BZ quantitati x^3y; BΓ quantitati x^4y. His poſitis, ſi Curvarum CIDA, CXA, CYA, CZA, CΓA, prima CIDA ſignificetur literâ P, ſecunda CXA literâ Q, tertia CYA literâ R, quarta CZA literâ S, quinta CΓA literâ T, Curvarum, quæ initio poſitæ ſunt, Areæ totæ ad hunc modum ordine æſtimandæ ſunt.

Prima ATC $=$ P

Secunda AKC $=$ Q

Tertia ALC $= \frac{1}{2}$R

Quarta AMC $= \frac{1}{6}$S

Quinta ANC $= \frac{1}{24}$T

Nimirum areæ P, Q, R, S, T à numeris horum, 1, 2, 3, 4, 5 mutuâ multiplicatione factis dividendæ, tot ex iſtâ ſerie ac priùs ordine deſumptis.

DEMONSTRATIO PARTIS PRIMÆ.

CUM Curvæ AEK, AFL, AGM, AHN, alia ex aliâ, eâ lege procreatæ ſint, ut abſciſſam z communem omnes habeant, ordinatam unaquæque prioris aream; illud nos oſtendere oportet, formularum illarum, A, $zA - B$, $\frac{zzA - 2zB + C}{2}$, unamquamque Curvæ cujuſdam Aream deſignare, cujus Ordinatam formula præcedens deſignaverit, cùm abſciſſa ſit z.

Ponatur igitur $m = n - 1$.

6 Erunt

Prop. XI. Cor.

COROL.

Unde si Curvæ quarum ordinatæ sunt y, zy, z^2y, z^3y, &c. vel

Propositionis XI^{æ}.

Fiunt igitur $\dfrac{z^m\text{A} - mz^{m-1}\text{B} + m \times \frac{m-1}{2} z^{m-2}\text{C} -,}{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times,}$ et $\dfrac{z^n\text{A} - nz^{n-1}\text{B} + n \times \frac{n-1}{2} z^{n-2}\text{C} -}{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}$, erunt hæ, ex iis quas suprà posuimus formulis duæ aliquæ inter se proximæ. Ostendère igitur nos oportet, harum formularum posteriorem curvæ cujusdam Aream significare, quæ ordinatam quidem à priore designatam habeat, abscissam verò z. Hujus autem areæ fluxio facta erit multiplicando illam $\dot{z}$ cum formulâ priore. Ostendere igitur nos oportet hujus fluxionis fluentem per formulam posteriorem designari. Vel, quod eodem redit, posterioris formulæ fluxionem æqualem esse illi $\dot{z}$ cum formulâ priore multiplicatæ.

Formulæ posterioris fluxio constat ex quantitatibus, $nz^{n-1}\dot{z}\text{A} - n \times \overline{n-1}\, z^{n-2}\dot{z}\text{B} + n \times \frac{n-1}{2} \times \overline{n-2}\, z^{n-3}\dot{z}\text{C} -$, $+ z^n\dot{\text{A}} - nz^{n-1}\dot{\text{B}} + n \times \frac{n-1}{2} z^{n-2}\dot{\text{C}}$, ex his, inquam, cum facto, $n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times$, divisis.

Tota quantitas dividenda è duabus constat partibus. Quarum prima conflata est è fluxionibus potestatum literæ z cum quantitatibus A, B, C, multiplicatis; altera ex illarum A, B, C fluxionibus in potestates literæ z multiplicatis. Horum autem, $z^n\dot{\text{A}}$, $z^{n-1}\dot{\text{B}}$, $z^{n-2}\dot{\text{C}}$, ex quibus partem alteram dividendæ componi diximus, horum unumquodque æquatur quantitati $z^n\dot{z}y$; cùm ex ipsâ Curvarum procreandarum lege, quarum areæ designantur literis A, B, C, efficietur $\dot{\text{A}} = \dot{z}y$. $\dot{\text{B}} = \dot{z}zy$. $\dot{\text{C}} = \dot{z}z^2y$. Dividendæ igitur pars altera illa huic æqualis erit, $z^n\dot{z}y \times \overline{1 - n + n \times \frac{n-1}{2} - n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} +}$: vel huic, $z^n\dot{z}y \times \overline{1-1}|^n$. Nihilo igitur. Et tota fluxio huic fit æqualis $\dfrac{nz^{n-1}\dot{z}\text{A} - n \times \overline{n-1}\, z^{n-2}\dot{z}\text{B} + n \times \frac{n-1}{2} \times \overline{n-2}\, z^{n-3}\dot{z}\text{C} -}{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times,}$. Deleto igitur n, qui quantitatem utramque, dividentem et dividendam, metitur, et pro illis $n-1$, $n-2$, $n-3$, his m, $m-1$, $m-2$ substitutis, fluxio de quâ agitur hâc formâ comparebit;

$\dot{z} \times \dfrac{z^m\text{A} - mz^{m-1}\text{B} + m \times \frac{m-1}{2} z^{m-2}\text{C} -}{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} -}$. Formulæ igitur posterioris fluxio æqualis erit illi $\dot{z}$ in formulam priorem multiplicatæ. Unde consequetur, quamlibet è formulis illis curvæ cujusdam Aream designare, quæ formulam priorem Ordinatam habeat, cùm Abscissa ejus sit z. Q. E. D.

ALTERIUS PARTIS DEMONSTRATIO.

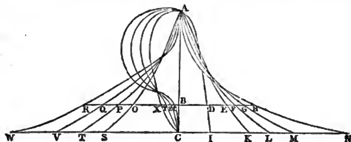
Ex Curvis initio positis, ADI, AXK, AFL, AGM, AHN desumatur illa, cujus à primâ distantiam numerus n significat. Illud jam nos ostendere oportet; illius Aream quæ Abscissam habeat BC, seu x, Ordinatam x^ny, si à facto illo $n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times * * * * 1$ divisa sit, æquari desumptæ illius Areæ, modò CB toti CA sit æqualis, sive x fiat t.

Areis ABD, ABO, ABP, ABQ, ABX decrescentibus, alias illas, BCID, BCSO, BCTP, BCVQ, BCWB, augeri manifestum est. Unde consequetur illorum decrementa, horum esse incrementa; illorum fluxiones negatas horum fluxiones esse. Hoc est si area ABD designetur literâ a, area ABO literâ b; area ABP, literâ c; area ABQ, litera d; area ABR, literâ e; tum area BCID, literâ α; area BCSO, literâ β; area BCTP, literâ γ; area BCVQ, literâ δ; area BCWX, literâ ϵ; erit $\dot{\alpha} = -\dot{a}$; $\dot{\beta} = -\dot{b}$; $\dot{\gamma} = -\dot{c}$; $\dot{\delta} = -\dot{d}$; $\dot{\epsilon} = -\dot{e}$.

Jam

vel y, xy, x^2y, x^3y, &c. quadrari possunt, quadrabuntur etiam Curvæ ADIC, AEKC, AFLC, AOMC, &c. et habebuntur Ordinatæ BF, BF, BO, BH, Areis curvarum proportionales. Prop. XI. Cor.

Jam Curvæ cujus Abscissa x, Ordinata $x^n y$, hujus fluxio erit $\dot{x}x^n y = \dot{x}y \times \overline{t-z}|^n$, cùm sit $x = t - z$. Robinsii Demonstratio
Vel cùm incrementa illius x decrementis ipsius z fiot æqualia, ac propterea cùm sit $\dot{x} = -\dot{z}$, fluxio



Curvæ, quam modò diximus, huic æqualis erit, $-\dot{z}y \times \overline{t-z}|^n = -\dot{z}y \times \overline{t^n - nt^{n-1}z + n \times \frac{n-1}{2} t^{n-2}z^2 -}$, $= -t^n\dot{z}y + nt^{n-1}\dot{z}zy - n \times \frac{n-1}{2} t^{n-2}\dot{z}z^2y = t^n \times \overline{-\dot{a}} - nt^{n-1} \times \overline{-\dot{b}} + n \times \frac{n-1}{2} t^{n-2} \times \overline{-\dot{c}-}$, $= \overline{t^n\dot{\alpha} - nt^{n-1}\dot{\beta} + n \times \frac{n-1}{2} t^{n-2}\dot{\gamma} -}$. Sumptisque fluentibus, Area curvæ cujus Abscissa x, vel BC, Ordinata $x^n y$, æqualis erit huic quantitati $t^n\alpha - nt^{n-1}\beta + n \times \frac{n-1}{2} t^{n-2}\gamma -$. Sed cùm x fit t, hoc est cùm BC æqualis evadit toti AC, areæ α, β, γ, totis illis A, B, C æquales fiunt: quod satis apertum est. Si igitur illa x est t, hoc est si CB est æqualis toti CA, Curvæ cujus Abscissa x, Ordinata $x^n y$, hujus Area huic fit æqualis, $t^n A - nt^{n-1}B + n \times \frac{n-1}{2} \times t^{n-2}C$: quæ fit ex illa $\overline{t-t}|^n$ in seriem explicatâ, membro seriei primo cum A multiplicato, secundo cum B, tertio cum C.—Sed quantitas quæ fit ex illâ $\overline{t-1}|^n$ quo diximus modo, hæc si cum facto $\overline{n \times n-1 \times n-2 \times n-3 * * \times * \times 1}$ dividetur, æquabitur areæ curvæ cujus distantiam à primâ numerus n significaverit (per Cas. 1.) Hujus igitur areæ æquabitur illius area, cum facto $\overline{n \times n-1 \times n-2 \times n-3 \times * * \times 1}$ divisa, cujus abscissa x, ordinata $x^n y$: modò abscissa x toti AC fit æqualis. Hoc est Q, sive Area curvæ cujus Abscissa x Ordinata xy, si x æqualis fit rectæ AC, æquabitur areæ secundæ AKC: $\frac{1}{2}$ R, sive semissis areæ cujus Abscissa x, Ordinata x^2y, æqualis erit areæ tertiæ ALC: $\frac{1}{6}$ S, sive pars sexta ejus areæ, cujus Abscissa x, Ordinata x^3y, æqualis erit areæ quartæ AMC: $\frac{1}{24}$ T, sive pars vicesima quarta ejus Areæ, cujus Abscissa x Ordinata x^4y areæ quintæ ANC æqualis; eodemque deinceps usque modo; dummodo id in omnibus servetur, ut x sit æqualis ipsi AC. Q. E. C.

Atque hæc est reconditissimæ Propositionis Robinsii Demonstratio; cujus prima adumbratio anno 1727 inter Acta Philosophicæ Societatis nostræ Regiæ Londinensis edita est; species perfectior anno 1735 in Epitome Actorum illâ, quam Viri docti concinnarunt Reid & Gray, Anglico sermone ab auctore conscriptam nos in Latinum convertimus. Dignam, credo, omnes judicabunt, cui id laboris nostri nos impenderemus. Certè Stewarto Abredonensi tantoperè eam placuisse video, ut in suos in hunc librum Commentarios transferendam judicârit, mutilam tamen ac haud in meliùs immutatam, & nullâ Robinsii mentione factâ.

SCHOL.

Scholium

SCHOLIUM.

Quantitatum fluentium Fluxiones esse primas, secundas, tertias, quartas, aliasque diximus suprà. Hæ fluxiones sunt ut termini serierum infinitarum convergentium.

Ut si z^n sit quantitas fluens, & fluendo evadat $\overline{z+o}|^n$, deinde resolvatur in seriem convergentem $z^n + nozz^{n-1} + \frac{nn-n}{2} ooz^{n-2} + \frac{n^3-3nn+2n}{6} o^3z^{n-3}$ + &c. terminus primus hujus seriei z^n erit quantitas illa fluens, secundus noz^{n-1} erit ([ff]) ejus incrementum primum, seu differentia prima, cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio prima; tertius $\frac{nn-n}{2} ooz^{n-2}$ erit ejus incrementum secundum, seu differentia secunda, cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio secunda; quartus $\frac{n^3-3nn+2n}{6} o^3z^{n-3}$ erit ejus incrementum tertium, seu differentia tertia, cui nascenti Fluxio tertia proportionalis est; & sic deinceps in infinitum.

Exponi autem possunt hæ Fluxiones per Curvarum Ordinatas BD, BE, BF, BG, BH, &c. *(Vide fig. pag. 380.)*

Ut si Ordinata BE $(= \frac{ADB}{1})$ sit quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BD.

Si BF $(= \frac{AEB}{1})$ si quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BE, & Fluxio secunda ut Ordinata BD.

Si BH $(= \frac{AGB}{1})$ sit quantitas fluens, erunt ejus Fluxiones prima, secunda, tertia & quarta, ut Ordinatæ BG, BF, BE, BD respectivè.

Et hinc in æquationibus, quæ quantitates tantùm duas incognitas involvunt, quarum una est quantitas uniformiter fluens, & altera est fluxio quælibet quantitatis alterius fluentis, inveniri potest fluens illa altera per quadraturam curvarum. Exponatur enim fluxio ejus per Ordinatam BD; & si hæc sit fluxio prima, quæratur area ADB = BE × 1; si fluxio secunda, quæratur area

AEB

([ff]) Lege, *erit* UT *ejus incrementum primum, tertius* * *erit* UT *ejus incrementum secundum, quartus* * *erit* UT *ejus incrementum tertium.* Hæc Emendatio ipsius quidem Newtoni est, in Recensione Controversiæ inter Leibnitsium & Keillium, &c. minimè verò Keillii, id quod Stewarto persuasum fuisse video. Ignorabat utique Stewartus Recensionem illam ab ipso Newtono profectam. Quòd si quis dubitare velit, locus hic, vel sic emendatus, sitne satis perspicuus, id quod Stewartus se dubitare dicit; eum vel meridie dubitare, sitne lux, jubebo.

([gg]) Nempe

AEB = BF × 1 ; si fluxio tertia, quæratur area AFB = BG × 1 ; &c. et Generale. Area inventa erit exponens fluentis quæsitæ.

Sed & in æquationibus, quæ fluentem & ejus fluxionem primam sine alterâ fluente, vel duas ejusdem fluentis fluxiones, primam & secundam, vel secundam & tertiam, vel tertiam & quartam, &c. sine alterutrâ fluente involvunt: inveniri possunt fluentes per quadraturam curvarum. Sit æquatio $aa\dot v = av + vv$, existente $v = $ BE, $\dot v = $ BD, $z = $ AB, & $\dot z = 1$; & æquatio illa, complendo dimensiones fluxionum, evadet $aa\dot v = av\dot z + vv\dot z$, seu $\frac{aa\dot v}{av+vv} = \dot z$.

Jam fluat v uniformiter, & sit ejus fluxio $\dot v = 1$, & erit $\frac{aa}{av+vv} = \dot z$, & quadrando curvam, cujus Ordinata est $\frac{aa}{av+vv}$, & Abscissa v, habebitur fluens z. Adhæc sit æquatio $aa\ddot v = a\dot v + \dot v\dot v$, existente $v = $ BF, $\dot v = $ BE, $\ddot v = $ BD, & $z = $ AB; & per relationem inter $\ddot v$ & $\dot v$, seu BD & BE, invenietur relatio inter AB & BE, ut in exemplo superiore. Deinde, per hanc relationem, invenietur relatio inter AB & BF, quadrando curvam AEB.

Æquationes, quæ tres incognitas quantitates involvunt, aliquando reduci possunt ad æquationes, quæ duas tantùm involvunt; &, in his casibus, fluentes invenientur ex fluxionibus ut suprà. Sit æquatio $a - bx^m = cxy^n\dot y + dy^{2n}\dot y\dot y$: ponatur $y^n\dot y = \dot v$, & erit $a - bx^m = cx\dot v + d\dot v\dot v$. Hæc æquatio, quadrando curvam cujus abscissa est x & ordinata $\dot v$, dat aream v (tt); & æquatio altera $y^n\dot y = \dot v$, regrediendo ad fluentes, dat $\frac{1}{n+1}y^{n+1} = v$: unde habetur fluens y.

Quinetiam in æquationibus, quæ tres incognitas involvunt, & ad æquationes quæ duas tantùm involvunt, reduci non possunt, fluentes quandoque prodeunt per quadraturam curvarum. Sit æquatio $\overline{ax^m + bx^n}|^p = rex^{r-1}y^s + sex^r\dot y y^{s-1} - f\dot y y^t$, existente $\dot x = 1$; et pars posterior, $rex^{r-1}y^s + sex^r\dot y y^{s-1} - f\dot y y^t$, regrediendo ad fluentes, fit $ex^r y^s - \frac{f}{t+1}y^{t+1}$, quæ proinde est ut Area curvæ, cujus abscissa est x & ordinata $\overline{ax^m + bx^n}|^p$; & inde datur fluens y.

(u) Nempe per resolutionem æquationis quadraticæ $a - bx^m = cx\dot v + d\dot v\dot v$ veniet $\dot v = \frac{\pm\sqrt{4da - 4d^2bx^m + c^2x^2} - cx}{2d}$. Si igitur detur Area curvæ cujus Abscissa x, Ordinata $\frac{\sqrt{4d^2a - 4d^2bx^m + c^2x^2} - cx}{2d}$, dabitur v.

SCHOLIUM GENERALE.

Sit æquatio $\dot{x}\times\overline{ax^m+bx^n}|^p = \frac{d\dot{y}y^{\eta-1}}{\sqrt{e+fy^\eta}}$. Et fluens, cujus fluxio est $\dot{x}\times\overline{ax^m+bx^n}|^p$, erit ut Area curvæ, cujus abſciſſa eſt x & ordinata eſt $\overline{ax^m+bx^n}|^p$. Item fluens, cujus fluxio eſt $\frac{d\dot{y}y^{\eta-1}}{\sqrt{e+fy^\eta}}$, erit ut Area curvæ, cujus abſciſſa eſt y & ordinata $\frac{dy^{\eta-1}}{\sqrt{e+fy^\eta}}$, id eſt (per Caſum 1. Formæ quartæ Tab. I.) ut Area $\frac{2d}{\eta f}\sqrt{e+fy^\eta}$. Pono ergo $\frac{2d}{\eta f}\sqrt{e+fy^\eta}$ æqualem Areæ curvæ, cujus abſciſſa eſt x & ordinata $\overline{ax^m+bx^n}|^p$, & habebitur fluens y.

Et nota quòd fluens omnis, quæ ex fluxione primâ colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate quâvis non fluente. Quæ ex fluxione ſecundâ colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate quâvis, cujus fluxio ſecunda nulla eſt. Quæ ex fluxione tertiâ colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate quâvis, cujus fluxio tertia nulla eſt. Et ſic deinceps in infinitum.

Poſtquam fluentes ex fluxionibus collectæ ſunt, ſi de veritate concluſionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum viciſſim colligendæ ſunt, & cum fluxionibus, ſub initio propoſitis, comparandæ. Nam ſi prodeunt æquales, concluſio rectè ſe habet: ſin minùs, corrigendæ ſunt fluentes ſic, ut earum fluxiones fluxionibus ſub initio propoſitis æquentur. Nam & fluens pro lubitu aſſumi poteſt, & aſſumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis aſſumptæ æqualem fluxioni propoſitæ, & terminos homologos inter ſe comparando.

Et his principiis via ad majora ſternitur.

ARTIS ANALYTICÆ

SPECIMINA

VEL

GEOMETRIA ANALYTICA.

ARGUMENTA CAPITUM HUJUS LIBRI.

In hoc libro edendo tribus usi sumus MSS; in quibus et Auctoris Autographus erat. Alium, ignoti cujusdam scribæ manu exaratum, nobiscum communicavit honoratissimus Dominus Carolus Cavendish; cùm ipse eum olim à Jonesio acceperat. Tertium de Cavendisiano, ut videtur, propriâ manu exscripserat vir Doctissimus Jacobus Wilson, editor ille operum Robinesii. Hunc nobis tradidit Joannes Nourse, Bibliopola Regius, vir elegantioris Matheseos et amantissimus et ipse minimè imperitus. Divisio Libri in Capita à nobis est.

GEOMETRIA ANALYTICA.

CAPUT PRIMUM.

DE SERIEBUS INFINITIS.

ANIMADVERTENTI plerosque Geometras, posthabitâ ferè Veterum Syntheticâ Methodo, Analyticæ excolendæ plurimùm incumbere, et ejus ope tot tantasque difficultates superâsse; ut penè omnia, extra Curvarum Quadraturas, et similia quædam nondum penitùs enodata, videantur exhausisse; placuit sequentia, quibus campi analytici terminos expandere, juxtà & Curvarum doctrinam promovere possem, in gratiam discentium breviter compingere.

2. Cùm in Numeris et Speciebus operationes computandi persimiles sint, neque differre videantur nisi in characteribus, quibus quantitates, in istis definitè, in his indefinitè designantur: demiror, quòd doctrinam de numeris decimalibus nuper inventam (si Quadraturam Hyperbolæ per N. Mercatorem demas) nemini in mentem venerit, Speciebus itidem accommodare; præsertim cùm ad præclariora viam aperiat. Hujus autem de Speciebus doctrina, cùm eodem modo, ad Algebram relata sit, ac doctrina decimalium Numerorum ad vulgarem Arithmeticam; Operationes, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio et Extractio radicum, exinde addisci possunt: modo Lector utriusque, et Arithmeticæ et Algebræ vulgaris, peritus fuerit, et noverit correspondentiam inter decimales numeros, ac terminos Algebraicos in infinitum continuatos; scilicet quòd singulis numerorum locis, proportione decimali dextrorsùm perpetuò decrescentibus, correspondent singuli specierum termini, secundum seriem dimensionum numeratorum vel denominatorum uniformi progressione in infinitum continuatam, prout factum in sequentibus, ordinati. Et quemadmodum commoditas decimalium in eo consistit, ut fractiones omnes et ra-

dicales, in eos reductæ, quodammodo naturam integrorum induant: sic etiam infinitarum specierum commoditas est, quòd per eas abstrusiorum terminorum genera, quales sunt fractiones à compositis quantitatibus denominatæ, compositarum radices, et radices affectarum æquationum, possunt ad simplicium genus reduci; ad infinitas nempe fractionum series numeratores ac denominatores simplices habentium, in quibus nullæ sunt aliorum difficultates propemodum insuperabiles. Imprimis itaque reductiones aliarum quantitatum ad hujusmodi terminos, et methodos computandi minùs obvias ostendam; dein hanc Analysin ad solutiones Problematum applicabo.

3. Reductiones per divisionem et extractionem radicum è sequentibus exemplis, cum similibus operandi modis in Arithmeticâ decimali et speciosâ collatis, elucescet.

Exempla reductionum per Divisionem.

4. Propositâ $\frac{aa}{b+x}$. Divide aa per $b+x$ ad hunc modum

$$b+x)\,aa+oo\,\Big(\frac{a^2}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}+\frac{a^2x^4}{b^5}-\frac{a^2x^5}{b^6}\ \&c.$$

$$\begin{array}{l}
aa+\frac{a^2x}{b} \\ \hline
-\frac{a^2x}{b}+o \\
-\frac{a^2x}{b}-\frac{a^2x^2}{b^2} \\ \hline
+\frac{a^2x^2}{b^2}+o \\
+\frac{a^2x^2}{b^2}+\frac{a^2x^3}{b^3} \\ \hline
-\frac{a^2x^3}{b^3}+oo \\
-\frac{a^2x^3}{b^3}-\frac{a^2x^4}{b^4} \\ \hline
+\frac{a^2x^4}{b^4}\ \&c.
\end{array}$$

Et prodit $\frac{a^2}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}$ &c. quæ series in infinitum continuata tantùm valet ac $\frac{aa}{b+x}$. Vel posito x primo divisoris termino, hoc modo $x+b)\,aa($ prodibit $\frac{aa}{x}-\frac{a^2b}{x^2}+\frac{a^2b^2}{x^3}-\frac{a^2b^3}{x^4}$ &c.

5. Ad eundem modum fractio $\frac{1}{1+x^2}$ reducitur ad $1-x^2+x^4-x^6+x^8$ &c. Vel ad $x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}$ &c.

6. Et

6. Et fractio $\frac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}$ ad $2x^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^{2}+34x^{\frac{5}{2}}$ &c.

DIVISIO ET EXTRACT. RAD.

7. Ubi obiter notandum est, quòd usurpo x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}, &c. pro $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^{2}}$, $\frac{1}{x^{3}}$, $\frac{1}{x^{4}}$, et $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{3}{2}}$, $x^{\frac{5}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}}$, &c. pro $\sqrt{x}$, $\sqrt{x^{3}}$, $\sqrt{x^{5}}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x^{2}}$; et $x^{-\frac{1}{2}}$, $x^{-\frac{2}{3}}$, $x^{-\frac{1}{4}}$, &c. pro $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, &c. Idque ob analogiam rei, quæ deprehendi potest ex hujusmodi geometricis progressionibus x^{3}, $x^{\frac{5}{2}}$, x^{2}, $x^{\frac{3}{2}}$, x, $x^{\frac{1}{2}}$, x^{0}, sive 1, $x^{-\frac{1}{2}}$, x^{-1}, $x^{-\frac{3}{2}}$, x^{-2}, &c.

Ad hunc modum pro $\frac{aa}{x}-\frac{aab}{x^{2}}+\frac{aab^{2}}{x^{3}}$ &c. scribi potest $aax^{-1}-aabx^{-2}+aab^{2}x^{-3}$ &c.

Et sic vice $\sqrt{aa-xx}$ scribi potest $\overline{aa-xx}|^{\frac{1}{2}}$; et $\overline{aa-xx}|^{2}$ vice quadrati ex $aa-xx$; et $\overline{\frac{aab-y^{3}}{by+yy}}|^{\frac{1}{3}}$ vice $\sqrt[3]{\frac{aab-y^{3}}{by+yy}}$; & sic in aliis.

Unde meritò potestates distingui possunt in affirmativas et negativas, integras et fractas ([a]).

Exempla reductionum per Extractionem radicum.

8. Propositâ $aa+xx$, radicem ejus ut sequitur extrahas

$$aa+xx\left(a+\frac{x^{2}}{2a}-\frac{x^{4}}{8a^{3}}+\frac{x^{6}}{16a^{5}}-\frac{5x^{8}}{128a^{7}}+\frac{7x^{10}}{256a^{9}}-\frac{21x^{12}}{1024a^{11}}\ \&c.\right.$$

$$\begin{array}{l}
aa \\
\hline
0 \quad +xx \\
\quad xx+\frac{x^{4}}{4a^{2}} \\
\hline
\quad -\frac{x^{4}}{4a^{2}} \\
\quad -\frac{x^{4}}{4a^{2}}-\frac{x^{6}}{8a^{4}}+\frac{x^{8}}{64a^{6}} \\
\hline
\qquad +\frac{x^{6}}{8a^{4}}-\frac{x^{8}}{64a^{6}} \\
\qquad \frac{x^{6}}{8a^{4}}+\frac{x^{8}}{16a^{6}}-\frac{x^{10}}{64a^{8}}+\frac{x^{12}}{256a^{10}} \\
\hline
\qquad\quad -\frac{5x^{8}}{64a^{6}}+\frac{x^{10}}{64a^{8}}-\frac{x^{12}}{256a^{10}}\ \&c. \\
\qquad\quad -\frac{5x^{8}}{64a^{6}}-\frac{5x^{10}}{128a^{8}}+\frac{5x^{12}}{512a^{10}} \\
\hline
\qquad\qquad \frac{7x^{10}}{128a^{8}}-\frac{7x^{12}}{512a^{10}} \\
\qquad\qquad \frac{7x^{10}}{128a^{8}}+\frac{7x^{12}}{256a^{10}} \\
\hline
\qquad\qquad\quad -\frac{21x^{12}}{512a^{10}}\ \&c.
\end{array}$$

([a]) Vide Arithmetic. Univers. Cap. 1. Not. *b*.

Et

Et prodit $a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3}$ &c. Ubi notandum, quòd circa finem operis eos omnes terminos negligo, quorum dimenſiones tranſcenderent dimenſiones ultimi termini, ad quem cupio quotientem ſolummodo produci, puta $\frac{x^{12}}{a^{11}}$.

9. Poteſt etiam ordo terminorum inverti ad hunc modum; x^2+a^2. Et radix erit $x + \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} + \frac{a^6}{16x^5}$ &c.

Sic ex a^2-x^2 radix eſt $a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}$ &c.

Et ex $x-x^2$ eſt $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$ &c.

Et ex a^2+bx-x^2 eſt $a + \frac{bx}{2a} - \frac{x^2}{2a} - \frac{b^2x^2}{8a^3} -$ &c.

Et ex $\frac{1+ax^2}{1-bx^2}$ eſt $\frac{1+\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{8}a^2x^4+\frac{1}{16}a^3x^6}{1-\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{8}b^2x^4-\frac{1}{16}b^3x^6}$ &c. Factâque inſuper diviſione, fit

$$\begin{array}{llll} 1 + \frac{1}{2}b\,x^2 & + \frac{3}{8}b^2\,x^4 & + \frac{5}{16}b^3\,x^6 & \&c. \\ \;\;\; + \frac{1}{2}a & + \frac{1}{4}ab & + \frac{3}{16}ab^2 & \\ & - \frac{1}{8}a^2 & - \frac{1}{16}a^2b & \\ & & + \frac{1}{16}a^3 & \end{array}$$

10. Operationes verò per debitam præparationem non rarò abbreviari poſſunt; ut in allato exemplo, ad extrahendam $\sqrt{\frac{1+ax^2}{1-bx^2}}$, ſi non eadem fuiſſet numeratioris ac denominatoris forma, utrumque multiplicaſſem per $\sqrt{1-bx^2}$, & ſic prodiiſſet $\frac{\sqrt{1 \begin{smallmatrix}+a\\-b\end{smallmatrix} x^2 + abx^4}}{1-bx^2}$; et reliquum opus perficeretur extrahendo radicem numeratoris tantùm, ac dividendo per denominatorem.

11. Ex hiſce, credo, manifeſtum eſt, quo pactò radices aliæ poſſunt extrahi, et quælibet compoſitæ quantitates, quibuſcunque radicibus vel denominatoribus perplexæ; ut hîc videre eſt, $x^3 + \frac{\sqrt{x - \sqrt{1-x^2}}}{\sqrt[3]{ax+x^3}} - \frac{\sqrt[5]{x^3+2x^5-x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x+xx-\sqrt{2x-x^3}}}$, in ſeries infinitas ſimplicium terminorum reduci.

CAPUT SECUNDUM.

De affectarum Æquationum reductione.

PROPOSITIS verò affectis Æquationibus, modus, quo radices earum ad hujuſmodi ſeries poſſint reduci, obnixiùs explicari debet;

bet; idque cùm earum doctrina, quam hactenus in numeris exposuerunt Mathematici, per ambages (superfluis etiam operationibus adhibitis) tradatur, ut in specimen operis in speciebus non debeat adhiberi. Imprimis itaque Numerosam affectarum æquationum Resolutionem compendiosè tradam; dein Speciosam similiter explicabo. RESOLUTIO NUMEROSA

2. Proponatur æquatio $y^3-2y-5=0$, resolvenda; et sit 2 numerus, utcunque inventus, qui minùs quàm decimâ sui parte differt à radice quæsitâ. Tum pono $2+p=y$, et pro y substituo $2+p$ in æquationem; et inde nova prodit $p^3+6p^2+10p-1=0$, cujus radix p exquirenda est, ut quotienti addatur. Nempe, neglectis p^3+6p^2 ob parvitatem, $10p-1=0$, sive $p=0,1$ ad veritatem proximè accedet. Scribo itaque $0,1$ in quotiente, & suppono $0,1+q=p$, et hunc ejus fictitium valorem, ut antè, substituo, et prodit $q^3+6,3q^2+11,23q+0,061=0$. Et cùm $11,23q+0,061=0$, veritatem appropinquet, sive ferè sit $q=-0,0054$ (dividendo nempe $0,061$ per $11,23$ donec tot eliciantur figuræ quot loca primis figuris hujus et principalis quotientis exclusivè intercedunt, quemadmodum hîc duo sunt inter 2 & $0,005$) scribo $-0,0054$, in inferiori parte quotientis, siquidem negativa sit; et supponens $-0,0054+r=q$, hunc ut priùs substituo. Et sic operationem ad placitum produco, pro more subjecti diagrammatis.

		$+2,10000000$
		$-0,00544852$
		$2,09455148$ &c.
$2+p=y$	y^3	$+8+12p+6p^2+p^3$
	$-2y$	$-4-2p$
	-5	-5
Summa		$-1+10p+6p^2+p^3$
$0,1+q=p$	$+p^3$	$+0,001+0,03q+0,3q^2+q^3$
	$+6p^2$	$+0,06\ +1,2\ +6,$
	$+10p$	$+1,\ +10,$
	$-p$	$-1,$
Summa		$+0,061+11,23q+6,3q^2+q^3$
$-0,0054+r=q$	q^3	$-0,000000157464+0,00008748r-0,0162r^2+r^3$
	$+6,3q^2$	$+0,000183708\ -0,06804r\ +6,3r^2$
	$+11,23q$	$-0,060642\ +11,23r$
	$+0,061$	$+0,061$
Summa		$+0,0005416\ +11,162r$
$-0,00004852+s=r$		

Opus verò sub fine, præsertim in æquationibus plurium dimensionum, hâc methodo multùm abbreviabitur. Determinato quousque velis radicem extrahi, tot loca post primam figuram coefficientis penulti-

 mi

CAPUT SECUNDUM. mi termini æquationum, in dextrâ parte diagrammatis resultantium, adnumera, quot supersunt loca in quotiente complenda, et subsequentes decimales neglige. In ultimo verò termino decimales post tot plura loca neglige, quot in quotiente complentur loca decimalia. Inque antepenultimo termino neglige omnes post tot pauciora loca. Et sic deinceps arithmeticè progrediendo per intervallum istud locorum; sive quod perinde est, tot figuras passim elidendo, quot in penultimo termino; modò depressissima earum loca sint in arithmeticâ progressione juxta seriem terminorum; aut circulis compleri subintelligantur, ubi res aliter eveniat. Sic in exemplo jam posito, si cupiam ut quotiens ad octavum tantùm decimalem locum compleatur; inter substituendum, $00054+r$ pro q, ubi quatuor loca decimalia in quotiente complentur, ac totidem supersunt complenda, potui figuras in inferioribus quinque locis omisisse, quas eapropter lineolâ transversim notavi; imo primum terminum r^3, etsi coefficientem, 99999 habuisset, potui tamen penitus omisisse. Expunctis itaque figuris istis, pro subsequente operatione prodit summa $0,0005417+11,162r$; quæ, per divisionem adusque præscriptum terminum peractam, dat $-0,00004852$ pro r, quod quotientem ad optatam periodum complet.

Denique negativam partem quotientis ab affirmativâ subduco, et oritur 2,09455148 quotiens absoluta.

3. Præterea notandum est, quòd, sub initio operis, si dubitarem an $0,1-p$ ad veritatem satis accederet, vice $10p-1=0$ finxissem $6p^2+10p-1=0$, et ejus radicis nihilo propioris primam figuram in quotiente scripsissem. Et hoc modo secundam vel etiam tertiam quotientis figuram explorare convenit, ubi in æquatione secundariâ, circa quam versaris, quadratum coefficientis penultimi termini non sit decies majus, quàm factus ex ultimo termino ducto in coefficientem termini antepenultimi. Quinimo laborem plerumque minues, præsertim in æquationibus plurimarum dimensionum, si figuras omnes quotienti addendas hoc modo (id est, extrahendo minorem radicum ex tribus ultimis terminis æquationis ejus secundariæ) quæras. Sic enim figuras duplo plures in quotiente quâlibet vice lucraberis.

CAPUT

CAPUT TERTIUM.

De Speciosâ Æquationum Resolutione.

HIS in numeris sic ostensis, consimiles operationes in speciebus explicandæ restant, de quibus convenit sequentia prænoscere.

I. Quòd è speciebus coefficientibus aliqua præ reliquis (si sint plures) insignienda sit, ea nempe, quæ est, aut fingi potest esse, omnium longè minima, vel maxima, vel datæ quantitati vicinissima: cujus rei causa est, ut ob ejus dimensiones, in numeratoribus vel denominatoribus terminorum quotientis, perpetim auctas, illi termini continuò minores, et inde quotiens radici propinquior evadat; sicut antè de specie x, in exemplis reductionum per divisionem et extractionem radicum, manifestum esse potest. Pro isthâc verò specie in sequentibus ut plurimùm usurpabo etiam x vel z, quemadmodum et y, p, q, r, s, &c. pro specie radicali extrahendâ.

II. Siquando fractiones complexæ, vel surdæ quantitates, in æquatione propositâ, vel pòst in operatione occurrant, tolli debent per methodos analystis satis notas. Quemadmodum si habeatur $y^3 + \frac{b^2}{b-x} y^2 - x^3 = 0$, multiplico per $b-x$, et ex facto $by^3 - xy^3 + b^2y^2 - bx^3 + x^4 = 0$, valorem y elicio. Vel possum fingere $y \times \overline{b-x} = v$, et sic scribendo $\frac{v}{b-x}$ pro y, orietur $v^3 + b^2v^2 - b^3x^3 + 3b^2x^4 - 3bx^5 + x^6 = 0$: dein, extractâ radice v, divido quotientem per $b-x$ ut obtineatur valor y. Item si proponatur $y^3 - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} = 0$, fingo $y^{\frac{1}{2}} = v$, et $x^{\frac{1}{3}} = z$; et sic, scribendo v^2 pro y, et z^3 pro x, oritur $v^6 - z^3v + z^4 = 0$; quâ æquatione resolutâ, restituo y et x. Scilicet radix invenietur, $v = z + z^3 + 6z^5$ &c. et, restitutis y et x, orietur $y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} + x + 6x^{\frac{5}{3}}$ &c. et quadrando $y = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}} + 13x^2$ &c.

Ad eundem modum siquæ sint negativæ dimensiones ipsorum x & y, tollo, multiplicando per easdem x & y. Sic habito $x^3 + 3x^2y^{-1} - 2x^{-1} - 16y^{-3} = 0$, multiplico per x & y^3; oriturque $x^4y^3 + 3x^3y^2 - 2y^3 - 16x = 0$. Et habito $x = \frac{aa}{y} - \frac{2a^3}{y^2} + \frac{3a^4}{y^3}$, duco in y^3, et oritur $xy^3 = a^2y^2 - 2a^3y + 3a^4$. Et sic de cæteris.

III. Æquatione sic præparatâ, opus ab inventione primi termini

mini

mini quotientis initium sumit; de quâ, ut et consimili subsequentium terminorum inventione, hæc esto Regula generalis, cùm species indefinita (x vel z) parva esse fingitur, ad quem casum cæteri duo casus sunt reducibiles.

E terminis, in quibus species radicalis (y, p, q vel r, &c.) non reperitur, selige depressissimum respectu dimensionum indefinitæ speciei (x vel z, &c.) dein alium terminum, in quo sit alia species radicalis, selige; talem nempe, ut progressio dimensionum utriusque præfatæ speciei, à termino priùs assumpto ad hunc terminum continuata, quàm maximè potest descendat, vel minimè ascendat. Et siqui sint alii termini, quorum dimensiones cum hâc progressione, ad arbitrium continuatâ, conveniant, eos etiam selige. Deinque ex his selectis terminis tanquam nihilo æqualibus quære valorem dictæ speciei radicalis, et quotienti appone.

2. Cæterùm ut hæc Regula magis elucescat, placuit insuper ope sequentis diagrammatis exponere. Descripto angulo recto BAC, latera ejus BA, AC, divido in partes æquales, et inde normales erigo distribuentes angulare spatium in æqualia quadrata vel parallelogramma, quæ concipio denominata esse à dimensionibus specierum x et y, prout vides in fig. 1. inscriptas. Deinde cùm æquatio aliqua proponitur, parallelogramma, singulis ejus terminis correspondentia, insignio notâ aliquâ. Et Regulâ ad duo, vel fortè plura, ex insignitis parallelogrammis applicatâ, quorum unum sit humillimum in columnâ sinistrâ juxta AB, et alia ad Regulam dextrorsum sita, cæteraque omnia, non contingentia Regulam, supra eam jaceant: seligo terminos æquationis per parallelogramma contingentia regulam designatos, et inde quæro quantitatem quotienti addendam.

Fig. 1.

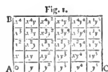
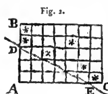


Fig. 2.



3. Sic ad extrahendam radicem y ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$; parallelogramma, hujus terminis respondentia, signo

no notâ aliquâ *, ut vides in Schem. 2. Dein applico regulam DE ad inferiorem è locis signatis in sinistrâ columnâ, eamque ab inferioribus ad superiora dextrorsum gyrare facio, donec alium similiter, vel fortè plura, è reliquis signatis locis cæperit attingere; videoque loca sic attacta esse x^3, x^2y^2 et y^6. E terminis itaque $y^6-7a^2x^2y^2+6a^3x^3$ tanquam nihilo æqualibus (et insuper si placet reductis ad $v^6-7v^2+6=0$, ponendo $y=v\sqrt{ax}$) quæro valorem y; et invenio quadruplicem $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$ et $-\sqrt{2ax}$: quorum quemlibet pro initio quotientis accipere liceat, prout è radicibus quampiam extrahere decretum est. RESOLUTIO SPECIOSA.

Sic ex $y^5-by^2+9bx^2-x^3=0$, seligo $-by^2+9bx^2$, et inde obtineo $+3x$ pro initiali termino quotientis.

Et ex $y^3+axy+aay-x^3-2a^3=0$. Seligo $y^3+a^2y-2a^3$, et radicem ejus, $+a$, scribo in quotiente.

Et ex $x^2y^5-3c^4xy^2-c^5x^2+c^7=0$. Seligo $x^2y^5+c^7$, quod exhibet $-\sqrt[5]{\frac{c^7}{x^2}}$ pro initio quotientis. Et sic de cæteris.

4. Cæterùm invento hoc termino, si is contingat esse negativæ potestatis, æquationem per eandem indefinitæ speciei potestatem deprimo, eò, ut non opus sit inter solvendum deprimere; et insuper ut Regula de superfluis terminis elidendis, mox tradenda, aptè possit adhiberi. Sic proposito $8z^6y^3+az^6y^2-27a^9=0$, cujus quotiens exordiri debet à $\frac{3a^3}{zz}$, deprimo per zz; ut fiat, $8z^4y^3+az^4y^2-27a^9z^{-2}=0$, antequam solutionem ineo.

5. Subsequentes quotientum termini eâdem methodo ex æquationibus secundariis, inter operandum prodeuntibus, eruuntur; sed ut plurimùm leviori curâ: res enim peragi solet, dividendo depressissimum è terminis, cum indefinitè parvâ specie (x, xx, x^3, &c.) absque specie radicali (p, q, r, &c.) affectis, per quantitatem, quâcum species illa radicalis, unius tantùm dimensionis, absque alterâ indefinitâ specie, afficitur; et exitum scribendo in quotiente. Sic in exemplo sequente, termini $\frac{x}{4}$, $\frac{x^2}{64a}$, $\frac{131x^3}{512a}$, &c. eliciuntur dividendo a^2x, $\frac{1}{16}ax^2$, $\frac{131}{128}x^3$ &c. per $4aa$.

6. His præmissis, restat ut praxin Resolutionis exhibeam.

Sit itaque $y^3+a^2y+axy-2a^3-x^3=0$, æquatio resolvenda; et ex e-terminis $y^3+aay-2a^3=0$, æquatione fictitiâ juxta tertium è præ-

2 missis,

CAPUT TERTIUM.

missis, elicio $y-a=0$, et scribo $+a$ in quotiente. Deinde cùm $+a$ non accuratè valeat y, pono $a+p=y$, et pro y, in terminis æquationis in margine scriptis, substituo $a+p$, terminosque resultantes (p^3+3ap^2+axp &c.) rursum scribo in margine; ex quibus iterum, juxta tertium è præmissis, excerpo terminos $+4a^2p+a^2x=0$ pro æquatione fictitiâ; quæ cùm exhibeat $p=-\frac{1}{4}x$, pono $-\frac{1}{4}x$ in quotiente. Præterea cùm $-\frac{1}{4}x$ non accuratè valet p, scribo $-\frac{1}{4}x+q=p$, et pro p, in terminis marginalibus, substituo $-\frac{1}{4}x+q$, terminosque resultantes ($q^3-\frac{3}{4}xq^2+3aq^2$ &c.) iterum scribo in margine; ex quibus denuò, juxta Regulam præfatam, seligo terminos $4a^2q-\frac{1}{16}ax^2=0$, pro æquatione fictitiâ; quæ cùm exhibeat $q=\frac{x^2}{64a}$, scribo $+\frac{x^2}{64a}$ in quotiente. Porro cùm $\frac{x^2}{64a}$ non accurate valeat q, pono $\frac{x^2}{64a}+r=q$, et pro q, in terminis marginalibus, substituo $\frac{x^2}{64a}+r$, et sic opus ad placitum produco, prout indicat subjectum diagramma.

$y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$ $y=a-\frac{x}{4}+\frac{xx}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$		
$+a+p=y$	$+y^3$ $+a^2y$ $+axy$ $-2a^3$ $-x^3$	$+a^3+3a^2p+3ap^2+p^3$ $+a^3+a^2p$ $+a^2x+axp$ $-2a^3$ $-x^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$ $+3ap^2$ $+4a^2p$ $+axp$ $+a^2x$ $-x^3$	$-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{16}x^2q-\frac{3}{4}xq^2+q^3$ $+\frac{3}{16}ax^2-\frac{3}{2}axq+3aq^2$ $-a^2x+4a^2q$ $-\frac{1}{4}ax^2+axq$ $+a^2x$ $-x^3$
$+\frac{x^2}{64a}+r=q$	q^3 $-\frac{3}{4}xq^2$ $+3aq^2$ $+4a^2q$ $-\frac{1}{2}axq$ $+\frac{3}{16}x^2q$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$	* * $+\frac{3x^4}{4096a}+\frac{3}{32}x^2r+3ar^2$ $+\frac{1}{16}ax^2+4a^2r$ $-\frac{1}{128}x^3-\frac{1}{2}axr$ $+\frac{3x^4}{1024a}+\frac{3}{16}x^2r$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$
$+4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}x^2)+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}(+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$		

7. Quòd si quotientem ad certam usque periodum produci cupiam, ut x nempe, in ultimo ejus termino, ultra datum dimensionum numerum non ascendat, terminos inter substituendum semper omitto, quos nulli deinceps usui fore prævideam. Cujus rei Regula esto, quòd post primum terminum, ex quâlibet quantitate in margine collaterali resultantem, non addantur plures dextrorsum, quàm istius primo

mò refultantis termini dimenfio à periodicâ, five maximâ dimen-fione quotientis deficit gradibus. Ut in hoc exemplo, fi cupiam ut quotiens (five x in quotiente) ad quatuor tantùm dimenfiones afcendat, omitto omnes terminos poft x^4, & poft x^3 pono unicum tantùm. Terminos itaque poft notam * delendos effe concipe: et opere fic continuato, donec ultimò ad terminos $\frac{15x^4}{4096a} - \frac{131}{128}x^3 + 4a^2r - \frac{1}{2}axr + \frac{9}{32}x^2r$ deveniatur, in quibus p, q, r vel s, &c. refiduum radicis extrahendæ, fit unicæ tantùm dimenfionis; tot terminos $\frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$ per divifionem elicies, quot, ad complendum quotientem, deeffe videbis. Atque ita tandem obtinebitur $y = a - \frac{1}{4}x + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$.

RESOLUTIO SPECIOSA.

8. Plenioris illuftrationis gratiâ, dedi aliud exemplum, refolvendo $\frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + y - z = 0$; ubi proponitur inventio quotientis ad quintam tantùm dimenfionem, terminique fuperflui poft notam (&c.) negliguntur.

$y = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ &c.		
$z + p = y$	$+\frac{1}{5}y^5$	$+\frac{1}{5}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{4}y^4$	$-\frac{1}{4}z^4 - z^3p$ &c.
	$+\frac{1}{3}y^3$	$+\frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2$ &c.
	$-\frac{1}{2}y^2$	$-\frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2$ &c.
	$+ y$	$+ z + p$
	$- z$	$- z$
$\frac{1}{2}z^2 + q = p$	$+ zp$	$+\frac{1}{4}z^5$ &c.
	$-\frac{1}{2}p^2$	$-\frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{2}z^2q$ &c.
	$+ z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5$ &c.
	$+ z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4 + z^2q$
	$- zp$	$-\frac{1}{2}z^3 - zq$
	$+ p$	$+\frac{1}{2}z^2 + q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}z^2$	$-\frac{1}{2}z^2$
$1 - z + \frac{1}{2}z^2)\ \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{120}z^5\ (\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$		

9. Atque ita fi cupiam æquationem $\frac{63y^{11}}{2816} + \frac{35}{1152}y^9 + \frac{5}{112}y^7 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{1}{6}y^3 + y - z = 0$, adufque nonam tantùm dimenfionem quotientis refolvi, ante opus initum negligo terminum $\frac{63}{2816}y^{11}$; deinde, inter operandum, negligo etiam omnes terminos poft z^7, poft z^7 pono unicùm, ac duos tantùm poft z^5; eò quòd percipio quotientem ubique per gradus binarum unitatum (hoc modo z, z^3, z^5, &c.) debere afcendere. Tandemque prodit $y = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$.

10. Et hinc patet artificium, quo æquationes in infinitum affectæ, vel utcunque multis, numerovè infinitis terminis conftantes, poffunt folvi. Scilicet omnes termini ante opus initum debent negligi, in quibus dimenfio fpeciei indefinitè parvæ, non

 affectæ

affectæ cum radicali specie, transcendit maximam dimensionem in quotiente desideratam; vel ex quibus, substituendo pro radicali specie primum terminum quotientis, ope tessellatæ tabulæ inventum, non nisi ejusmodi transcendentes termini possunt emergere. Sic in exemplo novissimo terminos omnes supra y^9, quamvis infinitè progrederentur, omisissem. Et sic in hâc æquatione

$$o = \begin{cases} -8 + z^2 - 4z^4 + 9z^6 - 16z^8 \text{ \&c.} \\ +y \text{ in } z^2 - 2z^4 + 3z^6 - 4z^8 \text{ \&c.} \\ -y^2 \text{ in } z^2 - z^4 + z^6 - z^8 \text{ \&c.} \\ +y^3 \text{ in } z^2 - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{3}z^6 - \frac{1}{4}z^8 \text{ \&c.} \end{cases}$$

ut radix cubica ad quatuor tantùm dimensiones ipsius z extrahatur, omitto omnes in infinitum terminos post $+y^3$ in $z^2-\frac{1}{2}z^4+\frac{1}{3}z^6$, et post $-y^2$ in $z^2-z^4+z^6$, et post $+y$ in z^2-2z^4, et post $-8+z^2-4z^4$. Et hanc tantùm æquationem, $\frac{1}{3}z^6y^3-\frac{1}{2}z^4y^3+z^2y^3-z^6y^2+z^4y^2-z^2y^2-2z^4y+z^2y-4z^4+z^2-8=0$, resolvendam sumo, siquidem $2z^{-\frac{2}{3}}$ (primus nempe quotientis terminus) pro y in reliquâ æquatione, per z^4 depressâ, substitutus, dat plures ubique quàm quatuor dimensiones.

11. Quæ de altioribus æquationibus dixi, ad quadraticas etiam applicari possunt. Quemadmodum si hujus

$$o = \begin{cases} yy \\ -y \text{ in } a + x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} \text{ \&c.} \\ +\frac{x^4}{4a^2} \end{cases}$$

radicem ad usque periodum x^6 desiderem, mitto terminos in infinitum post $-y$ in $a+x+\frac{x^2}{a}$; et isthanc tantùm, $y^2-ay-xy-\frac{x^2}{a}y+\frac{x^4}{4a^2}=0$ (sive id fiat hâc lege; $y=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{2a}-\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}ax+\frac{3}{4}x^2+\frac{x^3}{2a}}$, ut solet, sive expeditiùs per methodum de affectis æquationibus jam traditam) resolvo: et exit $y=\frac{x^4}{4a^3}-\frac{x^5}{4a^4}*$, ultimo desiderato termino existente nullo.

12. Postquam verò radices ad convenientem periodum extractæ sunt, possunt aliquando ex analogiâ seriei observatâ, ad placitum produci. Sic hanc $z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$ &c. (radicem æquationis infinitæ $z=y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3$ &c.) perpetuò produces, dividendo ultimum.

ultimum terminum per hos ordine numeros, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. Et hanc, $z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-\frac{1}{5040}z^7+\frac{1}{362880}z^9$ &c. dividendo per hos 2×3, 4×5, 6×7, 8×9, &c. Et hanc $a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}$ &c. multiplicando per hos $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{6}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{7}{10}$, &c. Et fic in aliis ([b]). RESOLUTIO SPECIOSA.

13. Cæterùm in inventione primi termini quotientis, et nonnunquam fecundi tertiive, difficultas etiamnum enodanda fupereft. Poteft enim valor ejus, fecundum præcedentia quæfitus, effe furda, five inextricabilis, radix æquationis multipliciter affectæ. Quod cùm accidit, modò non fit infuper impoffibilis, illum literâ aliquâ defignabis, dein operabere tanquam fi cognitum haberes. Quemadmodum in exemplo $y^3+axy+a^2y-x^3-2a^3=0$, fi radix hujus $y^3+a^2y-2a^3=0$, fuiffet furda, vel ignota; finxiffem quamlibet b pro eâ ponendam effe, et refolutionem (puta ad tertiam dimenfionem quotientis) ut fequitur perfeciffem.

$y^3+aay+axy-2a^3-x^3=0$. Sit $cc=3b+a$.		
$y=b-\frac{abx}{c^2}+\frac{a^4bx^2}{c^6}+\frac{x^3}{c^2}+\frac{a^3b^3x^3}{c^8}-\frac{a^5bx^3}{c^8}+\frac{a^6b^3x^3}{c^{10}}$ &c.		
$b+p=y$	$+y^3$	$+b^3+3b^2p+3bp^2+p^3$
	$+axy$	$+abx+axp$
	$+aay$	$+aab+aap$
	$-x^3$	$-x^3$
	$-2a^3$	$-2a^3$
$\frac{-abx}{cc}+q=p$	p^3	$-\frac{a^3b^3x^3}{c^6}$ &c.
	$+3bp^2$	$+\frac{3a^2b^3x^2}{c^4}$ $\frac{6ab^2x}{c^2}q$, &c.
	$+axp$	$-\frac{a^2bx^2}{c^2}+axq$
	$+ccp$	$-abx+ccq$
	$-x^3$	$-x^3$
	$+abx$	$+abx$
$c^2+ax-\frac{6ab^2x}{cc})\frac{a^4bx^2}{c^4}+x^3+\frac{a^3b^3x^3}{c^6}(\frac{a^4bx^2}{c^6}+\frac{x^3}{c^2}+\frac{a^3b^3x^3}{c^8}$ &c.		

Scribens b in quotiente, fuppono $b+p=y$, & pro y fubftituo ut vides: unde prodit p^3+3p^2b+ &c. rejectis terminis $b^3+a^2b-2a^3$, qui nihilo funt æquales, propterea quòd b fupponitur radix hujus $y^3+a^2y-2a^3=0$. Deinde termini $3b^2p+a^2p+abx$ dant $\frac{-abx}{3b^2+a^2}$ quotienti apponendum, & $\frac{-abx}{3b^2+a^2}+q$ fubftituendum pro p.

([b]) Vide Analyf. per Æquat. Infinit. Cap. VIII.

 Brevitatis

Brevitatis autem gratiâ ſcribo cc pro $3b^2+a^2$, cavendo tamen ut $3bb+aa$ reſtituatur, ubi terminos ſic abbreviari poſſe percipiam. Completo opere, aſſumo numerum aliquem pro a, et hanc $y^3+a^2y-2a^3=0$, ſicut de numerali æquatione oſtenſum ſuprà, reſolvo, et quemlibet ejus radicem, modò tres haberet, pro b ſubſtituo. Vel potius hujuſmodi æquationes à ſpeciebus, ut poſſum, libero, præſertim ab indefinitâ; idque pro more quam volui innuere, pag. 399, lin. 6 & 7; et pro cæteris tantùm, ſiquæ ſuperſint indelebiles, pono numeros. Sic $y^3+a^2y-2a^3=0$, liberabitur ab a dividendo radicem per a, fietque $y^3+y-2=0$, cujus inventa radix ducta in a ſubſtitui debet pro b.

14. Hactenus indefinitam ſpeciem ſuppoſui parvam eſſe. Quòd ſi datæ quantitati vicina ſupponatur, pro indefinitè parvâ differentiâ, pono ſpeciem aliquam, et hâc ſubſtitutâ, ſolvo ut antè. Quemadmodum in $\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y-a-x=0$, cognito vel ficto x eſſe ejuſdem propè quantitatis ac a, pono z differentiam inter ea; et ſcribendo $a+z$ vel $a-z$ pro x, orietur $\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y-$ vel $+z=0$, ſolvendum ut in præcedentibus.

15. Sin autem ſpecies illa ſupponatur indefinitè magna, pro reciproco ejus indefinitè parvo, pono ſpeciem aliquam; quâ ſubſtitutâ ſolvo ut antè. Sic habito $y^3+y^2+y-x^3=0$: ubi x cognoſcitur, vel fingitur eſſe valdè magnum, pro reciprocè parvo $\frac{1}{x}$ pono z; et ſubſtituto $\frac{1}{z}$ pro x, orietur $y^3+y^2+y-\frac{1}{z^3}=0$, cujus radix eſt $\frac{1}{z}-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}z+\frac{7}{81}z^2+\frac{14}{729}z^4$ &c. et x ſi placet reſtituto, fit $y=x-\frac{1}{3}-\frac{2}{9x}+\frac{7}{81x^2}+\frac{14}{729x^4}$ &c.

16. Siquando ex aliquâ harum trium ſuppoſitionum res non omnino, aut non commodè, ſuccedat, ad aliam recurri poteſt. Sic in $y^4-x^2y^2+xy^2+2y^2-2y+1=0$, cùm primus terminus obtineri deberet, fingendo $y^4+2y^2-2y+1=0$, quæ tamen nullam admittit poſſibilem radicem, tento quid fiet aliter; quemadmodum ſi fingam x parùm differre à $+2$, ſive eſſe $2+z=x$, ſubſtituendo $2+z$ vice x prodibit $y^4-z^2y^2-2zy^2-2y+1=0$, et quotiens exordietur ab $+1$. Vel ſi fingam x indefinitè magnam eſſe, ſive $\frac{1}{x}=z$, obtinebitur $y^4-\frac{y^2}{z^2}+\frac{y^2}{z}+2y^2-2y+1=0$, et $+z$ pro initio quotientis.

Et hâc ratione fecundum varias hypothefes procedendo, licebit variis modis extrahere, ac defignare radices. RESOLUTIO SPECIOSA.

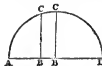
17. Quòd fi cupias explorare, quot modis id poteft fieri, tentabis quænam quantitates, pro indefinitâ fpecie in æquationem propofitam fubftitutæ, efficient divifibilem per y + vel − aliquâ quantitate, vel per y folùm. Id quod, verbi gratiâ, in æquatione $y^3+axy+a^2y-x^3-2a^3=0$, eveniet fubftituendo $+a$, vel $-a$, vel $-2a$, vel $-\overline{2a^3}|^{\frac{1}{3}}$, &c. pro x. Atque ita poffis commodè fupponere quantitatem x parùm ab $+a$, vel $-a$, vel $-2a$, vel $-\overline{2a^3}|^{\frac{1}{3}}$, differre, et inde radicem propofitæ æquationis tot modis extrahere. Imo et fortaffe tot aliis modis fingendo differentias iftas effe indefinitè magnas. Quinetiam fi aliam atque aliam è fpeciebus radicem definientibus pro indefinitâ adhibeas, poffis aliis adhunc fortaffe modis propofitum confequi; et etiamnum aliis, fubftituendo valores quàcunque ratione fictos (quales funt $az+bz^2$, $\frac{a}{b+x}$, $\frac{a+cz}{b+z}$, &c.) pro indefinitâ fpecie, et in æquatione refultante operando ficut in præcedentibus.

18. Cæterùm ut conclufionum veritas conftet, quotientes nempe fic extractos, dum producuntur, ita propriùs ad radicem accedere, ut minùs tandem quâvis datâ quantitate differant, adeoque in infinitum productas non omnino differre: perpende, quòd quantitates in finiftrâ columnâ dextræ partis diagrammatum, funt ultimi termini æquationum quarum p, q, r, s, &c. exiftunt radices; et inde quòd, ipfis evanefcentibus, illæ p, q, r, s id eft differentiæ inter quotientem, et quæfitam radicem fimul evanefcunt: adeoque quotiens tunc non differt à radice. Quamobrem fub initio operis, fi terminos in dictâ columnâ fefe omnes deftruere videas, conclude quotientem, eatenus extractam, effe juftam radicem. Sin aliter, videbis tamen terminos, in quibus indefinitè parva fpecies eft pauciorum dimenfionum, id eft, longè maximos, è columnâ iftâ perpetuò tolli; ut tandem non reftant nifi datâ quâvis quantitate minores, et proinde non majores nihilo, cùm opus infinitè producitur. Quare Quotiens infinitè extracta fiet etiam jufta radix.

19. Etfi denique fpecies, quas hactenus, perfpicuitatis gratiâ, fuppofui indefinitè parvas effe, quantumvis magnæ fupponantur, tamen

CAPUT TERTIUM.

tamen veræ erunt quotientes, ut minùs citò ad justam radicem convergant, quemadmodum ex analogiâ rei constet. Sed hîc radicum termini, maximæque et minimæ quantitates spectandæ veniunt: nam infinitarum cum finitis æquationibus communia sunt hujusmodi symptomata. Radix autem in his maxima fit vel minima, quando maxima vel minima est differentia summæ affirmativorum terminorum à summâ negativorum, ac terminatur, cùm indefinita quantitas, quam ideo parvam esse non immeritò finxi, non potest major sumi, quin magnitudo radicis in infinitum prosiliet; hoc est, fiet impossibilis: verbi gratiâ, posito ACD semicirculo super diametro AD descripto, et BC ordinatim applicata. Dic $AB = x$, $BC = y$, $AD = a$. Et erit $y = (\sqrt{ax - x^2}) = \sqrt{ax} - \frac{x}{2a}\sqrt{ax} - \frac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax} - \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$ &c. ut suprà. Fit ergo BC, sive y, maxima cùm $\sqrt{ax}$ maximè superat omnes $\frac{x}{2a}\sqrt{ax} + \frac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax} + \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$; id est, cùm sit $x = \frac{1}{2}a$; terminabitur autem cùm sit $x = a$: quia si sumas x majorem quàm a summa omnium terminorum $-\frac{x}{2a}\sqrt{ax} - \frac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax} - \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$ &c. erit infinita. Est et alius terminus, cùm ponitur $x = 0$, propter impossibilitatem radicalis $\sqrt{-ax}$; quibus terminis correspondent semicirculi limites A et D.



CAPUT QUARTUM.

Doctrina Fluxionum.

HACTENUS de modis computandi, quorum posthac frequens erit usus. Jam restat, ut, in illustrationem Artis Analyticæ, tradam aliquot Problematum specimina, qualia præsertim natura Curvarum ministrabit. Sed imprimis observandum venit, quòd hujusmodi difficultates possunt omnes ad hæc duo tantùm Problemata reduci, quæ circa spatium motu locali, utcunque accelerato vel retardato, descriptum ponere licebit.

I. Spatii longitudine continuò (sive ad omne tempus) datâ, Celeritatem Motûs ad tempus propositum invenire.

II. Celeritate

II. Celeritate Motûs continuò datâ, longitudinem descripti spatii ad tempus propositum invenire. DOCTRINA FLUXIONUM.

Sic in æquatione $xx = y$. Si y designat spatii longitudinem, ad quodlibet tempus quod aliud spatium x uniformi celeritate $\dot{x}$ crescendo mensurat et exhibet, descriptam: tunc $2\dot{x}x$ designabit celeritatem, quâ spatium y, ad idem temporis momentum, describi pergit; et contrà: et hinc est, quòd in sequentibus considerem quantitates, quasi generatæ essent per incrementum continuum, ad modum spatii quod mobile percurrendo describit.

2. Cùm autem Temporis nullam habemus æstimationem, nisi quatenus id per æquabilem motum localem exponitur et mensuratur, et præterea cùm quantitates ejusdem tantùm generis inter se conferri possunt, et earum incrementi et decrementi celeritates inter se; eapropter ad tempus formaliter spectatum in sequentibus haud respiciam: sed è propositis quantitatibus, quæ sunt ejusdem generis, aliquam æquabili fluxione augeri fingam, cui cæteræ tanquam tempori referantur, adeoque cui nomen temporis analogicè tribui mereatur. Si quando itaque vocabulum Temporis in sequentibus occurrat (quemadmodum perspicuitatis et distinctionis gratiâ nonnunquam intertexui) eo nomine non Tempus formaliter spectatum subintelligi debet; sed illa alia quantitas, cujus æquabili incremento, sive fluxione, tempus exponitur et mensuratur.

3. Quantitates autem quas ut sensim crescentes indefinitè considero, quo distinguam ab aliis quantitatibus, quæ in æquationibus quibuscunque pro determinatis et cognitis habendæ sunt ac initialibus literis a, b, c, &c. designantur, posthac denominabo Fluentes, ac designabo finalibus literis v, x, y et z. Et celeritates, quibus singulæ à motu generante fluunt et augentur, quas possim fluxiones vel simpliciter celeritates vocitare, designabo literis $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$, nempe pro celeritate quantitatis v ponam $\dot{v}$, et sic pro celeritatibus aliarum quantitatum x, y et z ponam $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ respectivè.

4. His præmissis, è vestigio rem aggredior; imprimis duorum jam modo propositorum Problematum solutionem exhibiturus.

PROB.

PROBLEMA PRIMUM.

PROBLEMA PRIMUM.

Relatione quantitatum Fluentium inter se datâ, Fluxionum relationem determinare.

SOLUTIO.

ÆQUATIONEM, quâ data relatio exprimitur, dispone secundum dimensiones alicujus fluentis quantitatis, puta x, ac terminos ejus multiplica per quamlibet Arithmeticam progressionem; ac deinde per $\frac{\dot{x}}{x}$. Et hoc opus in quâlibet fluenti quantitate seorsim institue. Dein omnium factorum summam pone nihilo æqualem, et habes æquationem desideratam (c).

5. EXEMP. I. Si quantitatum x et y relatio sit $x^3-ax^2+axy-y^3=0$, terminos primò secundum x, ac deinde secundum y dispositos multiplico ad hunc modum.

$$\begin{array}{llllll} \text{Mult.} & x^3 & -\ ax^2 & +axy & -y^3 \\ \text{per} & \frac{3\dot{x}}{x} & \frac{2\dot{x}}{x} & \frac{\dot{x}}{x} & 0 \\ \text{fit} & 3\dot{x}x^2 & -2\dot{x}ax & +\dot{x}ay & -\ * \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} \text{Mult.} & -\ y^3 & +axy & -axx \\ & & & +\ x^3 \\ \text{per} & \frac{3\dot{y}}{y} & \frac{\dot{y}}{y} & 0 \\ \text{fit} & -3\dot{y}y^2 & +ax\dot{y} & * \end{array}$$

Et factorum summa est $3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y-3\dot{y}y^2+a\dot{y}x=0$: æquatio quæ dat relationem inter fluxiones $\dot{x}$ et $\dot{y}$. Nempe si assumas x ad arbitrium, æquatio $x^3-ax^2+axy-y^3=0$ dabit y. Quibus determinatis erit $\dot{x}:\dot{y}::3y^2-ax:3x^2-2ax+ay$.

6. EXEMP. 2. Si quantitatum x, y et z, relatio sit $2y^3+x^2y-2cyz+3yz^2-z^3=0$

$$\begin{array}{llll} \text{Mult.} & 2y^3 & +x^2y & -z^3 \\ & & -2czy & \\ & & +3z^2y & \\ \text{per} & \frac{3\dot{y}}{y}\ . & 0 & -\frac{\dot{y}}{y} \\ \text{fit} & 4\dot{y}y^2 & * & +\frac{\dot{y}z^3}{y} \end{array} \quad \begin{array}{lll} \text{Mult.} & x^2y & +2y^3 \\ & & -2cyz \\ & & +3yz^2 \\ & & -\ z^3 \\ \text{per} & \frac{2\dot{x}}{x}\ . & 0 \\ \text{fit} & 2\dot{x}xy+ & * \end{array} \quad \begin{array}{lllll} \text{Mult.} & -z^3 & +3yz^2 & -2cyz & +x^2y \\ & & & & +2y^3 \\ \text{per} & \frac{3\dot{z}}{z}\ . & \frac{2\dot{z}}{z}\ . & \frac{\dot{z}}{z}\ . & 0 \\ \text{fit} & -3\dot{z}z^2 & +6\dot{z}yz & -2c\dot{z}y & * \end{array}$$

Quare fluendi celeritatum $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ relatio est $4\dot{y}y^2+\frac{\dot{y}z^3}{y}+2\dot{x}xy-3\dot{z}z^2+6\dot{z}yz-2c\dot{z}y=0$.

(c) Vide Librum de Quad. Curv. Prop. I.

7. Cæterùm

6. Cæterùm cùm tres ſint hîc fluentes quantitates x, y & z, deberet alia inſuper æquatio dari, quâ relatio inter ipſas, ut et inter earum fluxiones, penitus determinetur. Quemadmodum ſi ponitur $x+y-z=0$; exinde fluxionum alia relatio juxta regulam erit $\dot{x}+\dot{y}-\dot{z}=0$. Confer jam haſce cum præcedentibus æquationibus, eliminando quamlibet è tribus quantitatibus, et quamlibet etiam è tribus earum fluxionibus, et reliquorum relationes penitius determinatas obtinebis. INVENTIO FLUXIONUM.

8. Siquando in æquatione propoſitâ inſint fractiones complexæ, aut ſurdæ quantitates, pro ſingulis pono totidem literas, eaſque fingens deſignare quantitates fluentes, operor ut antè. Dein ſupprimo et extermino literas aſcriptitias, ut hîc videre eſt.

9. EXEMP. 3. Si quantitatum x et y relatio ſit $yy-aa-x\sqrt{aa-xx}$: pro $x\sqrt{aa-xx}$ ſcribo z; et inde habeo duas æquationes $y^2-a^2-z=0$, et $aaxx-x^4-z^2=0$: quarum prior ut antè dabit $2\dot{y}y-\dot{z}=0$, pro relatione celeritatum $\dot{y}$ et $\dot{z}$; et poſterior dabit $2a^2\dot{x}x-4\dot{x}x^3-2\dot{z}z=0$, ſive $\frac{aa\dot{x}x-2\dot{x}x^3}{z}=\dot{z}$, pro relatione celeritatum $\dot{x}$ et $\dot{z}$. Jam $\dot{z}$ ſuppreſſo, fiet $2\dot{y}y-\frac{aa\dot{x}x+2\dot{x}x^3}{z}=0$: dein reſtituto $x\sqrt{aa-xx}$ pro z, habebitur $2\dot{y}y-\frac{aa\dot{x}+2\dot{x}x^2}{\sqrt{aa-xx}}=0$, relatio inter $\dot{x}$ et $\dot{y}$, quæ quærebatur.

10. EXEMP. 4. Si $x^3-ay^2+\frac{by^3}{a+y}-x^2\sqrt{ay+x^2}=0$ deſignat relationem inter x et y: pono $z=\frac{by^3}{b+y}$, et $v=x^2\sqrt{ay+x^2}$, et inde nactus ſum tres æquationes, $x^3-ay^2+z-v=0$, $az+yz-by^3=0$, et $ax^4y+x^6-vv=0$. Prima dat $3\dot{x}x^2-2a\dot{y}y+\dot{z}-\dot{v}=0$. Secunda dat $a\dot{z}+\dot{z}y+\dot{y}z-3b\dot{y}y^2=0$, et tertia dat $4a\dot{x}x^3y+6\dot{x}x^5+a\dot{y}x^4-2\dot{v}v=0$, pro relationibus celeritatum $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$. Ipſorum vero $\dot{z}$ et $\dot{v}$ valores per ſecundam ac tertiam inventos (nempe $\frac{3b\dot{y}y^2-\dot{y}z}{a+y}$ pro $\dot{z}$, et $\frac{4a\dot{x}x^3y+6\dot{x}x^5+a\dot{y}x^4}{2v}$ pro $\dot{v}$) ſubſtituo in primam, et oritur $3\dot{x}x^2-2a\dot{y}y+\frac{3b\dot{y}y^2-\dot{y}z}{a+y}-\frac{4a\dot{x}x^3y+6\dot{x}x^5+a\dot{y}x^4}{2v}=0$. Et vice z et v reſtitutis valoribus $\frac{by^3}{a+y}$ et $x^2\sqrt{ay+xx}$, prodit æquatio quæſita, $3\dot{x}x^2-2a\dot{y}y+\frac{3ab\dot{y}y^2+2b\dot{y}y^3}{a^2+2ay+y^2}-\frac{4a\dot{x}xy+6\dot{x}x^3+a\dot{y}xx}{2\sqrt{ay+xx}}=0$, quâ relatio celeritatum $\dot{x}$ et $\dot{y}$ deſignatur.

11. Quo pacto in aliis caſibus operandum eſt, quemadmodum

cùm

PROBLEMA PRIMUM.

cùm in æquatione propofitâ reperiuntur furdi denominatores, radicales cubicæ, radicales intra radicales, ut $\sqrt{ax+\sqrt{aa-xx}}$ aut alii ejufmodi perplexi termini, ex his credo manifeftum effe.

12. Quinimo fi in æquatione quantitates involventur, quæ nullâ ratione geometricâ determinari et exprimi poffunt, quales funt Areæ vel Longitudines curvarum; tamen relationes fluxionum haud fecus inveftigantur, prout in exemplo fequente conftabit.

Præparatio in Exempl. 5.

13. Pono BD ordinatam effe in angulo recto ad AB, et quòd ADH fit Curva, quæ per relationem inter AB et BD, æquatione quâlibet exhibitam, definitur. AB vero dicatur x, et curvæ area ADB ad unitatem applicata dicatur z. Dein erige perpendiculum AC æquale unitati, et per C duc CE parallelam AB et occurrentem BD in E, et concipiendo has duas fuperficies, ADB & ACEB, genitas effe per motum rectæ BED, manifeftum erit, quòd earum fluxiones (hoc eft fluxiones quantitatum $1\times z$ & $1\times x$, five quantitatum z & x) funt inter fe ut BD et BE, lineæ generantes. Eft ergo $\dot{z}:\dot{x}::$ BD : BE, five 1; adeoque $\dot{z}=\dot{x}\times$ BD.

14. Et hinc fit, quòd z in æquatione quâlibet defignante relationem inter x et aliam quamvis fluentem quantitatem y involvi poteft, et tamen fluxionum $\dot{x}$ & $\dot{y}$ relatio nihilo minùs invenire.

15. EXEMP. 5. Quemadmodum fi proponatur $z^2+axz-y^4=0$, pro defignandâ relatione inter x et y, ut et $\sqrt{ax-xx}=$ BD, pro curvâ determinandâ, quæ proin erit circulus: æquatio $z^2+axz-y^4=0$, ficut in præcedentibus, dabit $2\dot{z}z+a\dot{z}x+a\dot{x}z-4\dot{y}y^3=0$, pro relatione celeritatum $\dot{x}$, $\dot{y}$ & $\dot{z}$. Et præterea, cùm fit $\dot{z}=\dot{x}\times$ BD five $=\dot{x}\sqrt{ax-xx}$, pro eo fubftitue hunc valorem, et orietur $\overline{2\dot{x}z+a\dot{x}x}\sqrt{ax-xx}+a\dot{x}z-4\dot{y}y^3=0$ æquatio definiens relationem celeritatum $\dot{x}$ et $\dot{y}$.

16. DEMONSTR. Fluentium quantitatum momenta (i. e. earum partes indefinitè parvæ, quarum additamento per fingula temporis

temporis indefinitè parva ſpatia augentur) ſunt ut fluendi celeritates. Quare ſi cujuſvis, ut x, momentum per factum ex ejus celeritate $\dot{x}$, et infinitè parvâ quantitate o (i. e. per $\dot{x}o$) deſignetur, cæterorum v, y, z momenta per $\dot{v}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, deſignabuntur, ſiquidem $\dot{v}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, & $\dot{z}o$. Sunt inter ſe ut $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$. INVENTIO FLUXIONUM.

Jam cùm quantitatum fluentium (ut x & y) momenta (ut $\dot{x}o$ & $\dot{y}o$) ſint additamenta infinitè parva, quibus illæ quantitates, per ſingula temporis infinitè parva intervalla, augentur; ſequitur, quòd quantitates illæ x et y, poſt quodlibet infinitè parvum temporis intervallum, futuræ ſunt $x+\dot{x}o$, et $y+\dot{y}o$. Et inde æquatio, quæ relationem quantitatum fluentium ad omne tempus indifferenter deſignat, æquè deſignabit relationem inter $x+\dot{x}o$, et $y+\dot{y}o$, ac inter x et y: adeo ut $x+\dot{x}o$ et $y+\dot{y}o$ pro quantitatibus iſtis, vice x et y, in dictam æquationem ſubſtitui poſſunt.

Detur itaque quælibet æquatio $x^3-ax^2+axy-y^3=o$, et ſubſtitue $x+\dot{x}o$ pro x, et $y+\dot{y}o$ pro y, et emerget.

$$\left.\begin{array}{l} x^3+3\dot{x}ox^2+3\dot{x}^2oox+\dot{x}^3o^3 \\ -ax^2-2a\dot{x}ox-\ a\dot{x}^2oo \\ +axy+\ a\dot{x}ox+\ a\dot{y}ox\ +a\dot{x}\dot{y}oo \\ -y^3\ -3\dot{y}oy^2\ -3\dot{y}^2ooy\ -\dot{y}^3o^3 \end{array}\right\}=o$$

Jam ex hypotheſi ſunt $x^3-ax^2+axy-y^3=o$; quibus deletis, et reliquis terminis per o diviſis, reſtabunt $3\dot{x}x^2+3\dot{x}^2ox+\dot{x}^3oo-2a\dot{x}x-a\dot{x}\dot{x}o+a\dot{x}y+a\dot{y}x+a\dot{x}\dot{y}o-3\dot{y}y^2-3\dot{y}^2oy-\dot{y}^3oo=o$. Et inſuper, cùm o ſupponitur eſſe infinitè parvum, eò ut momenta quantitatum deſignare poſſit; termini per illud multiplicati, reſpectu cæterorum, nihil valebunt. Rejicio itaque, et reſtat $3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y+a\dot{y}x-3\dot{y}y^2=o$, ut ſuprà in Exempl. 1.

Hinc obſervare eſt, quòd termini non multiplicati per o ſemper evaneſcent, ut et illi multiplicati per o pluſquam unius dimenſionis: et quòd reliquorum terminorum, per o diviſorum, ea ſemper erit forma, quam juxta regulam habere debent. Id quod volui oſtendere.

17. Et hoc monſtrato, cætera, quæ regula involvit, facilè conſequentur; quemadmodum quòd in æquatione propoſitâ plures fluentes quantitates involvi poſſunt, et quòd termini non modò

 per

PROBLEMA SECUNDUM. per numerum dimenfionum quantitatum fluentium, fed per quaflibet alias Arithmeticas Progreffiones multiplicari poffunt; dummodo in operatione, juxta quamlibet fluentem quantitatem, fit eadem terminorum differentia, et progreffio fecundum eundem cujufque dimenfionum ordinem difponatur (d). Et his conceffis, quæ præterea in exemplis 3, 4 & 5, docentur per fe manifefta funt.

PROBLEMA SECUNDUM.

18. *Expofitâ æquatione Fluxiones quantitatum involvente relationem quantitatum inter fe invenire.*

Solutio Particularis.

Cum hoc Problema fit præcedentis converfum, contrario modo folvi debet: utpote terminos per $\dot{x}$ multiplicatos difponendo fecundum dimenfiones ipfius x, dividendoque per $\frac{\dot{x}}{x}$, ac dein per progreffionem; atque idem opus in terminis per $\dot{v}$, $\dot{y}$ vel $\dot{z}$ multiplicatis inftituendo, et refultantium fummam, rejectis terminis redundantibus, ponendo æqualem nihilo.

19. Exempl. Sic expofitâ æquatione $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$; operor ad hunc modum.

Divido $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y$	divido $-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x$
per $\frac{\dot{x}}{x}$ & fit $3x^3 - 2ax^2 + axy$	per $\frac{\dot{y}}{y}$ fit $-3y^3 + ayx$
dein div. per 3 . 2 . 1	div. per 3 . 1
et fit $x^3 \;\; -ax^2 \;\; +axy$	fit $-y^3 \;\; +axy$

Et fumma $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, erit relatio defiderata quantitatum

(d) Nimirum fi Æquationem quamlibet propofitam, puta $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, in quantitatem $x^m y^n$ multiplicaveris, tranfmutaveris in hanc aliam; $x^{m+3}y^n - ax^{m+2}y^n + ax^{m+1}y^{n+1} - x^m y^{n+3} = 0$ quæ eafdem quas prior illa quantitatum x, y inter ipfas relationes, alio licet modo, exprimet.

Jam ex tranfmutatâ, multiplicationem membrorum cum feriebus illis arithmeticis, quas tranfmutatæ indices conftituunt, inftituendo, hanc elicies fluxionum æquationem:

$\overline{m+3}\,y^n x^{m+2}\dot{x} - \overline{m+2}.\,ay^n x^{m+1}\dot{x} + \overline{m+1}.\,ay^{n+1}x^m\dot{x} - my^{n+3}x^{m-1}\dot{x} - \overline{n+3}.\,x^m y^{n+2}\dot{y} + \overline{n+1}.ax^{m+1}y^n\dot{y} - n.ax^{m+2}y^{n-1}\dot{y} + nx^{m+3}y^{n-1}\dot{y} = 0.$

Quæ membris ejus omnibus à quantitate $x^m y^n$ divifis, in hanc mutabitur; $\overline{m+3}.\,x^2\dot{x} - \overline{m+2}.ax\dot{x} + \overline{m+1}.ay\dot{x} - my^3x^{-1}\dot{x} - \overline{n+3}\,y^2\dot{y} + \overline{n+1}\,ax\dot{y} - nax^2y^{-1}\dot{y} + nx^3y^{-1}\dot{y} = 0$: quam minori quidem negotio è datâ deduxiffes, fi datam, fecundum indices literæ x primùm, tum literæ y, ordinatam, in feries, primùm $m+3.\ m+2.\ m+1.\ m$, tum $n+3.\ n+2.\ n+1.\ n$, multiplicâffes, et reliqua peregiffes ex præceptis Newtoni. Hæc autem æquatio, fluxionum $\dot{x}$, $\dot{y}$ relationes mutuas

tum x et y. Ubi observandum venit, quòd etsi terminus axy bis refultavit, tamen non pono bis in hâc summâ, $x^3 - ax^2 + axy - y^3$ sed redundantem terminum rejicio. Et sic ubicunque terminus aliquis bis resultat, aut sæpiùs, si de pluribus fluentibus quantitabus agitur, semel tantùm in summâ terminorum scribo. INVENTIO FLUENTIUM.

20. Sunt et aliæ circumstantiæ, quas artificis ingenio pro re natâ observandas esse remitto; nam supervacaneum esset his multa verba impendere; siquidem Problema non semper potest hoc artificio solvi. Addo tamen, quòd postquam artifex relationem fluentium quantitatum hâc methodo adeptus est, si juxta Prob. 1. potest regredi ad expositam æquationem fluxiones involventem, rectè operatus est; sin secùs vitiosè. Sic in exemplo proposito, ubi æquationem $x^3-ax^2+axy-y^3=0$ adeptus sum, si relatio inter $\dot{x}$ et $\dot{y}$ ope primi Problematis vicissim inde requiratur, obtinebitur æquatio exposita $3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y-3\dot{y}y^2+a\dot{y}x=0$. Unde constat æquationem $x^3-ax^2+axy-y^3=0$, rectè inventam fuisse. At si æquatio $x\dot{x}-\dot{x}y+\dot{y}a=0$, exponeretur, et inde præscriptâ methodo elicerem $\frac{1}{2}x^2-xy+ay=0$, pro relatione inter x et y, vitiosa foret operatio; siquidem exinde per Prob. 1. vicissim produceretur $\dot{x}x-\dot{x}y-\dot{y}x+\dot{y}a=0$, quæ differt ab æquatione primò expositâ.

21. Hæc itaque perfunctoriè notata prætermittens, solutionem generalem aggredior.

Preparatio in Generalem Solutionem.

Et imprimis observandum est, quòd in expositâ æquatione symbola fluxionum, cùm sint quantitates diversi generis à quantitatibus quarum sunt fluxiones, in singulis terminis debent ad.

mutuas æquè exprimit, licet alio quidem modo, ac simplicior illa, quam è datâ, multiplicando in series quas datæ indices constituunt, deducere licet; quæ hæc erit, $3x\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$.

Similiter in omni casu, sive in series quas potestatum indices constituunt, sive in illas quas constituunt iidem indices datis quibusvis quantitatibus, m, n aucti, æquationem propositam multiplices, & reliqua, quæ Newtonus præcepit, exsequaris, idem planè effeceris. Æquationes varias quidem efformaveris, sed quæ variis modis idem omnes significabunt; luculentè tamen aliæ, aliæ magis obscurè. *Colson ad Locum.*

Cæterùm rationem hanc inutiliter implicitam, quâ initio usus est, Newtonus postea meritò repudiavit; multiplicationibus in series indicum contentus. Cùm reverà multiplicationibus illis in indices datis quantitatibus auctos vix aliud efficiatur, nisi ut æquatio fluxionalis, ex occultâ quasi æquationis propositæ multiplicatione, formâ implicatiore prodeat. *Vide Wilson. Appendix to Robins's Works.*

æque-

PROBLEMA SECUNDUM.

æque-multas dimensiones ascendere (e). Et ubi res aliter se habet; alia alicujus fluentis quantitatis Fluxio subintelligi debet esse unitas, per quam termini depressiores toties multiplicantur, ut in omnibus symbola fluxionum ad eundem dimensionum gradum ascendant. Quemadmodum si exponitur æquatio $\dot{x}+\dot{x}\dot{y}x-xx=0$, tertiæ alicujus fluentis quantitatis, ut z, fluxio $\dot{z}$ subintelligi debet esse unitas; per quam primus terminus $\dot{x}$ semel, et ultimus xx bis multiplicetur, ut fluxiones inibi ad æque-multas dimensiones, ac in secundo termino, $\dot{x}\dot{y}x$, ascendant: quasi exposita æquatio ex hâc $\dot{z}\dot{x}+\dot{x}\dot{y}x-\dot{z}\dot{z}x^2=0$ derivata fuisset, ponendo $\dot{z}=1$. Et sic in æquatione $\dot{y}x=yy$ debes imaginari $\dot{x}$ esse unitatem, per quam terminus yy multiplicatur.

22. Æquationes autem, in quibus duæ tantùm sunt fluentes quantitates, quæ ad æque-multas dimensiones passim ascendunt, semper possunt ad talem formam reduci, ut ex unâ parte habeatur ratio fluxionum (velut $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ vel $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ vel $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$ &c.) et ex alterâ parte valor ejus rationis simplicibus terminis algebraicis designatus, sicut hîc videre est: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=2+2x-y$. Et ubi æquationibus præcedens particularis solutio non satisfacit, requiritur ut ad hanc formam reducas.

23. Quamobrem cùm in illius rationis valore terminus aliquis à compositâ quantitate denominetur, vel sit radicalis, vel si ratio illa sit æquationis radix affectæ: reductio vel per divisionem, vel extractionem radicis, vel æquationis affectæ resolutionem, institui debet; prout in superioribus ostensum est.

24. Quem-

(e) NIMIRUM huic *Fluxionis* vocabulo Newtonus duas ferè res subjecit: magnitudinum mutabilium mutandi Celeritates, et Magnitudines cujuscunque generis, quibus celeritates illæ geometricè exhibeantur. Priore quidem sensu, qui primarius est, Fluxiones diversi generis sunt res, ac quantitates illæ, quarum Fluxiones sunt. Quæ verò posteriore sensu magnitudines Geometricæ Fluxiones dici solent, eas sanè in eodem genere sumi, in quo ipsarum sint Fluentes, nihil vetat. Quanquam verò notis fluxionum algebraicis hæ sæpiùs significari existimandæ sunt, quàm celeritates illæ, quas repræsentant; in omni tamen Æquatione Fluxionali, ex quâ Fluentium relationes eliciendæ sint, oportet membra singula notis fluxionum pariter implicari: proinde ac si magnitudinum [illegible], atque illarum, quæ fluendi celeritates exponant, genus necessariò diversum esset. Aliter enim æquatio relationes Fluxinnum mutuas non purè exprimet; sed permistè quodammodo magnitudinum quibus geometricè fluxiones exponantur, harum, inquam, permistè inter ipsas relationes et cum fluentibus. Ut æquatio $b^2\dot{x}+\dot{x}\dot{y}x-ax^3=0$, relationes quidem indicat, quæ rectis fortè $\dot{x}$, $\dot{y}$ inter ipsas, et cum aliâ rectâ x, intercedant; minimè verò illas, quæ, nullâ tertiæ x ratinne habitâ, duarum $\dot{x}$, $\dot{y}$ sint peculiares. Itaque hujusmodi æquatio non est verè Fluxionalis.

24. Quemadmodum si exponitur $\dot{y}a-\dot{y}x-\dot{x}a+\dot{x}x-\dot{x}y=0$: hæc imprimis reductione vel fit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=1+\frac{y}{a-x}$, vel $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}=\frac{a-x}{a-x+y}$. Et in priori casu, si terminum $\frac{y}{a-x}$, à compositâ quantitate $a-x$ denominatum, reduco ad infinitam seriem simplicium terminorum, $\frac{y}{a}+\frac{xy}{aa}+\frac{x^2y}{a^3}+\frac{x^3y}{a^4}$ &c. dividendo numeratorem y per denominatorem $a-x$, obtinebo $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=1+\frac{y}{a}+\frac{xy}{a^2}+\frac{x^2y}{a^3}+\frac{x^3y}{a^4}$ &c. cujus ope relatio inter x et y determinanda est. Inventio Fluentium.

25. Sic expositâ $\dot{y}\dot{y}=\dot{x}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}xx$, sive $\frac{\dot{y}\dot{y}}{\dot{x}\dot{x}}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}+xx$; et ulteriori reductione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+xx}$; radicem quadraticam è terminis $\frac{1}{4}+xx$ extraho; et obtineo infinitam seriem $\frac{1}{2}+xx-x^4+2x^6-5x^8+14x^{10}$ &c. quam pro $\sqrt{\frac{1}{4}+xx}$ substituendo, prodit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=1+x^2-x^4+2x^6-5x^8$ &c. vel $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=-x^2+x^4-2x^6+5x^8$ &c. prout $\sqrt{\frac{1}{4}+xx}$ additur vel subducitur à $\frac{1}{2}$.

26. Atque ita si exponitur $\dot{y}^3+ax\dot{x}^2\dot{y}+a^2\dot{x}^2\dot{y}-\dot{x}^3x^3-2\dot{x}^3a^3=0$, sive $\frac{\dot{y}^3}{\dot{x}^3}+ax\frac{\dot{y}}{\dot{x}}+aa\frac{\dot{y}}{\dot{x}}-x^3-2a^3=0$, extraho radicem cubicam affectam, et prodit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=a-\frac{x}{4}+\frac{xx}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$ &c. prout videre est Cap. III. § 6.

27. Cæterum hìc observandum venit, quòd terminos solummodo pro compositis habeo, qui ex parte fluentium quantitatum componuntur. Terminos ubi nulla est, nisi ex parte datarum quantitatum, compositio, pro simplicibus habeo: siquidem ad simplices reduci possunt, fingendo æquales esse aliis datis. Sic

nalis. Verè quidem Fluxionalis esset, si rectarum $\dot{y}$, $\dot{x}$, eas relationes purè exprimeret, quæ ex eo illis intervenerint, quòd earum celeritatum proportiones, quibus celeritatibus rectæ mutabiles y, x mutantur, inter se semper servent. Has verò purè si exprimerit, nullam planè æquatio illa indicaret rectæ $\dot{y}$, vel $\dot{x}$, ad illam x relationem; quæ inde unde diximus nulla quidem nasci potest; siquidem Motûs celeritas et res mota genere sunt alienissima. At verò ex æquatione non verè fluxionali mutuas fluentium relationes eruere frustra aggressus eris, nisi artificio aliquo ad formam verè fluxionalem priùs ea revocata sit. Sanè si pro æquatione, $b^2\dot{x}+x\dot{y}x-ax^3=0$, hanc aliam sumas, $b^2\dot{x}\dot{z}+b\dot{x}\dot{y}x-\frac{ax^3\dot{z}\dot{z}}{b}=0$, quæ, posito utramque b, z unitati æqualem esse, in illam priorem migraverit, ex hâc quidem trium x, y, z relationes mutuas, vià mox tradendâ, explorare liceat, et per æquationem quandam exponere. Tum si illius z ad illam x, vel ad illam y, vel ad duas x, y simul, relationes aliæ per æquationem aliam, vel datam vel pro arbitrio fingendam, exprimantur, ex duabus æquationibus tertia utique existet, quâ duæ x, y quomodo inter se affectæ sint, nullâ tertiæ z ratione habitâ, indicatum erit.

quantitates

PROBLEMA SECUNDUM. quantitates $\frac{ax+bx}{c}$, $\frac{x}{a+b}$, $\frac{bcc}{ax+bx}$, $\frac{b^4}{ax^2+bx^2}$, $\sqrt{ax+bx}$ &c. pro simplicibus; habeo siquidem ad simplices $\frac{\varepsilon x}{c}$, $\frac{x}{\varepsilon}$, $\frac{bcc}{\varepsilon x}$, $\frac{b^4}{\varepsilon x^2}$, $\sqrt{\varepsilon x}$, sive $\varepsilon^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ &c. reduci possunt, fingendo esse $a+b=\varepsilon$.

28. Præterea, quo fluentes quantitates à se invicem clariùs distinguantur, Fluxionem quæ, in Numeratore rationis disponitur, sive antecedentem rationis, haud impropriè Relatam quantitatem nominare possum, et alteram ad quam refertur, Correlatam; ut et fluentes quantitates iisdem respectivè nominibus insignire. Et quo sequentia promptiùs intelligantur, possis imaginari Correlatam quantitatem esse Tempus, vel potiùs quamvis æquabiliter fluentem quantitatem, quâ tempus exponitur et mensuratur; et alteram, sive Relatam quantitatem, esse Spatium, quod mobile, utcunque acceleratum vel retardatum, in illo tempore transfigit: et quod Problematis intentio est, ut è celeritate motùs ad omne tempus datâ, spatium, in toto tempore transactum, determinetur.

29. Cæterùm Æquationes, respectu hujus Problematis, in tres ordines distingui convenit.

1. In quibus duæ quantitatum Fluxiones et alterutra tantùm Fluens quantitas involvuntur.

2. In quibus duæ involvuntur fluentes quantitates unà cum Fluxionibus earum.

3. Quæ plures duabus quantitatum Fluxionibus complectuntur.

Et his præmissis Problematis confectionem secundum hosce tres casus aggrediar.

SOLUTIONIS CASUS PRIMUS.

30. Fluentem quantitatem, quam unicè æquatio complectitur, suppone Correlatam esse, et æquatione perinde dispositâ (hoc est faciendo ut ex unâ parte habeatur fluxionis alterius ad hujus fluxionem ratio, et valor ejus in simplicibus terminis ex alterâ) multiplica valorem rationis fluxionum per Correlatam quantitatem; dein singulos ejus terminos divide per numerum dimensionum, quibus illa quantitas inibi afficitur; et quod oritur valebit alteram fluentem quantitatem.

31. Sic expositâ $\dot{y}\dot{y} = \dot{x}\dot{y} + \dot{x}\dot{x}xz$, suppono x esse correlatam quantitatem; et, æquatione perinde reductâ, habebitur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + x^2 - x^4 + 2x^6$, &c. Jam duco valorem $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ in x, et oritur $x + x^3 - x^5 + 2x^7$, &c. quos terminos sigillatim per numerum dimensionum divido, et exitum $x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7$, &c. pono $= y$. Et isthâc æquatione desiderata relatio inter x et y determinatur. INVENTIO FLUENTIUM.

32. Sic habitâ $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2}$, &c. prodibit $y = ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048a^2}$, &c. pro determinandâ relatione inter x & y.

33. Et sic æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{a}{x^{\frac{1}{2}}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$, dat $y = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + 2ax^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$. Nam valorem $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ duc in x, et fit $\frac{1}{xx} - \frac{1}{x} + ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$, sive $x^{-2} - x^{-1} + ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$. Quibus terminis per numerum dimensionum divisis, emergit valor assignatus y.

3. Ad eundem modum æquatio $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{2b^2c}{\sqrt{ay^3}} + \frac{3y^2}{a+b} + \sqrt{by+cy}$ dat $x = -\frac{4b^2c}{\sqrt{ay}} + \frac{y^3}{a+b} + \frac{2}{3}\sqrt{by^3+cy^3}$. Nam valore $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ ducto in y, oritur $\frac{2b^2c}{\sqrt{ay}} + \frac{3y^3}{a+b} + \sqrt{by^3+cy^3}$, sive $2b^2ca^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{a+b}y^3 + \sqrt{b+c} \times y^{\frac{3}{2}}$. Et inde prodit valor x, dividendo per numerum dimensionum cujusque termini.

35. Atque ita $\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = z^{\frac{2}{3}}$ dat $y = \frac{3}{5}z^{\frac{5}{3}}$. Et $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{ab}{cx^{\frac{1}{3}}}$ dat $y = \frac{3abx^{\frac{2}{3}}}{2c}$. At æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{x}$ dat $y = \frac{a}{0}$. Nam $\frac{a}{x}$ ductum in x fit a; quo per numerum dimensionum (qui nullus est) diviso, prodit $\frac{a}{0}$, quantitas infinita pro valore y.

36. Quamobrem siquando consimilis terminus, cujus denominator involvit correlatam quantitatem unius tantùm dimensionis, in valore $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ reperiatur, pro correlatâ quantitate substitue summam vel differentiam inter eandem et aliam quamvis datam quantitatem, pro arbitrio assumptam. Nam quantitatum fluentium juxta prodeuntem æquationem eadem erit inter se fluendi relatio, ac juxta æquationem primò expositam; et infinita quantitas Relata hoc pacto parte infinitâ diminuetur, et evadet finita, sed terminis tamen numero infinitis constans.

37. Æquatione itaque $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{x}$ expositâ, si pro x scribam $b + x$,

 quantitatem

PROB. II. quantitatem b pro lubitu assumens, prodibit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{b+x}$; factâque divisione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4}$, &c. Et inde Regula, ut in superioribus, dabit $y = \frac{ax}{b} - \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{ax^3}{3b^3} - \frac{ax^4}{4b^4}$, &c. relationem inter x et y.

38. Sic etiam habitâ æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2}{x} + 3 - xx$; si, propter terminum $\frac{2}{x}$, scribam $1+x$ pro x, emerget $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2}{1+x} + 2 - 2x - xx$; terminoque $\frac{2}{1+x}$ in infinitam seriem, $2 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4$, &c; redacto, erit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 4 - 4x + x^2 - 2x^3 + 2x^4$, &c. Adeoque juxta regulam obtinebitur $y = 4x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{5}x^5$, &c. relatio inter x et y.

39. Atque ita si proponitur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} - x^{\frac{1}{2}}$, quia terminum x^{-1} (sive $\frac{1}{x}$) inesse video, transmuto x; quemadmodum pro eo substituendo $1-x$; et oritur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1-x} - \sqrt{1-x}$. Terminus autem $\frac{1}{1-x}$ valet $1 + x + x^2 + x^3$, &c. Et $\sqrt{1-x}$ valet $1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3$, &c. adeoque $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ sive $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3, \&c.}$ valet $1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3$, (β) &c. Quamobrem (valoribus hisce substitutis) erit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{8}x^3$, (β) &c. Et inde per regulum fit $y = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{11}{32}x^4$, (β) &c. Et sic in aliis.

40. Hujusmodi etiam transmutatione Fluentis quantitatis æquatio in aliis casibus nonnunquam commodè reduci poterit. Quemadmodum si exponitur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{c^3x}{c^3 - 3c^2x + 3cx^2 - x^3}$; pro x scribo $c-x$; et obtineo $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{c^3 - c^2x}{x^3}$, sive $\frac{c^3}{x^3} - \frac{c^2}{x^2}$, et inde per regulam $y = -\frac{c^3}{2x^2} + \frac{c^2}{x}$. At harum transmutationum usus in sequentibus magis elucescet.

SOLU-

(β) Hæc ad Calculorum fidem emendata promo: Codices MSS. habent $1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{8}x^3$ &c. $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{27}{16}x^3$ &c. $y = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{27}{64}x^4$ &c. Vitiosè quidem. Nam

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 +,$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 +,$$

Ergo

SOLUTIONIS CASUS SECUNDUS.

INVENTIO FLUENTIUM.

Præparatio.

41. Hæc itaque de æquationibus involventibus unicam tantùm fluentem quantitatem. Cùm verò utraque involvitur, Æquatio imprimis ad præscriptam formam redigenda est; efficiendo scilicet, ut ex unâ parte habeatur fluxionum ratio æqualis aggregato simplicium terminorum ex alterâ.

42. Et præterea siquæ sunt in æquationibus, sic reductis, fractiones, quæ denominantur à fluenti quantitate, à denominatoribus istis liberari debent, per transmutationem ejus fluentis quantitatis paulo antè commemoratam.

43. Sic expositâ æquatione $\dot{y}ax - \dot{x}aa - \dot{x}xy = 0$, sive $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{a} + \frac{a}{x}$ (propter terminum $\frac{a}{x}$) assumo b ad arbitrium, et pro x vel scribo $b + x$, vel $b - x$, vel $x - b$. Quemadmodum si scribam $b + x$, fiet $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{a} + \frac{a}{b+x}$. Adeoque termino $\frac{a}{b+x}$ in infinitam seriem, per divisionem, reducto, erit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{a} + \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4}$ &c.

44. Et ad eundem modum expositâ æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3y - 2x + \frac{x}{y} - \frac{2y}{x^2}$, si (propter terminos $\frac{x}{y}$ & $\frac{2y}{x^2}$) scribam $1 - y$ pro y, et $1 - x$ pro x, orietur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3y + 2x + \frac{1-x}{1-y} + \frac{2y-2}{1-2x+x^2}$. Terminus autem $\frac{1-x}{1-y}$, per infinitam divisionem, dat $1 - x + y - xy + y^2 - xy^2 + y^3 - xy^3$, &c. ac terminus $\frac{2y-2}{1-2x+xx}$, per similem divisionem, dat $2y - 2 + 4xy - 4x + 6x^2y - 6x^2 + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4$, &c. Quare est $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -3x + 3xy + y^2 - xy^2 + y^3 - xy^3$, &c. $+ 6x^2y - 6x^2 + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4$, &c.

$$\text{Ergo } \frac{1}{\sqrt{1-x}} + 1 - x = 2 + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{11}{8}x^2 + \tfrac{21}{16}x^3 +,$$
$$\text{Sed } \sqrt{1-x} = \qquad 1 - \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{8} - \tfrac{x^3}{16} -,$$
$$\text{Ergo } \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1-x} - \sqrt{1-x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + 2x + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{11}{8}x^3 +,$$
$$\text{Et } y = x + x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{11}{32}x^4 +,$$

Cæterum hæ series, sicut alia nonnulla, quæ apud Colsonum et Editores exteros mendosa sunt, rectè se habent in editione alterà Londinensi, formâ minore, anonymo interprete; quæ tamen typothetarum erroribus tota scatet.

PROB. II.

REGULA.

45. Æquatione, cùm opus eſt, ſic præparatâ, terminos ordina juxta dimenſiones fluentium quantitatum, ponendo imprimis non affectos Relatâ quantitate; dein affectos minimâ ejus dimenſione, & ſic deinceps. Terminos etiam, in his ſingulis claſſibus, juxta dimenſiones alterius Correlatæ quantitatis pariter diſpone; eoſque in prima claſſe (i. e. quos relata quantitas non afficit) ſcribe in ſerie collaterali dextrorſum pergente, et cæteros in ſeriebus deſcendentibus in ſiniſtrâ columnâ, prout indicant ſubſequentia diagrammata. Opere ſic inſtituto, primum ſive depreſſiſſimum è terminis in primâ claſſe duc in Correlatam quantitatem, divideque per numerum dimenſionum, et in quotiente pro initiali termino valoris Relatæ quantitatis repone. Hunc deinde in æquationis terminos, in ſiniſtrâ columnâ diſpoſitos, pro relatâ quantitate ſubſtitue, et è terminis proximè depreſſiſſimis ſecundum quotientis terminum, eâdem ratione, quâ primum, elicies. Et eâdem operatione, ſæpiùs repetitâ, quotientem ad arbitrium producere poſſis. Sed res exemplo clariùs patebit.

46. EXEMPL. 1. Exponatur æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + x^2 + xy$, cujus terminos, $1 - 3x + x^2$, non affectos Relatâ quantitate, y, vides in ſupremâ ſerie collateraliter diſpoſitos; cæteroſque y et xy, in ſiniſtrâ columnâ.

	$+1 - 3x + xx$
$+y$	$* + x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$
$+xy$	$* \quad * + x^2 - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{30}x^6$
Summa	$1 - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5$
$y =$	$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$

Et imprimis terminum initialem, 1, duco in Correlatam quantitatem x, fitque x; quam per numerum dimenſionum 1 diviſum repono in ſubſcriptâ quotiente. Dein hoc termino pro y in marginalibus ſubſtituto, vice $+y$ et $+xy$, obtineo x & x^2; quos è regione dextrorſum ſcribens, ex omnibus excerpo depreſſiſſimos terminos, $-3x$ & $+x$; quorum aggregatum, $-2x$, ductum in x fit $-2x^2$, et per numerum dimenſionum, 2, diviſum dat $-x^2$ pro ſecundo termino valoris y in quotiente. Hoc proinde termino ad complendum valorem y in marginalibus $+y$ & $\cdot xy$ adſcito, oriuntur præterea $-xx$ & $-x^3$, terminis priùs oriundis, $+x$ & $+xx$, adnectendi. Quo facto, iterum terminos proximè depreſſiſſimos, $+x^2 - x^2$ & $+x^2$, in unam ſummam, x^2, colligo; et inde, ut priùs, tertium terminum, $\frac{1}{3}x^3$, in valore y reponendum elicio.

5

cio. Iterumque $\frac{1}{3}x^3$ in marginalium terminorum valores adſcito, è proximè depreſſiſſimis $\frac{1}{2}x^3$ & $-x^3$, in unum aggregatis, elicio $-\frac{1}{6}x^4$ quartum terminum valoris y. Et ſic in infinitum. INVENTIO FLUENTIUM.

47. EXEMPL. 2. Ad eundem modum, ſi relationem inter x & y, habitâ æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$ &c. cujus terminorum ſeries infinitè progredi ſubintelligitur, determinare oportet; pono 1 in capite, reliquoſque terminos in ſiniſtrâ columnâ, et opus deinde proſequor pro more adjuncti diagrammatis.

	$+1$						
$+\frac{y}{a}$	$*$	$+\frac{x}{a}$	$+\frac{x^2}{2a^2}$	$+\frac{x^3}{2a^3}$	$+\frac{x^4}{2a^4}$	$+\frac{x^5}{2a^5}$	&c.
$+\frac{xy}{a^2}$	$*$	$*$	$+\frac{x^2}{a^2}$	$+\frac{x^3}{2a^3}$	$+\frac{x^4}{2a^4}$	$+\frac{x^5}{2a^5}$	&c.
$+\frac{x^2y}{a^3}$	$*$	$*$	$*$	$+\frac{x^3}{a^3}$	$+\frac{x^4}{2a^4}$	$+\frac{x^5}{2a^5}$	&c.
$+\frac{x^3y}{a^4}$	$*$	$*$	$*$	$*$	$\frac{x^4}{a^4}$	$+\frac{x^5}{2a^5}$	&c.
$+\frac{x^4y}{a^5}$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$+\frac{x^5}{a^5}$	&c.
Summa	1	$+\frac{x}{a}$	$+\frac{3x^2}{2a^2}$	$+\frac{2x^3}{a^3}$	$+\frac{5x^4}{2a^4}$	$+\frac{3x^5}{a^5}$	&c.
	$y = x$	$+\frac{x^2}{2a}$	$+\frac{x^3}{2a^2}$	$+\frac{x^4}{2a^3}$	$+\frac{x^5}{2a^4}$	$+\frac{x^6}{2a^5}$	&c.

Ubi propoſitum eſt mihi elicere valorem y aduſque ſex dimenſiones x; et eâ de causâ terminos omnes, quos propoſito nihil conducere prævideo, inter operandum miſſos facio; ſicut innuit nota &c. quam ſeriebus intercisis adnexui.

48. EXEMPL. 3. Pari methodo ſi proponitur æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -3x + 3xy + yy - xyy + y^3 - xy^3 + y^4 - xy^4$ &c. $+ 6x^2y - 6x^2 + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4 + 12x^5y - 12x^5$ &c. et valorem y ad uſque ſeptem dimenſiones x eruere inſtitutum eſt, terminos, ut in adjuncto diagrammate, in ordinem redigo, et operor ſicut in præcedentibus; hoc tantùm excepto, quòd cùm hîc, in ſiniſtrâ columnâ, y non tantùm unius, ſed etiam duarum ac trium dimenſionum exiſtit, vel etiam plurium, prout valorem y ultra gradum x^7 extrahere ſtatuam; ſubjicio quadratum et cubum valoris y eatenus gradatim productum, ut cùm in valoribus marginalium terminorum dextrorſum gradibus inſcribuntur, termini tot dimenſionum emergant, quot ad ſequentem operationem:

	$-3x$	$-6x^2$	$-8x^3$	$-10x^4$	$-12x^5$	$-14x^6$	&c.
$+3xy$	$*$	$*$	$-\frac{9}{2}x^3$	$-6x^4$	$-\frac{75}{8}x^5$	$-\frac{273}{20}x^6$	&c.
$+6x^2y$	$*$	$*$	$*$	$-9x^4$	$-12x^5$	$-\frac{75}{4}x^6$	&c.
$+8x^3y$	$*$	$*$	$*$	$*$	$-12x^5$	$-16x^6$	&c.
$+10x^4y$ &c.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$-15x^6$	&c.
$+y^2$	$*$	$*$	$*$	$+\frac{9}{4}x^4$	$+6x^5$	$+\frac{107}{8}x^6$	&c.
$-xy^2$	$*$	$*$	$*$	$*$	$-\frac{9}{4}x^5$	$-6x^6$	&c.
$+y^3$ &c.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$-\frac{27}{8}x^6$	&c.
Summa	$-3x$	$-6x^2$	$-\frac{25}{2}x^3$	$-\frac{91}{4}x^4$	$-\frac{333}{8}x^5$	$-\frac{367}{5}x^6$	

$$y = -\frac{3}{2}x^2 - 2x^3 - \frac{25}{8}x^4 - \frac{91}{20}x^5 - \frac{111}{16}x^6 - \frac{367}{35}x^7 \text{ \&c.}$$
$$y^2 = +\frac{9}{4}x^4 + 6x^5 + \frac{107}{8}x^6 \text{ \&c.}$$
$$y^3 = -\frac{27}{8}x^6 \text{ \&c.}$$

nem:

Prob. II. nem requiri percipio. Et hâc methodo prodit tandem $y = -\frac{3}{2}x^2 - 6x^3 - \frac{25}{8}x^4$ &c. æquatio desiderata. Qui valor cùm sit negativus, patet alterum è quantitatibus x et y decrescere dum altera increscit. Atque idem pariter concludi debet, cùm fluxionum altera affirmativa sit, et altera negativa.

49. Exempl. 4. Haud secus cùm Relata quantitas fractis dimensionibus afficitur, possis valorem ejus extrahere.

Veluti si proponitur $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{1}{2}y - 4y^2 + 2yx^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}x^2 + 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^3$, ubi x in termino $2yx^{\frac{1}{2}}$ (sive $2y\sqrt{x}$) fractâ dimensione, $\frac{1}{2}$, afficitur: ejus $x^{\frac{1}{2}}$ valorem è valore x paulatim elicio, extrahendo nempe radicem quadraticam, sicut in inferiori parte diagrammatis videre est; eò ut in marginalis termini $2yx^{\frac{1}{2}}$ valorem gradatim transferri et inferri possit. Et sic tandem adipiscor æquationem $x = \frac{1}{4}y^2 - y^3 + 2y^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}} - \frac{41}{100}y^5$ &c. quâ x respectu y indefinitè determinatur. Et sic in aliis quibuscunque casibus operari licet.

	$+\frac{1}{2}y \cdot - 4y^2 + 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^3$
$2yx^{\frac{1}{2}}$	$* \cdot + y^2 \cdot * - 2y^3 + 4y^{\frac{7}{2}} - 2y^4$ &c.
$-\frac{4}{5}x^2$	$* \cdot\ * \cdot * \ * \ * - \frac{1}{20}y^4$ &c.
Summa	$+\frac{1}{2}y \cdot - 3y^2 + 7y^{\frac{5}{2}} * + 4y^{\frac{7}{2}} - \frac{41}{20}y^4$ &c.
	$x = +\frac{1}{4}y^2 - y^3 + 2y^{\frac{7}{2}} * + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}} - \frac{41}{100}y^5$ &c.
	$x^{\frac{1}{2}} = +\frac{1}{2}y - y^2 + 2y^{\frac{5}{2}} - y^3$ &c.
	$x^2 = \frac{1}{16}y^4$ &c.

50. Cæterùm dixi hasce solutiones infinitis modis præstari posse. Et hoc fiet, si non tantùm initialem quantitatem supremæ seriei, sed et aliam quamvis datam quantitatem, pro primo termino quotientis ad arbitrium assumas; ac deinde opereris ut in præcedentibus. Sic in primo præcedentium exemplorum; si pro primo termino valoris y assumas 1, et pro y, in terminis marginalibus ($+y$ et $+xy$) substituas, reliquamque operationem, cujus specimen adjunxi, sicut in præcedentibus prosequaris, ipsius y alius exurget valor $1 + 2x + x^3 + \frac{1}{4}x^4$ &c.

	$+1 - 3x + xx$
$+y$	$+1 + 2x \quad * \ + x^3 + \frac{1}{4}x^4$ &c.
$+xy$	$* + x + 2x^2 \quad * \ + x^4$ &c.
Summa	$+2 \quad * + 3x^2 + x^3 + \frac{5}{4}x^4$
	$y = 1 + 2x \quad * + x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5$ &c.

51. Et sic etiam alius atque alius exurget, assumendo 2, 3, vel alium quemvis numerum pro primo ejus termino. Vel si symbolum aliquod, ut a, pro illo termino indefinitè designando usurpes, eâdem operandi methodo, quam hîc etiam designatam habes,

	$+1 - 3x + x^2$
$+y$	$+a + x - x^2 + \frac{1}{3}x^3$ &c.
	$+ ax + ax^2 + \frac{2}{3}ax^3$ &c.
$+xy$	$* + ax + x^2 - x^3$ &c.
	$+ ax^2 + ax^3$
Summa	$+1 - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3$
	$+a + 2ax + 2ax^2 + \frac{5}{3}ax^3$
	$y = a + x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4$
	$+ ax + ax^2 + \frac{2}{3}ax^3 + \frac{5}{12}ax^4$ &c.

habes, elicies tandem $y = a + x + ax - x^2 + ax^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}ax^3$ &c. Quâ inventâ, possis pro a substituere, 1, 2, 0, $\frac{1}{2}$, aut quemvis numerum, et sic relationem inter x et y modis infinitis obtinere.

INVENTIO FLUENTIUM.

52. Et nota, quòd ubi quantitas elicienda afficitur fractâ dimensione, ut in præcedentium exemplorum quarto vides, convenit plerumque unitatem, vel alium quemvis aptum numerum, pro primo ejus termino adhibere. Imo hoc necesse est, ubi radix, ad fractæ illius dimensionis valorem obtinendum, propter negativum signum, nequit aliàs extrahi; ut et ubi nulli sunt termini in primâ sive capitali classe reponendi, ex quibus initialis ille terminus eliciatur.

53. Sic tandem hoc molestissimum et omnium difficillimum Problema, ubi duæ tantùm fluentes quantitates, unà cum earum fluxionibus, in æquatione comprehenduntur, absolvi. Sed præter generalem methodum, quà omnes difficultates complexus sum, sunt aliæ plerumque contractiores, quibus opus aliquando sublevari possit, et quarum aliqua specimina ex abundanti perstringere, fortè non erit ingratum.

54. (I) Siquando itaque quantitas elicienda sit alicubi negatæ dimensionis, non est absolutè necessarium, ut æquatio propterea ad aliam formam reducatur. Sic enim expositâ æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{y} - x^2$, ubi y est unius negatæ dimensionis, possim equidem ad aliam formam reducere, veluti scribendo $1 + y$ pro y; sed expeditior erit solutio, quam in annexo diagrammate designatam habes; ubi assumpto 1 pro initio valoris y, cæteros ejus terminos ut in præcedentibus extraho; et interea valorem $\frac{1}{y}$ exinde per divisionem, paulatim institutam, elicio, et infero in valorem marginalis termini.

	$* \; * - xx$
$\frac{1}{y}$	$1 - x + \frac{3}{2}xx$ &c.
Summa	$1 - x + \frac{1}{2}xx$
	$y = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ &c.
	$\frac{1}{y} = 1 - x + \frac{3}{2}x^2$ &c.

55. (II) Neque semper opus est ut alterius fluentis quantitatis dimensiones sint passim affirmativæ. Nam ex æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3 + 2y - \frac{yy}{x}$, absque termini $\frac{yy}{x}$ reductione præscriptâ, emerget $y = 3x - \frac{3}{2}x^2 - 4x^3$ &c.

56. Et

Prob. II.

	$-\frac{1}{xx}+\frac{1}{x}$
$-y$	$* \;-\frac{1}{x}$
Summa	$-\frac{1}{xx}$ o
$y=\frac{1}{x}$	

56. Et ex $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = y + \frac{1}{x} - \frac{1}{xx}$, opere ad modum annexi speciminis instituto, emerget $y=\frac{1}{x}$.

57. Ubi obiter nota, quòd inter modos infinitos quibus quælibet æquatio resolvi potest, sæpenumero contingit, aliquos esse, qui ad finitum valorem quantitatis eliciendæ, sicut in allato specimine, finiuntur; et quos haud difficile est invenire, si pro primo valoris termino symbolum aliquod assumatur: et, resolutione peractâ, consulatur de symboli illius quantitate; quà valor elicitus evadat finitus.

58. (III) Porro si valor y ex æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{2x} + 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$ eliciendus sit, id sine aliquâ reductione termini $\frac{y}{2x}$ non incommodè fiet; fingendo, pro more analytico, datum esse quod quæritur. Utpote pro primo termino valoris ejus effingo $2ex$, assumendo $2e$ pro numerali coefficiente, quæ nondum innotescit. Et hunc $2ex$ pro y in termino marginali $\frac{y}{2x}$ substituens, prodit e quem scribo

	$1-2x+\frac{1}{2}xx$
$\frac{y}{2x}$	$e+fx+gxx+hx^3$
Summa	$+1-2x+\frac{1}{2}x^2+hx^3$ $+e+fx+gxx$
Hypothetice $y=2ex+2fxx+2gx^3+2hx^4$ &c. Consequenter $y=+x-x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}hx^4$ $+ex+\frac{1}{2}fx^2+\frac{1}{3}gx^3$ Revera $y=2x-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{5}x^3$	

ad dextram; et summa $1+e$ dabit $x+ex$ pro eodem primo termino valoris y, quem priùs designaveram termino $2ex$. Pono itaque $2ex=x+ex$ et inde elicio $e=1$. Adeoque valoris y primus terminus ($2ex$) est $2x$. Ad eundem modum, pro secundo termino designando, effictum $2fx^2$ usurpo; et inde tandem eruo $-\frac{2}{3}$ pro valore f, adeoque $-\frac{4}{3}xx$ pro secundo termino. Et sic effictus g in tertio termino valebit $\frac{1}{10}$, at h in quarto valebit o: et proinde, cùm nullos præterea terminos superesse video, concludo opus finitum esse, et y valere $2x-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{5}x^3$ præcisè.

59. Ad eundem fere modum si esset $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3y}{4x}$, effinge $y=ex^s$, ubi e ignotam coefficientem, et s numerum dimensionum similiter ignotum denotet. Et ex^s pro y substituto, prodibit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3ex^{s-1}}{4}$,

$\frac{3ex^{s-1}}{4}$, et inde rurfus $y=\frac{3ex^{s}}{4s}$. Conferantur jam valores y, et videbis effe $\frac{3e}{4s}=e$, adeoque $s=\frac{3}{4}$ et e indefinitum. Quare affumpto utcunque e erit $y=ex^{\frac{3}{4}}$. Inventio fluentium.

60. (IV) Ad hæc nonnunquam opus ab altiffimâ dimenfione æquabilis quantitatis inchoari poteft, et ad depreffiores continuo pergere. Veluti fi detur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{y}{xx}+\frac{1}{xx}+3+2x-\frac{4}{x}$; et ab altiffimo termino $2x$ opus inchoetur; difponendo capitalem feriem in ordine præcedentibus contrario, emerget tandem $y=xx+4x-\frac{1}{x}$ &c. prout in appofitâ operandi formâ videre eft.

	$+2x+3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}$
$+\frac{y}{xx}$	$*+1+\frac{4}{x}*-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2x^4}$, &c.
Summa	$2x+4-*+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2x^4}$
	$y=x^2+4x*-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{6x^3}$ &c.

Et hîc in tranfitu notari poteft, quòd inter operandum potuit inter terminos, $4x$ et $-\frac{1}{x}$, pro intermedio deficienti termino, quælibet data quantitas inferi, et fic valor y modis infinitis extrahi.

61. (V) Siqui præterea fint fracti dimenfionum Relatæ quantitatis indices, ad integros reduci poffunt, fingendo quantitatem illam, fuâ fractâ dimenfione affectam, effe alii cuilibet tertiæ fluenti quantitati æqualem; et fubftituendo tum illam quantitatem, tum fluxionem ejus, ab illâ fictâ æquatione oriundam, pro Relatâ quantitate et ejus fluxione.

62. Quemadmodum fi exponitur æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=3xy^{\frac{2}{3}}+y$, ubi Relata quantitas fracto dimenfionis indice $\frac{2}{3}$ afficitur; affumptâ ad arbitrium fluenti quantitate z, fingo effe $y^{\frac{1}{3}}=z$, five $y=z^3$; et fluxionum relatio juxta Prob. 1. erit $\dot{y}=3\dot{z}zz$. Quare fubftituto $3z^2\dot{z}$ pro $\dot{y}$, ut et z^3 pro y, ac z^2 pro $y^{\frac{2}{3}}$, emerget $\frac{3zz^2}{\dot{x}}=3xz^2+z^3$, five $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}=x+\frac{1}{3}z$; ubi z fupplet vices Relatæ quantitatis. Poftquam verò valor z eo nomine cruitur, utpote $z=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{15}x^3+\frac{1}{216}x^4+\frac{1}{3240}x^5$ &c. pro z reftitue $y^{\frac{1}{3}}$, et habebis defideratam relationem inter x et y: nempe $y^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{15}x^3+\frac{1}{216}x^4$ &c. Et cubis partium utrobique pofitis erit $y=\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{24}x^7+\frac{7}{864}x^8$ &c (h).

(h) Emendavi calculis fuadentibus.

PROB. II. 63. Pari ratione si detur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \sqrt{4y} + \sqrt{xy}$ sive $= 2y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$; fingo $z = y^{\frac{1}{2}}$ sive $z^2 = y$, et inde per Prob. I. elicio $2z\dot{z} = \dot{y}$: et consequenter $\frac{2z\dot{z}}{\dot{x}} = 2z + x^{\frac{1}{2}}z$, sive $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Adeoque per casum priorem hujus est z, $(y^{\frac{1}{2}}) = x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, et partibus quadratis $y = x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9}x^3$. Sin valorem y modis infinitis desideres, fac $z = c + x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, assumpto utcunque initiali termino c; et erit y (z^2) æqualis $c^2 + 2cx + \frac{2}{3}cx^{\frac{3}{2}} + x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9}x^3$. Ast hæc nimis officiosè tractare videor, siquidem rarissimè usui esse possunt.

SOLUTIONIS CASUS III.

64. Problematis, ubi tres vel plures quantitatum fluxiones æquatio complectitur, resolutio brevi absolvitur: scilicet inter duas quaslibet istarum quantitatum relatio (ubi ex statu quæstionis non determinatur) quælibet effingi debet, et earum fluxionum exinde quæri; eò ut alterutra, unà cum ejus fluxione, ex æquatione expositâ exterminari possit. Quâ de causâ, si trium insunt quantitatum fluxiones, unica effingenda est æquatio; ac duæ si insunt quatuor, et sic porro; ut exposita æquatio in aliam tandem æquationem transformetur, cui non insint plures duabus: et hâc deinde ut suprà resolutâ, reliquarum quantitatum relationes eruentur.

65. Sic æquatione $2\dot{x} - \dot{z} + \dot{y}x = 0$ expositâ; quo quantitatum x, y, et z (quarum fluxiones $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ æquatio complectitur) relationes inter se obtineam, relationem inter duas quaslibet ut x et y pro lubitu effingo: puta quòd sit $x = y$, vel $2y = a + z$, vel $x = yy$ &c. Sit autem $x = yy$, et inde erit $\dot{x} = 2\dot{y}y$; quare scriptis $2\dot{y}y$ pro $\dot{x}$, et yy pro x, exposita æquatio transformabitur in $4\dot{y}y - \dot{z} + \dot{y}y^2 = 0$. Et inde relatio inter y & z emerget $2yy + \frac{1}{3}y^3 = z$. Ubi si x pro yy, et $x^{\frac{3}{2}}$ pro y^3 vicissim scribatur, prodibit etiam $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.

Adeoque inter modos infinitos quibus x, y et z ad invicem referuntur, unus his æquationibus, $x = yy$, $2y^2 + \frac{1}{3}y^3 = z$, et $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$, designatus investigatur.

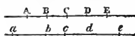
Demonstratio.

INVENTIO FLUENTIUM.

Demonſtratio.

66. Problema tandem confecimus, ſed demonſtratio ſupereſt. Et in tantâ rerum copiâ ne per nimias ambages è propriis fundamentis ſyntheticè derivetur, ſufficiat per analyſin ſic breviter indicare. Scilicet æquatione quâlibet expoſitâ, poſtquam opus ad finem perduxeris, experiri eſt, quòd ex elicitâ æquatione expoſita viciſſim (per Prob. 1.) eruetur. Et proinde quantitatum relatio in elicitâ æquatione exigit relationem fluxionum in expoſitâ, et contrà: ſicut oſtendendum erat. Sic æquatione $\dot{y}=x$ expoſitâ, elicietur $y=\frac{1}{2}x^2$, et inde viciſſim (per Prob. 1.) $\dot{y}=\dot{x}x$, ſive $=x$, quandoquidem $\dot{x}$ ſupponitur eſſe 1. Et ſic ex $\dot{y}=1-3x+y+x^2+xy$ provenit $y=x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{45}x^6$ &c (¹). Et inde viciſſim (per Prob. 1) $\dot{y}=1-2x+x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{4}{45}x^5$ &c. Qui duo valores ipſius $\dot{y}$ conveniunt, ut patet, ſubſtituendo $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5$ &c. pro y in priori.

67. CÆTERUM in æquationum reductione adhibui operationem, de quâ præterea rationem reddere oportet: eſtque tranſmutatio fluentis quantitatis per connexionem cum quantitate datâ. Sunto AE et *ae* lineæ utrinque infinitæ, per quas mobilia duo è longinquo trajiciantur, ſimul attingentia locos A et *a*, B et *b*, C et *c*, D et *d*, &c. Et ſit B punctum à cujus



diſtantiâ rei mobilis in AE motus æſtimetur, ita ut −BA, BC, BD, BE ſucceſſivè ſint fluentes quantitates, quando mobile ſit in locis A, C, D, E. Sitque *b* conſimile punctum in alterâ lineâ: et erunt −BA ac −*ba* contemporaneæ fluentes quantitates, ut et BC ac *bc*, BD ac *bd*, BE ac *be*, &c. Quòd ſi vice punctorum B & *b*, ſubſtituantur A & *c*, ad quæ tanquam quieſcentia motus referantur, tunc o & −*ca*, AB & −*bc*, AC & o, AD & *cd*, AE & *ce*, &c. erunt contemporaneæ fluentes quantitates. Mutantur itaque fluentes quantitates additione et ſubtractione datarum AB & *bc*, ſed non mutantur quoad motûs celeritatem et fluxionis mutuum reſpectum: nam ejuſdem longitudinis ſunt partes contemporaneæ, AB & *ab*, BC et *bc*, CD et *cd*, DE et *de*, in utroque caſu. Et ſic in æquationibus, quibus hæ quantitates deſignantur, partes contemporaneæ quan-

(¹) Per § 46. hujus Capitis, poſitâ $\dot{x}=1$.

Prob. II. quantitatum non ideo mutantur, quòd earum absoluta longitudo datâ aliquâ augeatur vel minuatur. Unde constat propositum: nam Problematis hujus scopus propriè non alius est, quàm contemporaneas partes, sive absolutarum quantitatum (v, x, y, aut z) contemporaneas differentias, datâ fluendi ratione descriptas determinare. Et perinde est cujusnam sint absolutæ longitudinis quantitates illæ, dummodo contemporaneæ sive correspondentes earum differentiæ cum expositâ fluxionum relatione conveniant.

68. Potest et hujus rei ratio sic algebraicè reddi. Proponatur $\dot{y}=\dot{x}xy$, et finge $x=1+z$, eritque (per Prob. I.) $\dot{x}=\dot{z}$. Adeoque pro $\dot{y}=\dot{x}xy$ scribi potest $\dot{y}=\dot{x}y+\dot{x}zy$. Jam cum sit $\dot{x}=\dot{z}$, patet quantitates x et z, etsi non sint ejusdem longitudinis, pariter tamen fluere respectu ipsius y, et pares habere partes contemporaneas. Quidni itaque iisdem symbolis denotem, quæ fluendi ratione conveniunt, et, ad contemporaneas differentias determinandas, vice $\dot{y}=\dot{x}xy$ usurpem $\dot{y}=\dot{x}y+\dot{x}zy$.

69. Jam denique quo pacto partes contemporaneæ, ex æquatione quantitates involvente, inveniri possunt, per se manifestum est. E. G. Sit $y=\frac{1}{x}+x$ æquatio. Et cùm sit $x=2$ erit $y=2\frac{1}{2}$; cùm verò sit $x=3$, erit $y=3\frac{1}{3}$; ergo dum x fluit à 2 ad 3, y fluit à $2\frac{1}{2}$ ad $3\frac{1}{3}$. Adeoque partes in hoc tempore transactæ sunt $(3-2)$ 1, et $(3\frac{1}{3}-2\frac{1}{2})$ $\frac{5}{6}$.

Jactis hisce sequentium fundamentis, ad Problemata magis particularia jam transeo.

CAPUT QUINTUM.

PROB. III.

Determinare Maximas et Minimas.

1. QUANTITAS ubi Maxima est vel Minima, in illo momento nec profluit nec refluit. Nam si profluit, id arguit minorem fuisse, et statim majorem fore, quàm jam est: et contrà si refluit. Quamobrem fluxionem ejus per Prob. I. quære, et pone nullam esse.

2. Ex-

2. Exempl. 1. Si maxima quantitas x in æquatione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 3$ defideretur; quantitatum x et y fluxiones quære, et prodibit, $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$: positoque $\dot{x} = 0$ reftabit, $-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$, five $3y^2 = ax$. Cujus ope poffis alterutram, x vel y, in æquatione primariâ exterminare, et per æquationem reftantem determinare alteram, et utramque deinde per $3y^2 + ax = 0$. De Maximis et Minimis.

3. Perinde eft hæc operatio, ac fi multiplicâffes terminos propofitæ æquationis per numerum dimenfionum alterius fluentis quantitatis y. Unde prodit Huddeniana notiffima regula, quòd ad obtinendam maximam aut minimam Relatam quantitatem, æquatio juxta dimenfiones Correlatæ quantitas difponi debet, et per quamlibet Arithmeticam progreffionem multiplicari. Aft cùm neque hæc regula ad æquationes furdis quantitatibus affectas, neque ulla alia hactenus, quòd fciam, evulgata, abfque prævià reductione, fe extendat: ejus rei accipe fequens exemplum.

4. Exempl. 2. Si maxima quantitas y in æquatione $x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - xx\sqrt{ay+xx} = 0$ determinanda eft; ipfarum x et y, fluxiones quære, et emerget $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{y}y + \frac{3ab\dot{y}y^2 + 2b\dot{y}y^3}{aa + 2ay + y^2} - \frac{4a\dot{x}xy + 6\dot{x}x^3 + a\dot{y}x^2}{2\sqrt{ay+xx}} = 0$. Et cùm ex hypothefi fit $\dot{y} = 0$, neglige terminos in $\dot{y}$ ductos, (id quod inter operandum ad minuendum laborem antea fieri potuit) cæterofque per $\dot{x}x$ divide, et reftabit $3x - \frac{2ay + 3xx}{\sqrt{ay+xx}} = 0$, factâque reductione exurget, $4ay + 3xx = 0$, cujus ope poffis utramvis quantitatem x vel y ex æquatione primò propofitâ exterminare, ac deinde ex æquatione refultante, quæ cubica erit, valorem alterius elicere.

5. *Ex hoc Problemate fequentium refolutio petenda eft.*

I. In dato Triangulo aut fegmento cujufvis Curvæ, maximum rectangulum infcribere.

II. Maximam vel Minimam rectarum ducere, quæ inter datum punctum, et Curvam pofitione datam interjacent. Sive à dato puncto ad curvam ducere perpendiculum.

III. Maximam vel Minimam rectarum ducere, quæ per datum punctum

punctum transeuntes interjacent aliis duabus, sive rectis sive curvis lineis.

IV. A puncto intra Parabolam dato rectam ducere, quæ parabolam omnium obliquissimè secabit. Et idem in aliis curvis facere.

V. Curvarum Vertices, Maximas aut Minimas latitudines, Puncta in quibus partes circumactæ se decussant, determinare.

VI. Curvarum puncta invenire, ubi maximè aut minimè curvantur.

VII. Invenire minimum angulorum in quibus rectæ ad diametros suas in datâ Ellipsi ordinatim applicantur.

VIII. Ellipsium, per data quatuor puncta transeuntium, vel minimam definire, vel eam quæ ad formam circularem maximè accedit.

IX. Amplitudinem sphæricæ superficiei determinare, quam lux è longinquò fluens, postquam ab anteriori hemisphærio refracta fluit, illustrat in posteriori.

Et hujusmodi alia permulta faciliùs excogitari possunt, quàm (propter computandi fastidium) resolvi.

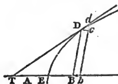
CAPUT SEXTUM.

PROB. IV.

Curvarum Tangentes ducere.

MODUS I.

1. TANGENTES pro variis relationibus curvarum ad rectas variè ducuntur. Et imprimis esto BD recta in dato angulo ad aliam rectam, AB tanquam basin ordinata, et ad curvam ED terminata. Et moveatur hæc ordinata, per infinitè parvum spatium, ad locum bd; ita ut momento cd augeatur, dum AB augetur momento Bb, cui Dc æqualis est. Jam producatur Dd, donec cum AB in T conveniat, et hæc tanget curvam in D vel d:



eruntque

eruntque triangula dcD, DBT similia. Adeoque TB : BD : : DC : cd. DE TANGENTIBUS DUCENDIS.

2. Cùm itaque relatio BD ad AB, in æquatione quâlibet pro curvâ determinandâ, exponitur, quære relationem fluxionum (per Prob. 1.) et cape TB ad BD in ratione fluxionis AB ad fluxionem BD, ac TD tanget curvam in D.

3. EXEMPL. 1. Nominatâ AB, x; et BD y; esto earum relatio $x^3-ax^2+axy-y^3=0$. Et fluxionum relatio erit $3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y-3\dot{y}y^2+a\dot{y}x=0$. Adeoque $\dot{y}:\dot{x}::3xx-2ax+ay:3yy-ax::$ BD(y) : BT. Ergo BT $=\frac{3y^3-axy}{3x^2-2ax+ay}$. Dato itaque puncto D, et inde DB et AB, sive y et x; dabitur longitudo BT, quâ tangens DT determinatur.

4. Potest autem hæc operandi methodus sic concinnari. Æquationis expositæ terminos fac esse nihilo æquales: per proprium numerum dimensionum ordinatæ quantitatis multiplica, et exitum colloca in numeratore: dein terminos ejusdem æquationis per proprium numerum dimensionum basis multiplica, et exitum, per basin divisum, colloca in denominatore valoris BT. Et illam BT cape ad partes adversus A, si valor ejus sit affirmativus, aut versus A si sit negativus.

$$\begin{matrix} & 0\,.\,\,0\,.\,\,1\,.\,\,3 \\ \text{5. Sic æquatio} & x^3-ax^2+axy-y^3=0, \text{ per superiores numeros} \\ & 3\,.\,\,2\,.\,\,1\,.\,\,0 \end{matrix}$$

multiplicata dat $axy-3y^3$ pro numeratore; et per inferiores multiplicata, ac divisa per x, dat $3x^2-2ax+ay$ pro denominatore valoris BT.

6. Sic æquatio $y^3-by^2-cdy+bcd+dxy=0$ (quæ designat parabolam secundi generis, cujus beneficio Des Cartes construxit æquationes sex dimensionum,) primâ fronte dat $\frac{3y^3-2by^2-cdy+dxy}{dy}$ sive $\frac{3y^2}{d}-\frac{2by}{d}-c+x=$ BT.

7. Et sic $a^2-\frac{r}{q}x^2-y^2=0$ (quæ designat Ellipsin cujus centrum A) dat $\frac{-2yy}{-\frac{2r}{q}x}$ sive $\frac{qyy}{rx}=$ BT. Et sic in aliis.

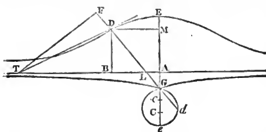
8. Et nota, quòd nihil interest cujusnam quantitatis sit angulus ordinationis ABD.

Ast hæc regula se ad æquationes surdis quantitatibus affectas, curvasque

FIG. IV. curvasque mechanicas non extendit. In istis casibus ad fundamentalem methodum recurrendum est (k).

8. EXEMPL. 2. Esto $x^3 - ay^2 + b\frac{y^3}{a+y} - x^2\sqrt{ay+x^2} = 0$ æquatio designans relationem inter AB & BD; et per Prob. I. relatio fluxionum erit $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{y}y + \frac{3a\dot{y}y^2 + 2b\dot{y}y^3}{aa+2ay+yy} - \frac{4ax\dot{x}y + 6\dot{x}x^3 + a\dot{y}x^2}{2\sqrt{ay+xx}} = 0$. Atque adeo est $3x^2 - \frac{4axy+6x^3}{2\sqrt{ay+x^2}} : 2ay + \frac{3aby^2+2by^3}{aa+2ay+yy} - \frac{axx}{2\sqrt{ay+x^2}} \; (:: \dot{y} : \dot{x}) :: \text{BD} : \text{BT}$.

9. EXEMPL. 3. Sit ED Conchoides Nichomedea, polo G, asymptoto AT, et intervallo LD descripta. Sitque GA $=b$, LD $=c$, AB $=x$, et BD $=y$. Et propter similia triangula DBL et DMG, erit LB:BD :: DM : MG. $\sqrt{cc-yy} : y :: x : b+y$. Adeoque $\overline{b+y} \times \sqrt{cc-yy} = yx$. Nactus hanc



æquationem fingo $\sqrt{cc-yy} = z$. Et sic duas æquationes, $bz + yz = yx$, et $zz = cc - yy$ habeo: quarum ope fluxiones quantitatum x, y et z (per Prob. I.) quæro. Et è primâ prodit $b\dot{z} + y\dot{z} + \dot{y}z = \dot{y}x + \dot{x}y$; ac è secundâ $2\dot{z}z = -2\dot{y}y$, sive $\dot{z}z + \dot{y}y = 0$. E quibus exterminato $\dot{z}$, oritur $-\frac{b\dot{y}y}{z} - \frac{\dot{y}y^2}{z} + \dot{y}z = \dot{y}x + \dot{x}y$. Quâ resolutâ (l) sit $y : z - \frac{by}{z} - \frac{y^2}{z} - x \; (:: \dot{y} : \dot{x}) :: \text{BD} : \text{BT}$. Cùm ergo BD sit y, erit $\text{BT} = z - x - \frac{by+y^2}{z}$. Hoc est, $-\text{BT} = \text{AL} + \frac{\text{BD} \times \text{GM}}{\text{BL}}$. Ubi signum $-$ ipsi BT præfixum denotat punctum T ad partes *adversus* A capiendum esse.

SCHOLIUM.

10. Et hinc obiter inventio puncti disterminantis concavam et convexam partem Conchoidis prodit. Nempe cum AT sit omnium minima, erit D ejusmodi punctum. Esto itaque AT $=v$, et

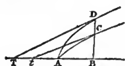
(k) § 1 & 2. traditam.
(l) In Analogiam scilicet.

cùm

cùm ſit BT $= -z + x + \frac{by + y^2}{z}$, erit $v = -z + 2x + \frac{by + y^2}{z}$. Ubi, ad opus abbreviandum, pro x ſubſtitue $\frac{bz + yz}{y}$ valorem è ſuperioribus erutum, et fiet $\frac{2bz}{y} + z + \frac{by + y^2}{z} = v$. Unde per Prob. I. fluxionibus $\dot{v}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ quæſitis, et per Prob. III. ſuppoſitâ $\dot{v} = 0$, emerget $\frac{2b\dot{z}}{y} - \frac{2b\dot{y}z}{yy} + \dot{z} + \frac{b\dot{y} + 2\dot{y}y}{z} - \frac{b\dot{z}y + \dot{z}yy}{zz} = \dot{v} = 0$. In hâc denique ſubſtitue $-\frac{\dot{y}y}{z}$ pro $\dot{z}$, et $cc - yy$ pro zz, valores $\dot{z}$ et zz è ſuperioribus petendos, et, factâ reductione, obtinebitur $y^3 + 3by^2 - 2bc^2 = 0$. Cujus æquationis conſtructione dabitur y, ſive AM; et per M acta MD ipſi AB parallela incidet in punctum flexûs contrarii, D. De Tangentibus Ducendis.

11. Præterea ſi Curva Mechanica eſt, cujus tangentem ducere oportet, quantitatum fluxiones, ut in Exemp. 5. Prob. I. quærendæ ſunt, cæteraque ut in præcedentibus peragenda.

12. Exempl. 4. Sunto AC et AD duæ Curvæ, quibus recta BCD, ad baſin AB in dato angulo applicata, occurrit in C et D; et (per Prob. I. præparat. ad Exemplum 5) erit $\dot{z} = \dot{x} \times$ BC. Jam



ſit AC Circulus, aut curva quævis nota, et ad alteram curvam, AD, definiendam, exponatur quævis æquatio, cui z intexta eſt; veluti $zz + axz = y^4$. Et, per Prob. I. erit $2\dot{z}z + ax\dot{z} + a\dot{x}z = 4\dot{y}y^3$. Et ſcripto $\dot{x} \times$ BC pro $\dot{z}$, fiet $2\dot{x}z \times$ BC $+ a\dot{x}x \times$ BC $+ a\dot{x}z = 4\dot{y}y^3$. Adeoque $2z \times$ BC $+ ax \times$ BC $+ az : 4y^3$ ($:: \dot{y} : \dot{x}$) $::$ BD : BT. Quamobrem ſi ex naturâ curvæ AC detur ordinata BC, et area ACB, ſive z, dabitur punctum T, per quod tangens DT tranſibit.

13. Ad eundem modum ſi $3z = 2y$ ſit æquatio ad curvam AD, erit $3\dot{z}$ (ſive $3\dot{x} \times$ BC) $= 2\dot{y}$. Adeoque 3CB : 2 ($:: \dot{y} : \dot{x}$) $::$ BD : BT. Et ſic in aliis.

14. Exempl. 5. Sit AB $= x$, BD $= y$, ut antè; et Curvæ cujuſvis AC longitudo ſit z; ductâque ad eam tangente, Ct, erit Bt : Ct $::$ $\dot{x} : \dot{z}$ ſive $\dot{z} = \frac{\dot{x} \times Ct}{Bt}$.

15. Jam ad aliam Curvam AD, cujus tangens ducenda eſt, detur quælibet æquatio, in quâ z involvitur; puta ſi $z = y$, erit $\dot{z} = \dot{y}$.

CAPUT VI. $\dot{z} = \dot{y}$. Adeoque Ct : Bt $(:: \dot{y} : \dot{x})$ :: BD : BT. Invento autem T age DT tangentem.

16. Sic posito $xz = yy$, erit $\dot{x}z + \dot{z}x = 2\dot{y}y$, et pro $\dot{z}$ scripto $\frac{\dot{x} \times Ct}{Bt}$, emerget $\dot{x}z + \frac{\dot{x}x \times Ct}{Bt} = 2\dot{y}y$; quare est $z + \frac{x \times Ct}{Bt} : 2y$ :: BD : BT.

17. EXEMPL. 6. Sit AC Circulus aut alia quævis nota curva, quam tangat Ct; et sit AD alia curva cujus tangentem DT ducere oportet, et quæ definitur assumendo AB = arcui AC, et (CE ac BD in dato angulo ad AB ordinatis) referendo BD ad CE vel AE in æquatione aliquâ. Dic ergo AB vel AC$=x$, BD$=y$, AE$=z$, & CE$=v$, et patet $\dot{v}$, $\dot{x}$ & $\dot{z}$ fluxiones ipsarum CE, AC & AE, esse inter se ut sunt CE, Ct & Et. Adeoque $\dot{x} \times \frac{CE}{Ct} = \dot{v}$, & $\dot{x} \times \frac{Et}{Ct} = \dot{z}$.

Detur jam quælibet æquatio ad definiendam curvam AD, veluti $y=z$, et erit $\dot{y}=\dot{z}$. Adeoque Et : Ct $(:: \dot{y} : \dot{x})$ :: BD : BT.

Vel detur $y = z + v - x$, et erit $\dot{y} = (\dot{z} + \dot{v} - \dot{x}) = \frac{\dot{x} \times CE + Et - Ct}{Ct}$. Adeoque CE$+Et-Ct$: Ct $(:: \dot{y} : \dot{x})$ :: BD : BT.

Vel denique detur $ayy = v^3$, et erit $2a\dot{y}y\ (= 3\dot{v}v^2) = 3\dot{x} \times v^2 \frac{CE}{Ct}$. Adeoque $3vv \times$ CE : $2ay \times$ Ct :: BD : BT.

18. EXEMPL. 7. Sit FC Circulus quem tangat CS; sitque FD curva, quæ definitur assumendo quamvis relationem applicatæ DB ad FC, arcum quem DA, ad centrum ducta, intercipit. Et demissâ CE in circulo applicatâ, dic AC vel AF$=1$, AB$=x$, BD$=y$, AE$=z$, CE$=v$, CF$=t$: et erit $\dot{t}z = (\dot{t} \times \frac{CE}{CS}) = \dot{v}$ (m), et $-\dot{t}v\ (= \dot{t} \times \frac{-ES}{CS}) = \dot{z}$ (n). Ubi pono $\dot{z}$ negativè, quòd AE diminuitur dum EC augetur. Est insuper AE : EC :: AB : BD, adeoque $zy = vx$, et inde per Prob. 1. $\dot{z}y + \dot{y}z = \dot{v}x + \dot{x}v$. Et hæc, exterminatis $\dot{v}$, $\dot{z}$ & v, faciunt $\dot{y}x - \dot{t}y^2 - \dot{t}x^2 = \dot{x}y$.

19. Definiatur jam Curva DF æquatione quâvis, à quâ valor $\dot{t}$, hic substituendus, deduci possit: puta sit $t=y$ (æquatio ad Primam Quadraticem) et per Prob. 1. erit $\dot{t}=\dot{y}$. Adeoque $\dot{y}x - \dot{y}y^2 - \dot{y}x^2 = \dot{x}y$. Unde

(m) Nempe cùm sit fluxio arcûs ad fluxionem sinûs ut radius ad sinum complementi (Excerpt. IV. ex Epist. not. ( ) Cor.) cùmque propter angulos ad C, E rectos sit CS : CE $=$ AC : AE $= 1 : z$.

$y : xx$

$y : xx+yy-x \; (:: \dot{y} : -\dot{x}) ::$ BD (y) : BT. Quare BT $= x^2 + y^2 - x$. Et AT $= xx + y^2 = \frac{\overline{AD}^2}{AF}$. De Tangentibus Ducendis.

20. Ad eundem modum, si sit $tt = by$, proveniet $2\dot{t}t = b\dot{y}$; et inde AT $= \frac{b}{2t} \times \frac{\overline{AD}^2}{AF}$. Et sic in aliis.

21. Exempl. 8. Quòd si AD sumatur æqualis arcui FC, existente ADH Spirali Archimedeâ; tum, stantibus jam positis linearum nominibus, est (propter angulum ABD rectum) $xx + yy = tt$. Et inde (per Prob. 1.) $\dot{x}x + \dot{y}y = \dot{t}t$. Est etiam AD : AC :: BD : CE, adeoque $tv = y$, et inde per Prob. 1. $\dot{t}v + \dot{v}t = \dot{y}$. Denique est fluxio arcûs FC ad fluxionem rectæ CE, ut AC ad AE, sive ut AD ad AB, hoc est $\dot{t} : \dot{v} :: t : x$, et inde $\dot{t}x = \dot{v}t$. Confer jam inventas æquationes, et videbis esse $\dot{t}v + \dot{t}x = \dot{y}$, et inde $\dot{x}x + \dot{y}y \; (= \dot{t}t) = \frac{\dot{y}t}{v+x}$. Atque adeo, completo parallelogrammo ABDQ, si fiat QD : QP $(::$ BD : BT $:: \dot{y} : -\dot{x}) :: x : y - \frac{t}{v+x}$, hoc est, si capiatur AP $= \frac{t}{v+x}$, erit PD ad Spiralem perpendicularis.

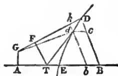
22. Ex his opinor satis manifestum est, quo pacto Curvarum omnium Tangentes ducendæ sunt. Attamen non abs re erit, si præterea confectionem problematis, ubi Curvæ aliis quibuscunque modis ad rectas referuntur, ostenderem; ut è pluribus methodis facillima et simplicissima semper possit adhiberi.

MODUS II.

23. Sit D punctum in Curvâ, à quo subtensa DG ducitur ad datum punctum G, ac DB, in dato quovis angulo, ordinatur ad basin AB. Punctum verò D per infinitè parvum intervallum, Dd, in curvâ fluat, inque GD, sumatur Gk æqualis Gd, et compleatur parallelogrammum dbBC. Et erunt Dk ac Dc contemporanea momenta ipsarum GD et BD, quibus nempe diminuuntur, dum D transfertur ad d. Jam Bd rectâ producatur, donec

(a) Nempe cùm sit fluxio arcûs ad fluxionem sinus complementi ut radius ad sinum, (Excerpt. ex Epist. not. (b) § 5.) et propter angulos ad c, E rectos fit CS : SE = AC : CE. $\dot{t} : \dot{v}$.

 cum



cum AB conveniat in T; et ab isto T ad subtensam GD demittatur perpendiculum TF, et erunt trapezia D*cdk* ac DBTF similia, adeoque DB : DF :: DC : D*k*.

24. Cùm itaque relatio BD ad GD in æquatione quâlibet, pro curvâ definiendâ, exponitur, quære relationem fluxionum, et cape FD ad DB in ratione fluxionis GD ad fluxionem BD; dein ab F erige perpendiculum FT, quod cum AB concurrat in T, et acta TD curvam tanget in D. Cape autem DF versus G si sit affirmativa; sin secus, cape ad contrarias partes.

25. Exempl. 1. Dic GD$=x$ et BD$=y$, et esto earum relatio $x^3-ax^2+axy-y^3=0$. Eritque fluxionum ratio $3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y+a\dot{y}x-3\dot{y}y^2=0$. Atque adeo $3x^2-2ax+ay:3y^2-ax(::\dot{y}:\dot{x})::DB(y)$:DF. Est ergo DF $=\frac{3y^3-axy}{3x^2-2ax+ay}$. Adeoque dato quolibet in curvâ puncto D, et inde BD et GD, sive y et x, dabitur punctum F: unde si normalem FT erigas, ad ejus concursum cum basi AB ducta DT curvam tanget.

26. Et hinc patet Regulam perinde ac in priori casu concinnari posse. Scilicet æquationis expositæ terminos omnes ad easdem partes dispone, et sigillatim per dimensiones ordinatæ y multiplica, et exitum colloca in numeratore: dein terminos ejus sigillatim per dimensiones subtensæ x multiplica, et exitum, per subtensam illam x divisum, colloca in denominatore valoris DF. Illamque DF cape ad partes contra G si sit affirmativa, sin secus, cape ad easdem partes. Et nota, quòd nihil intersit quanto intervallo punctum G distat à basi AB, si fortè distat, neque quinam sit angulus ordinationis ABD.

27. Sic æquatio superior $x^3-ax^2+axy-y^3=0$, primâ fronte dat $axy-3y^3$ pro numeratore, et $3x^2-2ax+ay$ pro denominatore valoris DF.

28. Sic etiam $a+\frac{b}{a}x-y=0$ (quæ æquatio est ad conicam sectionem (°) dat $-y$ pro numeratore et $\frac{b}{a}$ pro denominatore valoris DF, quæ ideo erit $=-\frac{ay}{b}$.

29. Et

(°) Nimirum quæ umbilicum habeat punctum G; directricem, rectam quandam positione datam cum

29. Et sic in Conchoide (ubi res expeditiùs absolvitur quàm antè) posito $GA=b$, $LD=c$, $GD=x$ et $BD=y$, (vid. Fig. Ex. 3. Mod. I.) erit $\begin{matrix} BD:DL::GA:GL \\ y : c :: b : x-c \end{matrix}$. Adeoque $xy-cy=cb$, sive $xy-cy-cb=0$. Quæ æquatio juxta regulam dat $\frac{xy-cy}{y}$, hoc est $x-c=DF$. Produc ergo GD ad F, ut sit $DF=LG$, et ad F erige normalem FT occurrentem asymptoto AB in T, et actâ DT Conchoidem tanget. DE TANGENTIBUS DUCENDIS.

30. Siquando compositæ quantitates in æquatione reperiantur, ad methodum generalem recurrendum est, nisi ubi malueris æquationem reducere.

31. EXEMPL. 2. Si detur æquatio $\overline{b+y}\times\sqrt{cc-yy}=yx$ pro relatione inter GD et BD (fig. præced.) determinandâ, fluxionum relationem juxta Prob. I. quære. Utpote ficto $\sqrt{cc-yy}=z$, æquationes $bz+yz=yx$, et $cc-yy=zz$ habebis; et inde fluxionum $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$, relationes $b\dot{z}+y\dot{z}+\dot{y}z=\dot{y}x+y\dot{x}$, et $-2\dot{y}y=2\dot{z}z$. Et exterminatis $\dot{z}$ et z, orietur $\dot{y}\sqrt{cc-yy}-\frac{b\dot{y}y+\dot{y}y^2}{\sqrt{cc-yy}}-\dot{y}x=\dot{x}y$. Est ergo $y:\sqrt{cc-yy}-\frac{by+yy}{\sqrt{cc-yy}}-x\ (::\dot{y}:\dot{x})::BD\ (y):DF$.

MODUS III.

32. Præterea si Curva ad duas subtensas AD et BD referatur, quæ à datis punctis A ac B ductæ ad curvam conveniunt: concipe punctum illud D per infinitè parvum spatium Dd in curvâ profluere. Et in AD et BD, cape $Ak=Ad$ et $Bc=Bd$. Et erunt kD & cD contemporanea momenta linearum AD et BD. Cape jam DF ad BD in ratione momenti Dk ad momentum Dc (i. e. in ratione fluxionis lineæ AD ad fluxionem lineæ BD) et erige perpendicula BT, FT, concurrentia in T; eruntque trapezia DFTB ac $Dkdc$ similia, et perinde diagonalis DT curvam tanget.

33. Per æquationem itaque, quâ relatio inter AD et BD definitur, quære relationem fluxionum ope Prob. I. Et cape FD ad BD in eâdem ratione.

cum rectâ AB, positione datâ, parallelam. Hamilton, Con. Lib. II. Prop. 11.

34. Ex-

34. EXEMPL. Posito AD$=x$ et BD$=y$, sit earum relatio $a+\frac{ex}{d}-y=0$, quæ æquatio est ad Ellipses secundi generis, quarum proprietates ad lucem refringendam Des-Cartes in Lib. II. Geometriæ docuit. Et fluxionum relatio erit $\frac{e\dot{x}}{d}-\dot{y}=0$. Est itaque $e:d\ (::\dot{y}:\dot{x})$ BD : DF.

35. Et pari ratione si $a-\frac{ex}{d}-y=0$, erit $e:-d::$ BD : DF. In priori casu, cape DF versus A, et ad contrarias partes in posteriori.

36. COROL. I. Hinc si $d=e$ (quo casu curva evadit conica sectio) erit DF=DB. Et inde triangula DFT, DBT, æqualia, angulusque FTB à tangenti bisecabitur.

37. COROL. 2. Hinc etiam quæ Des-Cartes de his Curvis circa refractiones, haud absque circuitu, demonstravit, per se manifesta sunt: siquidem DF ac DB (quæ sunt in datâ ratione d ad e) respectu sinûs totius DT sint sinus angulorum DTF ac DTB, id est, incidentiæ radii AD in superficiem curvæ, et reflectionis vel refractionis ejus DB. Estque par ratio de refractionibus conicarum sectionum, si modò punctorum A vel B alterutrum infinitè distare concipiatur.

38. Perfacile est hanc Regulam pro more præcedentium concinnare, et pluribus exemplis donare; quinimo ubi Curvæ aliis quibuscunque modis ad rectas referuntur, et ad præcedentes formas haud commodè reduci possunt, perfacile est alias Regulas, ad harum exemplar, pro re natâ excogitare.

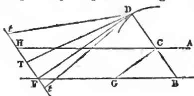
MODUS

(f) PUTA rectam mobilem BCD in locum *bcd* pervenisse. Centro A radiis AC, AD scribantur arcus circulares Cχ, DΔ qui rectæ *bd* in punctis χ, Δ occurrant. Per D ductam puta rectam DT, quæ curvam illam, ad quam terminari intelligitur recta mobilis BD, in puncto D contingat; & per C ducatur CG cum rectâ DF parallela. Fluxio rectæ AD ad fluxionem rectæ BC rationem habet eam, quæ prima est nascentis Δd ad nascentem $c\chi$. Sed ratio Δd ad $c\chi$ componitur è rationibus illius Δd ad arcum DΔ arcûsque DΔ, ad arcum Cχ arcûsque Cχ, ad rectam χc. Sed arcus DΔ est ad arcum Cχ ut recta AD ad rectam AC. Quare ratio rectæ Δd ad rectam $c\chi$ componitur è rationibus illius Δd ad arcum DΔ, rectæque DB, ad CA, arcûsque Cχ ad rectam χc. Nascentis autem Δd ad arcum nascentem DΔ prima ratio eadem est quæ rectæ FT ad rectam FD. Et arcûs nascentis Cχ ad nascentem rectam χc prima ratio eadem est quæ rectæ GC ad rectam CA, sive rectæ FD ad DB. Nascentis igitur $d\Delta$ ad nascentem χc ratio prima, sive ratio fluxionis rectæ AD ad fluxionem rectæ BC, componitur è rationibus

MODUS IV.

De Tangentibus Ducendis.

39. Quemadmodum si rectæ BD circa datum punctum B revolventis, punctum D sit ad Curvam aliquam, et C sit intersectio ejus cum rectâ AC positione datâ, habeaturque relatio inter BC et BD quâcunque æquatione designata; age BF parallelam AC, eique occurrat DF normalis ad BD. Et ad DF itidem erige normalem FT, et cape in ratione ad BC, quam habet fluxio ipsius BD ad fluxionem ipsius BC. Acta DT curvam tanget (p).



MODUS V.

40. Sin dato puncto A, æquatio relationem inter AC ac BD designat, duc CG parallelam DF, et cape FT in ratione ad BG, quam habet fluxio BD ad fluxionem AC (q).

MODUS VI.

41. Vel denique si æquatio relationem inter AC et CD definit: conveniant AC et FT in H, et cape HT in ratione ad BG quam habet fluxio CD ad fluxionem AC (r). Et sic in aliis.

tionibus rectæ FT ad rectam FD, rectæque BD ad rectam BC, rectæque FD ad rectam BD; hoc est è rationibus rectæ FT ad rectam FD, rectæque FD ad rectam BD, rectæque BD ad rectam BC. Verum ex iisdem componitur rectarum FT, BC inter ipsas ratio. Quare $\dot{\overline{BD}} : \dot{\overline{BC}} = FT : BC$. Atque ex his satis patet veritas constructionis à Newtono præscriptæ.

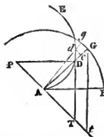
(q) Manentibus quæ modò constructa sunt, fluxio rectæ BC ad fluxionem rectæ AC rationem habebit eam quæ prima est nascentis χc ad nascentem εc: sive eam quam recta BC habet ad BG. Jam cùm ex iis quæ suprà sunt ostensa, sit $\dot{\overline{BD}} : \dot{\overline{BC}} = FT : BC$, et ex mox ostensis sit $\dot{\overline{BC}} : \dot{\overline{AC}} = BC : BG$, erit ex æquo $\dot{\overline{BD}} : \dot{\overline{AC}} = FT : BG$.

(r) Cum sit $FT : BC = \dot{\overline{BD}} : \dot{\overline{BC}}$ (not. p) et æquales sint FH, BC, erit $FT : FH = \dot{\overline{BD}} : \dot{\overline{BC}}$. Invertendo et convertendo $FH : HT = \dot{\overline{BC}} : \dot{\overline{BC}} - \dot{\overline{BD}}$. Sed $\dot{\overline{BC}} - \dot{\overline{BD}} = \dot{\overline{CD}}$. (Geometr. Flux. Th. v.) Quare $FH : HT = \dot{\overline{BC}} : \dot{\overline{CD}}$. Invertendo $HT : FH = \dot{\overline{CD}} : \dot{\overline{BC}}$. Sed $FH : FT = \dot{\overline{BC}} : \dot{\overline{BD}}$ (not. p) et $FT : BG = \dot{\overline{BD}} : \dot{\overline{AC}}$ (not. q). Quare ex æquo $HT : BG = \dot{\overline{CD}} : \dot{\overline{AC}}$.

MODUS

MODUS VII. De Spiralibus.

42. Haud secus absolvitur Problema, ubi Curvæ non ad rectas, sed ad alias Curvas lineas, uti solent Mechanicæ, referuntur. Sit BG circuli peripheria, in cujus semidiametro AG, dum circa centrum A convolvitur, moveatur utcunque punctum D, et Spiralem ADE describat. Et concipe Dd esse partem curvæ infinitè parvam, per quam D fluit; et in AD cape AC=Ad, et erunt cD ac Gg contemporanea momenta rectæ AD et peripheriæ BG. Duc ergo At parallelam rectæ cd, id est perpendicularem rectæ AD, et cum eâ tangens DT conveniat in T. Eritque cD : cd : : AD : AT. Sit insuper Gt parallela tangenti, et erit cd : Gg (: : Ad vel AD : AG) : : AT : At.



43. Quare expositâ quâcunquè æquatione, quâ relatio BG ad AD definitur, quære rationem fluxionum per Prob. 1; et cape At in illâ ratione ad AD: eritque Gt tangenti parallela.

44. Exemplum 1. Dictis BG$=x$, et AD$=y$, sit earum relatio $x^3-ax^2+axy-y^3=0$. Et ope Prob. 1. emerget $3x^2-2ax+ay:3y^2-ax\ (::\dot{y}:\dot{x})$: : AD : At : : AP : AG. Puncto t sic invento, duc Gt eique parallelam DT, et illa curvam tanget.

45. Exempl. 2. Si sit $\frac{ax}{b}=y$ (quæ æquatio est ad Spiralem Archimedeam) erit $\frac{a\dot{x}}{b}=\dot{y}$. Adeoque $a:b\ (::\dot{y}:\dot{x})$: : AD : At. Unde obiter si TA producatur ad P, ut sit AP : AB : : $a:b$, PD ad curvam recta erit [f].

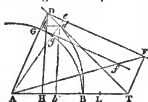
46. Exempl. 3. Si $xx=by$, erit $2\dot{x}x=b\dot{y}$, adeoque $2x:b$::AD:At. Et sic Tangentes ad quascunque Spirales nullo negotio determinari possunt.

MODUS

[f] Puta enim eductam esse DP ad angulos cum helice, hoc est, cum tangente ejus DT rectos. Et propter angulos ad A rectos, erit PA ad AD ut AD ad AT. (El. vi. 8.) Ratio autem AD ad AT componitur è rationibus illius AD ad At et At ad AT; sive è rationibus a ad b et AG vel AB ad AD. Quare PA ad AD rationem habet eam, quæ componitur è rationibus a ad b et AB ad AD. Et ex iisdem componitur ratio rectanguli $a\times$AB ad rectangulum $b\times$AD. (El. vi. 23.) Erit igitur PA ad AD ut rectangulum $a\times$AB ad rectangulum $b\times$AD. Sed PA est ad AD ut rectangulum $b\times$PA ad rectangulum $b\times$AD. (El. vi. 1.) Rectangulum igitur $b\times$PA erit ad rectangulum $b\times$AD ut rectangulum

MODUS VIII. DE QUADRATICIBUS.

47. Ad hæc si Curva sit ejusmodi, ut per centrum A ductâ utcunque AGD, quæ circulo in G, curvæque in D occurrat; relatio inter arcum BG et rectam DH, quæ in dato angulo ad basin AB ordinata est, æquatione quâvis definiatur: concipe punctum D per infinitè parvum intervallum ad d in curvâ moveri, et completo parallelogrammo $dbHk$, productâque Ad ad e ut sit $Ae = AD$: erunt Gg arcûs BG, et Dk ordinatæ DH contemporanea momenta.



Produc jam Dd rectâ ad T, ubi cum AB conveniat [t], et demitte TF in De [u] perpendicularem; eruntque trapezia, $Dkde$, DHTF, similia: atque adeo $Dk : De :: DH : DF$. Et præterea si Gf ad AG normalis erigatur, quæ cum AF concurrat in f, propter parallelas DF, Gf, erit $De : Gg :: DF : Gf$. Quamobrem ex æquo est $DH : Gf :: Dk : Gg$, hoc est, ut momenta sive fluxiones linearum DH et BG.

48. Per æquationem itaque quâ relatio BG ad DH definitur, quære rationem fluxionum (per Prob. I.) et in eâ ratione cape Gf (tangentem circuli BG) ad DH. Age DF parallelam Gf, quæ cum Af productâ conveniat in F. Et ad F erige normalem FT occurrentem AB in T, et actâ DT Quadratricem tanget.

49. EXEMPL. I. Nominatis $BG = x$, ac $DH = y$, esto $xx = by$, et (per Prob. I.) erit $2\dot{x}x = b\dot{y}$. Adeoque $2x : b :: (\dot{y} : \dot{x}) :: DH : Gf$. Et invento f, cætera, ut præscriptum, est determinabis.

50. Cæterùm hæc Regula fortè sic elegantior evadet; fac $\dot{x} : \dot{y} :: AB : AL$. Dein $AL : AD :: AD : AT$, et DT curvam tanget. Nam propter æqualia triangula AFD, ADT est $AD \times DF = AT \times DH$. Adeoque $AT : AD$ ($:: DF : DH$, sive $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} Gf$) $:: AD : \frac{\dot{y}}{\dot{x}} AG$, sive AL [x].

51. Ex-

rectangulum $a \times AB$ ad rectangulum $b \times AN$. (El. V. 11.) Rectangula igitur $\overline{b \times FA}$, $\overline{a \times AB}$ sunt inter se æqualia. (El. V. 9.) Quare FA erit ad AB ut a ad b. (El. VI. 16.)

(t) Hoc est, produci intelligitur recta, quæ curvam in D contingit, usque dum cum AB conveniat. Concursus esto T.

(u) Hoc est, in tangentem arcûs circularis centro A radio AD scripti.

(x) Hæc ratiocinatio magis geometricè ad hunc modum concinnari potest. " Propter rectangula

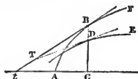
CAPUT VI. 51. EXEMPL. 2. Esto $x=y$ (quæ æquatio est ad Veterum Quadraticem) et per Prob. I. $\dot{x}=\dot{y}$. Adeoque AB : AD :: AD : AT.

52. EXEMPL. 3. Esto $axx=y^3$, et erit $2a\dot{x}x=3\dot{y}y^2$. Fac ergo $3y^2 : 2ax\ (:: \dot{x} : \dot{y}) ::$ AB : AL. Dein AL : AD :: AD : AT.

53. Atque ita Tangentes aliarum Quadraticum, utcunque compositarum, possis expeditè determinare.

MODUS IX.

54. Si denique ABF sit Curva quævis data, quam tangat recta Bt, et rectæ BC, in dato angulo ad basin AC applicatæ, pars BD, inter hanc et aliam curvam DE intercepta, relationem ad curvæ portionem AB in æquatione quâcunque definitam habeat: alterius curvæ tangentem DT duces, capiendo, in hujus tangente, BT in eâ relatione ad BD, quam habet fluxio curvæ AB ad fluxionem rectæ BD.



55. EXEMPL. 1. Dictis AB$=x$, et BD$=y$. Esto $ax=yy$, et per Prob. I. erit $a\dot{x}=2\dot{y}y$. Adeoque $a : 2y\ (:: \dot{y} : \dot{x}) ::$ BD : BT.

56. EXEMPL. 2. Sit $\frac{a}{b}\,x=y$ (æquatio ad Trochoidem si modò ABF sit Circulus) et erit $\frac{a}{b}\,\dot{x}=\dot{y}$. Adeoque $a : b ::$ BD : BT.

57. Et nihilo difficiliùs Tangentes, ubi ipsius BD ad AC vel ad BC relatio in æquatione quâvis exprimitur, vel ubi Curvæ aliis quibuscunque modis ad rectas, aliasve curvas, referuntur, possis ducere.

58. SUNT etiam alia non pauca Problemata, quorum solutiones ex hisce fluent. Cujusmodi sunt,

I. Invenire punctum Curvæ, ubi Tangens est ad basin, vel quamvis positione datam rectam, parallela, vel perpendicularis, vel in alio quovis angulo inclinata.

II. Invenire punctum, ubi Tangens maximè miniméve ad basin, aut

gula AD × DF, AT × DH inter se æqualia, erit AT ad AD ut DF ad DH. Præterea cùm AL sit ad AB ut $\dot{y}$ ad $\dot{x}$, ita enim factum est, cùm sit etiam $\dot{y}$ ad $\dot{x}$ ut DH ad Gf (id enim ostensum § 47.) erit AL ad AB ut DH ad Gf. Sed cùm AT sit ad AD ut DF ad DH, et AL ad AB ut DH ad Gf, ratio rectæ DF ad rectam Gf, quæ componitur e rationibus illius DF ad DH, et DH ad Gf, componetur illa quidem è rationibus rectæ AT ad rectam AD rectæque AL ad AB. Ex eisdem autem componitur ratio rectanguli AT × AL.

aut aliam poſitione datam rectam, inclinatur: hoc eſt invenire confinium flexûs contrarii. Hujus autem ſpecimen in Conchoide jam antè exhibui.

III. A dato quovis, extra Curvæ perimetrum, puncto rectam ducere, quæ cum perimetro aut angulum contactûs, aut rectum angulum, aut alium quemvis datum conficiet: hoc eſt, Tangentes vel Perpendiculares, vel aliter ad Curvam inclinatas rectas à dato quovis puncto ducere.

IV. A dato quovis intra Parabolam puncto rectam ducere, quæ maximum minimumve, quem poteſt, angulum cum perimetro ejus conficiet. Et idem de aliis curvis intellige.

V. Rectam ducere, quæ duas poſitione datas Curvas, vel eandem Curvam (ſi poteſt) in duobus punctis tangat.

VI. Curvam quamvis ſub datis conditionibus ducere, quæ aliam poſitione datam Curvam in dato puncto tanget.

VII. Luce in quamlibet curvam ſuperficiem incidente, cujuſvis radii refractionem determinare.

Horum et ſimilium Problematum confectiones, ubi non obſtat computandi tædium, non ſunt ita difficiles ut iis explicandis immorari opus ſit. Et Geometris, credo, magis gratum erit ſic tantùm recenſuiſſe.

CAPUT SEPTIMUM.

PROB. V.

Curvæ alicujus ad datum punctum Curvaturam invenire.

1. PROBLEMA cum primis elegans videtur, et ad Curvarum ſcientiam utile. In ejus autem conſtructionem generalia quædam præmittere convenit.

I. Ejuſdem Circuli eadem eſtque undique Curvatura, et inæqualium Circulorum Curvaturæ ſunt reciprocè proportionales diametris. Si alicujus diameter diametro alterius duplo minor eſt, ejus peripheriæ Curvatura erit duplo major; ſi diameter triplo minor eſt, Curvatura erit triplo major, &c.

AT × AL ad rectangulum AD × AB. (El. VI. 23.) Rectangulum igitur AT × AL erit ad rectangulum AD × AB ut DF ad Gf, ſive ut AD ad AG vel AB; hoc eſt ut quadratum ex AD, ad rectangulum AD × AB. Rectangulum igitur AT × AL quadrato ex AD æquale eſt. (El. V. 9.) Quare AT : AD = AD : AL. (El. VI. 17.)

II. Si

CAPUT VII. II. Si Circulus curvam aliquam ad partem concavam in dato puncto tangat, sitque talis magnitudinis, ut alius contingens circulus in angulis contactûs proximè punctum istud interscribi nequeat, Circulus ille ejusdem est curvitatis ac Curva in isto puncto contactûs. Nam circulus, qui inter curvam et alium circulum juxta punctum contactûs interjacet, minus deflectit à curvâ, ejusque curvaturam magis appropinquat, quàm ille alius circulus: et proinde curvaturam ejus maximè appropinquat, inter quem et curvam non alius quisquam potest intercedere.

III. Itaque Centrum Curvaminis, ad aliquod curvæ punctum, est centrum tangentis circuli æqualiter incurvati: et sic Radius vel semidiameter Curvaminis est pars perpendiculi ad istud centrum terminata.

IV. Et proportio curvaminis, ad diversa ejus puncta, è proportione curvaminis circulorum æquè curvorum, sive è reciprocâ proportione Radiorum curvaminis innotescit.

2. PROBLEMA itaque ad hunc locum redit, ut Radius vel Centrum Curvaminis inveniatur.

3. Concipe ergo, quòd ad tria curvæ puncta δ, D ac d, ducantur perpendicula; quarum quæ sunt ad, D et δ, conveniant in H; et quæ ad D et d, conveniant in b. Et puncto D existente medio, si major est curvitas à parte Dδ quàm Dd, erit δH minor quàm db. Sed quo perpendicula δH ac db propiora sunt intermedio perpendiculo, eo minùs distabunt puncta H et b, et convenientibus tandem perpendiculis, coalescent. Coalescant autem in puncto C, et erit illud C centrum curvaminis, ad curvæ punctum D, cui perpendicula insistunt. Id quod per se manifestum est.

4. Hujus autem C varia sunt symptomata; quæ ad ejus determinationem inservire possunt. Quemadmodum

I. Quòd sit concursus perpendiculorum hinc et inde à DC infinitè parùm distantium.

II. Quòd perpendiculorum finitè parum distantium intersectiones hinc et inde dirimit, ac disterminat. Ita ut

quæ

quæ ſunt à parte curviori Dδ citeriùs, ad H, conveniant; et quæ ſunt ex alterâ minùs curvâ parte, Dd, remotiùs conveniant, ad b. De Radio Curvaturæ.

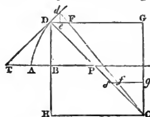
III. Si DC, dum curvæ perpendiculariter inſiſtit, moveri concipiatur, illud ejus punctum C (ſi demas motum accedendi vel recedendi à puncto inſiſtentiæ D) minimè movebitur, ſed centri motionis rationem habebit.

IV. Si centro C, intervallo DC, circulus deſcribatur, non poteſt alius deſcribi circulus qui juxta contactum interjacebit.

V. Denique ſi alterius alicujus tangentis circuli centrum, ut H, vel b, paulatim ad hujus centrum C accedat, donec tandem conveniat, tunc aliquod è punctis, in quibus circulus ille curvam ſecavit, ſimul conveniet punctum contactûs D.

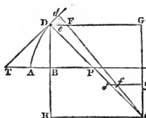
Et unumquodque horum ſymptomatum anſam præbet diverſimodè reſolvendi Problema. Nos autem primum tanquam ſimpliciſſimum eligemus.

5. Ad quodlibet curvæ punctum D, eſto DT tangens, DC perpendiculum, et C centrum curvaminis, ut antè. Sitque AB baſis, ad quam DB in angulo recto applicatur, et cui DC occurrit in P. Age DG parallelam AB, et CG perpendiculum; inque eo cape Cg cujuſlibet datæ magnitudinis; et age $g\delta$ perpendiculum, quod occurrat DC in δ. Eritque Cg : $g\delta$: : (TB : BD : :) fluxio baſis : fluxionem applicatæ. Concipe præterea punctum D per infinitè parvum intervallum Dd in curvâ promoveri. Et actis de ad DG et Cd ad curvam normalibus, quarum Cd occurrit DG in F et δg in f: erit De momentum baſis, de momentum applicatæ, ac δf contemporaneum momentum rectæ $g\delta$. Eſtque $DF = De + \frac{de \times de}{De}$. Habitis itaque horum momentorum, ſive quod perinde eſt fluxionum generantium, rationibus, habebitur ratio CG ad datam gc (quippe quæ eſt DF ad δf) et inde punctum C determinabitur.



6. Sit ergo $AB = x$, $BD = y$, $Cg = 1$. Et $g\delta = z$, et erit $1 : z : : \dot{x} : \dot{y}$ ſeu $z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Hujus autem z momentum δf dic $\dot{z} \times o$, factum nempe

ex



ex velocitate et infinite parvâ quantitate. Eritque momentum $De = \dot{x} \times o$, $de = \dot{y} \times o$ et inde $DF = \dot{x}o + \frac{\dot{y}\dot{y}o}{\dot{x}}$. Est ergo Cg (1) : CG :: (δf : DF) :: $\dot{z}o : \dot{x}o + \frac{\dot{y}\dot{y}o}{\dot{x}}$. Adeoque $CG = \frac{\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y}}{\dot{x}\dot{z}}$.

7. Cùm insuper basis fluxioni $\dot{x}$ (ad quam tanquam uniformem fluxionem cæteras referre convenit) liberum sit quamcunque velocitatem tribuere: dic esse 1. Et erit $\dot{y} = z$, et $CG = \frac{1+zz}{\dot{z}}$. Et inde $DG = \frac{z+z^3}{\dot{z}}$, ac $DC = \frac{\overline{1+zz} \times \sqrt{1+zz}}{\dot{z}}$ (y).

8. Expositâ itaque quâvis æquatione, quâ relatio BD ad AB pro curvâ definiendâ designetur, imprimis quære relationem inter $\dot{x}$ et $\dot{y}$ per Prob. 1. et interea substitue 1 pro $\dot{x}$ et z pro $\dot{y}$. Dein ex æquatione resultante per idem Prob. 1. quære relationem inter $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$, et interea substitue 1 pro $\dot{x}$, et z pro $\dot{y}$ ut antè. Atque ita per priorem operationem obtinebis valorem z, et per posteriorem obtinebis $\dot{z}$: quibus habitis, produc DB ad H versus concavam partem curvæ ut sit $DH = \frac{1+zz}{\dot{z}}$; et age HC parallelam AB et perpendiculo CD occurrentem in C, eritque C centrum curvaturæ ad curvæ punctum D. Vel cùm sit $1 + zz = \frac{PT}{BT}$ (z), fac $DH = \frac{PT}{\dot{z} \times TB}$, vel $DC = \frac{\overline{DP}^3}{\dot{z} \times \overline{DB}^3}$ (aa).

9. Exempl. 1. Sic expositâ $ax + bx^2 - y^2 = 0$ (æquatione ad Hyperbolam cujus latus rectum est a, ac transversum $\frac{a}{b}$): emerget (per Prob. 1) $a + 2bx - 2zy = 0$ (scriptis nempe 1 pro $\dot{x}$ et z pro $\dot{y}$ in æquatione resultante, quæ secus foret $a\dot{x} + 2b\dot{x}x - 2y\dot{y} = 0$). Et hinc denuo prodit $2b - 2zz - 2\dot{z}y = 0$ scriptis iterum 1 pro $\dot{x}$ et z pro

(y) $DC = \sqrt{\overline{CG^2 + DG^2}}$. $CG = \frac{1+zz}{\dot{z}}$. Et $DG = CG \times z = \frac{\overline{1+zz} \times z}{\dot{z}}$.
Quare $CG^2 = \frac{\overline{1+zz}|^2}{\dot{z}\dot{z}}$. Et $DG^2 = \frac{\overline{1+zz}|^2 \times zz}{\dot{z}\dot{z}}$. Ergo $CG^2 + DG^2 = \frac{\overline{1+zz}|^2 \times \overline{1+zz}}{\dot{z}\dot{z}}$.
Ergo $\sqrt{CG^2 + DG^2} = \frac{\overline{1+zz} \times \sqrt{1+zz}}{\dot{z}} = DC$.
(z) $PB : BT = DB^2 : BT^2 = \dot{y}\dot{y} : \dot{x}\dot{x} = zz : 1$.

Ergo

pro $\dot y$. Per priorem est $z=\frac{a+2bx}{2y}$, et per posteriorem $\dot z=\frac{b-zz}{y}$. Dato itaque quovis curvæ puncto D, et per consequentiam x et y, ex his dabuntur z et $\dot z$; quibus cognitis, fac $\frac{1+zz}{\dot z}$ = GC, vel DH, et age HC. De Radio Curvaturæ.

10. Quemadmodum si definitè sit $a=3$, et $b=1$, adeoque $3x+xx=yy$, hyperbolæ conditio: et si assumatur $x=1$, erit $y=2$, $z=\frac{5}{4}$, $\dot z=-\frac{9}{32}$, et DH $=-9\frac{1}{9}$. Invento H erige HC occurrentem perpendiculo DC priùs ducto. Vel quod perinde est, fac DH:HC (::1:z)::1:$\frac{5}{4}$, et age DC curvaminis radium.

11. Siquando computationem non admodum perplexam fore censeas, possis indefinitos valores ipsorum $\dot z$ et z, in $\frac{1+zz}{\dot z}$ valore CG substituere. Et sic in hoc exemplo, per debitam reductionem, obtinebis DH $=y+\frac{4y^3+4by^3}{aa}$, cujus tamen DH valor per calculum negativus prodit, sicut in exemplo numerali videre est. At hoc tantùm arguit DH ad partes versus B capiendam esse. Nam si fuisset affirmativus, ad contrarias partes duxisse oporteret.

12. Corol. Hinc si signum symbolo $+b$ præfixum mutetur; ut fiat $ax-bxx-yy=0$, æquatio ad Ellipsin, erit DH $=y+\frac{4y^3-4by^3}{aa}$. At posito $b=0$, ut æquatio fiat $ax-y^2=0$ ad Parabolam, erit DH $=y+\frac{4y^3}{a}$, indeque DG $=\frac{1}{2}a+2x$.

13. Ex hisce facilè colligitur Radium curvaturæ cujusvis conicæ sectionis valere $\frac{4\overline{DP}^3}{aa}$.

14. Exempl. 2. Si $x^3=ay^2-xy^2$ (æquatio ad Cissoidem Dioclis) exponatur, per Prob. 1. imprimis obtinebitur $3x^2=2azy-2xzy-yy$; ac deinde $6x=2a\dot zy+2azz-2zy-2x\dot zy-2xzz-2zy$: adeoque $z=\frac{3xx+yy}{2ay-2xy}$, et $\dot z=\frac{3x-az^2+2zy+xz^2}{ay-xy}$. Dato itaque quolibet Cissoidis punc-

Ergo PT : BT = 1 + zz : 1. Ergo $\frac{PT}{BT}=1+zz$.

(b) DC $=\frac{1+zz\times\sqrt{1+zz}}{\dot z}=\frac{PT}{BT\times\dot z}\times\frac{\sqrt{PT}}{\sqrt{BT}}=\frac{\sqrt{\overline{PT}^3}}{\dot z\sqrt{\overline{BT}^3}}$. Sed PT : TB = PT² : TD² = PD² : DB².

Ergo $\frac{PT}{TB}=\frac{PD^2}{DB^2}$. Ergo $\frac{PT^3}{BT^3}=\frac{PD^6}{DB^6}$. Et $\sqrt{\frac{PD^3}{BT^3}}=\frac{PD^3}{DB^3}$. Quare DC $=\frac{PD^3}{DB^3\times\dot z}$.

CAPUT VII. to, et inde x et y, dabuntur z & $\dot{z}$. Quibus cognitis fac $\frac{1+zz}{\dot{z}}=CG$.

15. EXEMPL. 3. Si detur $\overline{b+y}\sqrt{cc-yy}=xy$ æquatio ad Conchoidem, ut fuprà; finge $\sqrt{cc-yy}=v$, et emerget $bv+yv=xy$. Jam harum prior (viz. $cc-yy=vv$) per Prob. 1. dat $-2yz=2\dot{v}v$ (fcripto z pro $\dot{y}$) et pofterior dat $b\dot{v}+y\dot{v}+zv=y+zx$. Et ex his æquationibus ritè difpofitis determinantur $\dot{v}$ et z. Ut autem $\dot{z}$ præterea determinetur, è noviffimâ æquatione extermina fluxionem $\dot{v}$, fubftituendo $\frac{-yz}{v}$; et emerget $-\frac{byz}{v}-\frac{yyz}{v}+zv=y+xz$. Æquatio quæ fluentes quantitates fine aliquibus earum fluxionibus, prout exigit refolutio Prob. 1.) complectitur. Hinc itaque per Prob. 1. elicies $-\frac{bz^2}{v}-\frac{by\dot{z}}{v}+\frac{byz\dot{v}}{vv}-\frac{2yzz}{v}-\frac{yy\dot{z}}{v}+\frac{yyz\dot{v}}{vv}+z\dot{v}+\dot{z}v=2z+x\dot{z}$; quâ æquatione in ordinem reductâ et concinnatâ, dabitur $\dot{z}$. Inventis autem z et $\dot{z}$ fac $\frac{1+zz}{\dot{z}}=CG$.

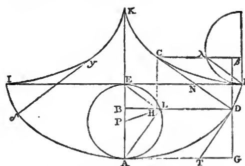
16. Si penultimam æquationem per z divififfes, exinde poftmodum, per Prob. 1. obtinuiffes $-\frac{bz}{v}+\frac{by\dot{v}}{vv}-\frac{2yz}{v}+\frac{yy\dot{v}}{vv}+\dot{v}=2-\frac{y\dot{z}}{zz}$, æquationem priori fimpliciorem pro determinando $\dot{z}$.

17. Dedi quidem hoc exemplum, ut modus operandi in furdis æquationibus conftaret. At Conchoidis curvatura fic breviùs inveniri potuit. Æquationis, $\overline{b+y}\sqrt{cc-yy}=xy$, partibus quadratis et per yy divifis, exurgit $\frac{bbcc}{yy}+\frac{2bcc}{y}+cc-2by-y^2=xx$. $-bb$ Et inde per Prob. 1. exoritur $-\frac{2b^2c^2z}{y^3}-\frac{2bc^2z}{y^2}-2bz-2yz=2x$; five $-\frac{b^2c^2}{y^3}-\frac{bc^2}{y^2}-b-y=\frac{x}{z}$. Et hinc denuo per Prob. 1. exoritur $\frac{3b^2c^2z}{y^4}+\frac{2bc^2z}{y^3}-z=\frac{1}{z}-\frac{x\dot{z}}{zz}$. Per priorem exitum determinatur z et per pofteriorem $\dot{z}$.

18. EXEMPL. 4. Sit ADF Trochois ad circulum ALE, cujus diameter eft AE, accommodata; et ordinatâ BD fecante circulum in L, dic $AE=a$, $AB=x$, $BD=y$, $BL=v$, et arcum $AL=t$, Et imprimis, ducto PL femidiametro, erit fluxio bafis AB ad fluxionem arcûs AL ut BL ad PL, hoc eft, $\dot{x}$ five $1:\dot{t}::v:\frac{1}{2}a$. Atque adeo $\frac{a}{2v}=\dot{t}$.

19. Porro

19. Porro ex naturâ circuli eſt $ax-xx=vv$, et inde per Prob. I. $\dot{a}-2x=2v\dot{v}$ ſive $\frac{a-2x}{2v}=\dot{v}$. DE RADIO CURVATURÆ.



20. Ad hæc ex naturâ Trochoidis eſt LD = arc. AL; adeoque $v+t=y$, et inde per Prob. I. $\dot{v}+\dot{t}=z$.

21. Denique pro fluxionibus $\dot{v}$ & $\dot{t}$, valores hi ſubſtituantur, et emerget $\frac{a-x}{v}=z$. Unde per Prob. I. deducitur $\frac{-a\dot{v}}{vv}+\frac{x\dot{v}}{vv}-\frac{1}{v}=\dot{z}$. Et his inventis, fac $\frac{1+zz}{\dot{z}}$ $=-$DH, et erige HC.

22. COROL. Cæterùm ex his conſectatur,

I. Quòd ſit DH = 2BL, & CH = 2BE, ſive quòd EF in N biſecat CD radium curvaminis. Et hoc patebit ſubſtituendo valores $\dot{z}$ et z jam inventos in æquatione $\frac{1+zz}{\dot{z}}=$ DH, et exitum probè reducendo.

II. Hinc Curva FCK, in quâ centrum curvaminis indefinitè verſatur, eſt alia huic æqualis Trochois, cujus vertices ad I et F adjacent hujus cuſpidibus. Nam circulus Fλ, æqualis ALE et ſimiliter poſitus, deſcribatur, et agatur Cβ parallela EF, circuloque occurrens in λ; et erit arcus Fλ (= arc. EL = NF) = Cλ.

III. CD quæ recta eſt ad trochoidem IAF contingit trochoidem IKF in C.

IV. Hinc, inverſis Trochoidibus, ſi ſuperioris trochoidis cuſpidi, K, pondus ad diſtantiam KA, ſive 2EA, filo appenſum innitatur, et, undulante pondere, filum ſe applicet ad trochoidis partes KF et KI, hinc inde obſiſtentes, ne in rectam diſtendatur, et cogentes, ut ad earum normam, dum digreditur à perpendiculo, paulatim deſuper inflectatur, parte CD ſub infimo contactûs puncto manente rectâ; pondus in inferioris trochoidis perimetro movebitur, utpote cui filum CD ſemper perpendiculare eſt.

 V. Eſt

CAPUT VII. V. Est itaque tota fili longitudo KA æqualis perimetro trochoidis KCF, ejusque pars CD æqualis parti perimetri CF.

VI. Cùm filum circa mobile punctum C, tanquam centrum, undulando convolvitur; superficies, per quam tota CD continuò trajicitur, erit ad superficiem, per quam pars CN supra rectam IF simul trajicitur, ut $\overline{CD}^2$ ad $\overline{CN}^2$, hoc est ut 4 ad 1. Est itaque area CFN quarta pars areæ CFD, et area KCNE quarta pars areæ AKCD.

VII. Quinimo cùm subtensa EL sit æqualis et parallela CN, et circa immobile centrum, E, perinde ac CN circa mobile centrum C circumagitur, æquales erunt superficies per quas simul trajiciuntur; nempe area CFN et circuli segmentum EL, et inde area NFD tripla erit segmenti istius, ac tota EADF tripla semicirculi.

VIII. Denique cùm pondus D attingit punctum F, totum filum circum Trochoidis perimetrum KCF flectetur, radio curvaminis CD manente nullo. Et proinde Trochois IAF ad ejus cuspidem F curvior est quàm quilibet circulus, et cum tangente ξF productâ constituit angulum contactûs infinitè majorem, quàm circulus cum rectâ potest constituere.

23. Sunt etiam anguli contactûs Trochoidalibus infinitè majores. Et illis deinceps alii infinitè majores, et sic in infinitum, et tamen maximi sunt infinitè minores rectilineis. Sic $xx=ay$, $x^3=by^2$, $x^4=cy^3$, $x^5=dy^4$, &c. denotant seriem Curvarum, quarum quælibet posterior cum basi constituit angulum contactûs infinitè majorem, quàm prior cum eâdem basi potest constituere; estque angulus contactûs, quem prima $xx=ay$ constituit, ejusdem generis cum circularibus; et ille, quem secunda $x^3=by^2$ constituit, ejusdem generis cum Trochoidalibus. Et quamvis subsequentium anguli angulos præcedentium perpetim infinitè superant, tamen anguli rectilinei magnitudinem nunquam possunt assequi.

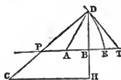
24. Ad eundem modum $x=y$, $x^2=ay$, $x^3=b^2y$, $x^4=c^3y$, &c. denotant seriem linearum, quarum subsequentium anguli ad vertices, cum basibus confecti, sunt angulis præcedentium perpetim infinitè minores. Quinetiam inter angulos contactûs duorum quorumlibet ex his generibus, possunt alia angulorum, se infinitè superantium, intercedentia genera in infinitum excogitari.

25. Angulorum verò contactûs unum genus esse infinitè majus

jus alio constat, cùm unius generis Curva, utcunque magna, inter rectam tangentem et alterius generis Curvam, quantumvis parvam, juxta punctum contactûs non potest interjacere: sive cujus angulus contactûs necessariò continet alterius angulum contactûs, ut partem totius. Sic curvæ $x^4 = cy^3$ angulus contactûs, quem cum basi constituit, necessariò continet angulum contactûs curvæ $x^3 = by^2$. Qui verò se mutuò superare possunt anguli sunt ejusdem generis, uti de præfatis angulis Trochoidis et hujus Curvæ, $x^3 = by^2$, contigit. De Angulo Contactûs.

26. Ex his patet Curvas in quibusdam punctis posse infinitè rectiores esse, vel infinitè curviores, quolibet circulo; et tamen formam curvarum non ideo amittere. Sed hæc in transitu (bb).

27. Exempl. 5. Esto ED Quadratrix ad circulum centro A descriptum pertinens, ac DB ad AE normaliter demissâ, dic $AB = x$, $BD = y$, & $AE = 1$. Eritque $\dot{y}x - \dot{y}y^2 - \dot{y}x^2 = \dot{x}y$, ut suprà Cap. VI. § 19: quæ æquatio, scriptis 1 pro $\dot{x}$, et z pro $\dot{y}$, fit $zx - zy^2 - zx^2 = y$; et inde per Prob. 1. elicitur $\dot{z}x - \dot{z}y^2 - \dot{z}x^2 + z\dot{x} - 2z\dot{x}x - 2z\dot{y}y = \dot{y}$. Factâque reductione, et scriptis iterum 1 pro $\dot{x}$, et z pro $\dot{y}$, exit $\dot{z} = \frac{2z^2y + 2zx}{x - x^2 - y}$. Inventis autem z et $\dot{z}$, fac $\frac{1+zz}{\dot{z}} = DH$; et age HC ut suprà.



28. Si constructionem concinnare placet, perbrevem invenies: nempe ad DT duc normalem DP occurrentem AT in P, et fac esse $2AP : AE :: PT : CH$.

29. Scilicet est $z = \frac{y}{x - x^2 - y^2} = \frac{BD}{-BT}$; et $zy = \frac{\overline{BD}^2}{-BT} = -BP$; et $zy + x = -AP$; et $\frac{2z}{x - x^2 - y^2}$ in $zy + x = \frac{2BD}{AE \times \overline{BT}^2}$ in $-AP = \dot{z}$. Præterea est $1 + zz = \frac{PT}{BT}$, (utpote $= 1 + \frac{\overline{BD}^2}{\overline{BT}^2} = \frac{\overline{DT}^2}{\overline{BT}^2}$,) adeoque $\frac{1+zz}{\dot{z}} = \frac{PT \times AE \times BT}{-2BD \times AP} = DH$. Denique est $BT : BD :: DH : CH = \frac{PT \times AE}{-2AP}$. Ubi valor negativus tantùm arguit CH capiendam esse ad partes DH versus AB.

30. Eâdem methodo Spiralium, et aliarum quarumvis curvarum Curvatura calculo brevissimo determinari potest.

31. Ad Curvaturam præterea, cùm Curvæ aliis modis ad rectas referuntur, sine præviâ reductione determinandam, jam potuit

(bb) Idem argumentum auctor tractavit Princip. Lib. 1. Sect. 1. Schol.

 hæc

CAPUT VII. hæc methodus applicari, perinde ut in determinando tangentes factum eſt. Sed cùm omnes Geometricæ Curvæ, ut et Mechanicæ (præſertim ubi definientes conditiones ad infinitas æquationes uti pòſt oſtendam reducantur) ad rectangulas ordinatas referri poſſint, videor ſatis præſtitiſſe. Qui plura deſiderat, haud difficulter proprio marte ſupplebit. Præſertim ſi in ejus rei illuſtrationem, ex abundanti, methodum pro Spiralibus adjecero.

32. Eſto BK circulus, A centrum ejus, B punctum in circumferentiâ datum, AD*d* Spiralis, DC perpendiculum ejus, et C centrum Curvitatis ad punctum D. Ductâque ADK rectâ, et ei parallelâ et æquali CG, ut et normali GF occurrente CD in F: dic AB vel $AK = 1 = CG$, $BK = x$, $AD = y$, et $GF = z$. Præterea concipe punctum D per infinitè parvum ſpatium D*d* in ſpirali moveri, et perinde per *d* agi ſemidiametrum AK, eique parallelam et æqualem C*g*, et normalem *gf* occurrentem C*d* in *f*. Cui etiam GF occurrit in P: produc GF ad ϕ ut ſit $G\phi = gf$, et ad AK demitte normalem *de*, et produc, donec cum CD conveniat ad I: et ipſarum BK, AD ac $G\phi$ contemporanea momenta erunt K*k*, D*e* et $F\phi$; quæ proinde dicentur $\dot{x} \times o$, $\dot{y} \times o$, et $\dot{z} \times o$.

33. Jam eſt $AK : Ae\,(AD) :: kK : de = oy$, ubi aſſumo $\dot{x} = 1$ ut ſuprà. Item $CG : GF :: de : eD = yoz$, adeoque $yz = \dot{y}$. Præterea, $CG : CF :: de : dD\,(= oy \times CF) :: dD : dI = oy \times \overline{CF}^2$. Ad hæc propter ang. $PC\phi$ $(= \angle GCg) = \angle DAd$, et $\angle CP\phi$ $(= \angle CdI = \angle edD + \text{rect.}) = \angle ADd$, triangula $CP\phi$ et AD*d* ſunt ſimilia: et inde $AD : Dd :: CP\,(CF) : P\phi = o \times \overline{CF}^2$, unde aufer $F\phi$ et reſtabit $PF = o \times \overline{CF}^2 - o \times \dot{z}$. Denique demiſſâ CH normali ad AD, eſt $PF : dI :: CG : eH$ vel $DH = \frac{y \times \overline{CF}^2}{\overline{CF}^2 - \dot{z}}$; vel ſubſtituto $1 + zz$ pro $\overline{CF}^2$, erit $HD = \frac{y + yzz}{1 + zz - \dot{z}}$.

34. Et

(w) NIMIRUM erit $DA : DH = 1 + zz - \dot{z} : 1 + zz$ (per § 33.) Verùm ex eo quòd ſit $\dot{y}z + y\dot{z} = 0$ (§ 36) veniet $\dot{z} = \frac{-\dot{y}z}{y} = -z^2$. Unde $1 + zz - \dot{z} = 1 + 2z^2$, et $DA : DH = 1 + 2z^2 : 1 + z^2$. Rurſum

34. Et nota, quòd in hujuſmodi computationibus quantitates (ut AD et A*e*) pro æqualibus habeo, quarum ratio à ratione æqualitatis non niſi infinitè parum differt. *De Radio Curvaturæ.*

35. Ex his autem prodit hujuſmodi Regula. Relatione inter x et y per quamlibet æquationem definitâ, quære relationem fluxionum $\dot{x}$ et $\dot{y}$, per Prob. 1. et ſubſtitue 1 pro $\dot{x}$ et yz pro $\dot{y}$. Deinde ex æquatione prodeunte quære denuò per Prob. 1. relationem inter $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$, et iterum ſubſtitue 1 pro $\dot{x}$. Prior exitus, per debitam reductionem, dabit $\dot{y}$ et z, et poſterior dabit $\dot{z}$: quibus cognitis fac $\frac{y+yzz}{1+zz-\dot{z}}=$ DH, et erige normalem HC ſpiralis perpendiculo DC, priùs ducto, occurrentem in C; et erit C centrum curvaminis. Vel quod eodem recidit, cape CH : HD :: z : 1, et age CD.

36. Exempl. 1. Si detur $ax=y$, æquatio ad Spiralem Archimedeam: erit per Prob. 1. $a\dot{x}=\dot{y}$ ſive (ſcripto 1 pro $\dot{x}$ et yz pro $\dot{y}$) $a=yz$. Et hinc denuò per Prob. 1. erit $0=\dot{y}z+y\dot{z}$. Quare ex dato quolibet ſpiralis puncto D, et inde longitudine AD ſive y, dabuntur $z\ (=\frac{a}{y})$ et $\dot{z}\ (=\frac{-a\dot{y}}{y^2}$ ſive $=\frac{-az}{y})$: quibus cognitis fac $1+zz-\dot{z} : 1+zz ::$ DA (y) : DH. Et $1 : z ::$ DH : CH.

37. Et hinc facilè deducitur hujuſmodi constructio. Produc AB ad Q, ut ſit AB : arc. BK :: arc. BK : BQ. Et fac AB + AQ : AQ :: AD : DH [cc].

38. Exempl. 2. Si $ax^2=y^3$ definit relationem inter BK et AD: obtinebis (per Prob. 1.) $2a\dot{x}x=3\dot{y}y^2$, ſive $2ax=3zy^3$. Et inde rurſus $2a\dot{x}=3\dot{z}y^3+9z\dot{y}y^2$. Eſt itaque $z=\frac{2ax}{3y^3}$, et $\dot{z}=\frac{2a-9zzy^3}{3y^3}$. Quibus cognitis fac $1+zz-\dot{z} : 1+zz ::$ DA : DH. Vel opere concinnato, fac $9xx+10 : 9xx+4 ::$ AD : DH.

39. Exempl. 3. Ad eundem modum, ſi $ax^2-bxy=y^3$, determinat relationem BK ad AD, orietur $\frac{2ax-by}{bxy+3y^3}=z$, et $\frac{2a-2bzy-bz^2xy-9z^2y^3}{bxy+3y^3}=\dot{z}$. Ex quibus DH, et inde punctum C determinatur ut antè.

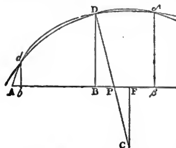
40. Et ſic aliarum quarumvis ſpiralium Curvaturam nullo negotio determinabis. Imo et ad horum exemplar Regulas pro quibuſlibet Curvarum generibus excogitare poſſis.

ſum eo quòd ſit $z=\frac{a}{y}$, et $y=ax$ (§ 36.) veniet $z=\frac{1}{x}$, et $z^2=\frac{1}{x^2}$. Unde DA : DH $=1+\frac{2}{x^2} : 1+\frac{1}{x^2}=x^2+2 : x^2+1$. Scripto igitur QB × BA pro x^2, et AB² pro 1, et 2AB² pro 2, efficietur DA : DH = AQ × AB + AB² : AQ × AB = AQ + AB : AQ. Q. E. D.

41. Ab-

Caput VII. 41. Absolvi tandem Problema; sed cùm methodum adhibuerim à vulgaribus operandi modis satis diversam, et ipsum problema non sit ex eorum numero, quorum contemplatio apud Geometras increbuit: in allatæ solutionis illustrationem et confirmationem non gravabor aliam solutionem attingere, magis obviam et usitatis in ducendo tangentes methodis affinem. Utpote si centro et intervallo quovis Circulus describi concipiatur, qui Curvam quamlibet in pluribus punctis secet, et circulus ille contrahatur vel dilatetur, donec duo intersectionum puncta conveniant, is Curvam ibidem tanget. Et præterea si centrum ejus accedere vel recedere à puncto contactûs singatur, donec tertium intersectionis punctum cum prioribus in puncto contactûs conveniat, is æquè curvus ac Curva in illo puncto contactûs evadet. Quemadmodum in ultimo quinque symptomatum centri curvaminis suprà monui, è quorum singulis dixi Problema diversimodè confici potuisse.

42. Centro itaque C et radio CD describatur circulus secans Curvam in punctis d, D ac δ. Et demissis, db, DB, $\delta\beta$ et CF ad basin AB normalibus: dic $AB=x$, $BD=y$, $AF=v$, $FC=t$ ac $DC=s$; et erit $BF=v-x$, ac $DB+FC=y+t$; quorum quadratorum aggregatum æquatur quadrato DC. Hoc est, $t^2+v^2-2vx+x^2+y^2+2ty=s^2$. Quam si placet, abbreviare possis, fingendo $v^2+t^2-ss=$ symbolo cuivis q^2, et evadet $x^2-2vx+y^2+2ty+q^2=0$. Postquam verò t, v, et q^2 inveneris, si s desideres, fac $=\sqrt{v^2+t^2-q^2}$.



43. Proponatur jam quælibet æquatio pro Curvâ definiendâ, cujus flexuræ quantitatem invenire oportet; et ejus ope alterutram quantitatem x vel y, extermina, et emerget æquatio cujus radices (db, DB, $\delta\beta$, &c. si extermines x, vel Ab, AB, $A\beta$, &c. si extermines y) sunt ad intersectionum puncta (d, D, δ, &c.) Et proinde cùm ex istis tres evadent æquales, circulus et Curvam continget, et erit ejusdem curvitatis ac Curva in puncto contactûs. Æquales

4

les autem evadent, conferendo æquationem cum aliâ totidem di- menſionum æquatione fictitiâ, cujus tres ſunt æquales radices, ut docuit Carteſius: vel expeditiùs multiplicando terminos ejus bis per arithmeticam progreſſionem.

44. Exempl. Sit $ax=y^2$, æquatio ad Parabolam; et exterminato x (ſubſtituendo nempe in æquatione ſuperiori valorem ejus $\frac{yy}{a}$) prodibit

$$\frac{y^4}{a^2}-\frac{2v}{a}y^2+2ty+q^2=0;$$
$$+\ y^2$$

cujus è radicibus y tres debent fieri æquales.

Et in hunc finem terminos per arithmeticam Progreſſionem bis multiplico, ut hîc videre eſt. 4. 2. 1. 0 / 3. 1. 0.−1

Et erit $\frac{12y^4}{aa}-\frac{4v}{a}y^2+2y^2=0$

Sive $v=\frac{y^2}{a}+\frac{1}{2}a$. Unde facilè colligitur eſſe BF$=2x+\frac{1}{2}a$ ut ſuprà.

45. Quamobrem dato quovis Parabolæ puncto D, duc perpendiculum DP, et in axe cape PF$=$2AB, et erige normalem FC occurrentem DP in C, et erit C deſideratum centrum Curvitatis.

46. Idem in Ellipſi et Hyperbolâ præſtare poſſis, ſed calculo ſatis moleſto, et in aliis Curvis ut plurimùm faſtidioſiſſimo.

CAPUT VIII.

De Quæſtionibus quibuſdam Cognatis.

1. Ex hujus Problematis reſolutione confectantur aliorum nonnullorum confectiones. Cujus modi ſunt.

I. Invenire punctum ubi linea datam habet curvaturam.

2. Sic in Parabolâ $ax=yy$, ſi punctum quæratur ad quod radius curvaturæ ſit datæ longitudinis f, è centro curvaturæ, ut priùs, invento, radium determinabis eſſe $\frac{a+4x}{2a}\sqrt{aa+4ax}$, quem pone æqualem f. Et factâ reductione emerget $x=-\frac{1}{4}a+\sqrt[3]{\frac{1}{16}aaf}$.

II. Invenire punctum Rectitudinis.

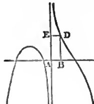
3. Punctum Rectitudinis voco, ad quod radius flexionis infinitus evadit, ſive centrum infinitè diſtans: quale eſt ad verticem Parabolæ $ax^3=y^4$. Et hoc idem plerumque limes eſt flexionis contrariæ, cujus determinationem ſuprà poſui. Sed et alia haud inelegans ex hoc Problemate ſcaturit. Nempe quo longior eſt

radius

CAPUT VIII. radius flexionis, eo minor evadit angulus Dcd (fig. p. 445.) et pariter momentum cf, adeoque fluxio quantitatis z unà diminuuntur, ita ut per ejus radii infinitatem prorſus evaneſcant. Quære ergo fluxionem $\dot{z}$ et ſuppone nullam eſſe.

4. Quemadmodum ſi limitem flexûs contrarii in Parabola ſecundi generis, cujus ope Carteſius conſtruxit æquationes ſex dimenſionum, determinare oportet. Ad illam curvam æquatio eſt $x^3-bx^2-cdx+bcd+dxy=0$. Et hinc per Prob. I. exit $3\dot{x}x^2-2b\dot{x}x-cd\dot{x}+d\dot{x}y+dx\dot{y}=0$. Quæ, ſcripto I pro $\dot{x}$ et z pro $\dot{y}$, fit $3x^2-2bx-cd+dy+dxz=0$: unde rurſus per Prob. I. exit $6\dot{x}x-2b\dot{x}+d\dot{y}+d\dot{x}z+dx\dot{z}=0$. Et hæc, ſcripto iterum I pro $\dot{x}$, z pro $\dot{y}$, et 0, pro $\dot{z}$, fit $6x-2b+2dz=0$. Jam extermina z, ſcribendo pro dz valorem $2b-3x$ in æquatione $3x^2-2bx-cd+dy+dxz=0$, et proveniet $-cd+dy=0$, ſive $y=c$.

5. Quamobrem ad punctum A erige perpendiculum AE$=c$. Et per E duc ED parallelam AB, et punctum D, ubi Parabolæ partem convexo-concavam ſecuerit, erit in confinio flexionis contrariæ.



6. Similique methodo alia Rectitudinis puncta, quæ non interjacent partibus contrariè flexis, determinari poſſint. Veluti ſi $x^4-4ax^3+6a^2x^2-b^3y=0$ Curvam definiat, exinde per Prob. I. imprimis producetur $4x^3-12ax^2+12a^2x-b^3z=0$. Et hinc denuò $12x^2-24ax+12a^2-b^3\dot{z}=0$. Ubi ſuppone $\dot{z}=0$, et, factâ reductione, prodibit $x=a$. Quamobrem ſume AB$=a$ et BD, normaliter erecta, curvæ in deſiderato Rectitudinis puncto occurret.

III. Invenire punctum Flexûs Infiniti.

7. Quære radium curvaminis et ſuppone nullum eſſe. Sic ad Parabolam ſecundi generis, æquatione $x^3=ay^2$ definitam, erit radius ille CD $=\frac{4a+9x}{6a}\sqrt{4ax+9x^2}$; qui nullus evadit, cùm ſit $x=0$.

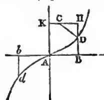
IV. Flexûs Maximi Minimive punctum determinare.

8. Ad hujuſmodi puncta radius curvaturæ aut maximus aut minimus evadit. Quare centrum Curvaturæ, ad id temporis momentum, nec verſus punctum contactûs neque ad contrarias partes movetur, ſed penitus quieſcit. Quæratur itaque fluxio radii

CD:

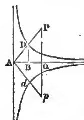
CD: vel expeditiùs quæratur fluxio alterutrius rectæ BH vel AK et supponantur nulla. PROBLEMATA DE CURVATURA.

9. Quemadmodum si de Parabolâ secundi generis, $x^3=a^2y$, quæstio proponatur: imprimis ad Curvaturæ centrum determinandum invenies $DH=\frac{a^2+9xy}{6x}$, adeoque est $BH=\frac{a^2+15xy}{6x}$. Dic autem $BH=v$, et erit $\frac{a^2}{6x}+\frac{5}{2}y=v$; unde juxta Prob. I. educitur $-\frac{a^2\dot{x}}{6x^2}+\frac{5}{2}\dot{y}=\dot{v}$. Jam verò $\dot{v}$, ipsius BH fluxionem, suppone nullam esse: et insuper cùm



ex hypothesi sit $x^3=a^2y$, et inde per Prob. I. $3\dot{x}x^2=a^2\dot{y}$, posito $\dot{x}=1$, substitue $\frac{3x^2}{a^2}$ pro $\dot{y}$, et emerget $45x^4=a^4$. Cape ergo $AB=\sqrt[4]{\frac{a^4}{45}}$, et BD normaliter erecta occurret Curvæ in puncto Maximæ Curvaturæ. Vel quod perinde est fac $AB:BD::3\sqrt{5}:1$.

10. Ad eundem modum Hyperbola secundi generis, per æquationem $xy^2=a^3$ designata, maximè flectitur in punctis D, d, quæ determinabis sumendo $AQ=1$ in basi, et erigendo $QP=\sqrt{5}$, eique æqualem Qp ex alterâ parte, et agendo AP et Ap quæ Curvæ occurrent in desideratis punctis D ac d.



V. Locum centri Curvaminis determinare, sive Curvam describere in quâ centrum istud perpetuò versatur.

11. Trochoidis centrum Curvaminis in aliâ Trochoide versari ostensum est.

12. Et sic Parabolæ centrum istud in aliâ secundi generis, quam æquatio $axx=y^3$ definit, Parabolâ versatur, ut inito calculo facilè constabit.

VI. Luce in quamlibet Curvam incidente, invenire Focum, sive concursum radiorum, circa quodpiam ejus punctum refractorum.

13. Curvaturam ad istud Curvæ punctum quære, et centro radioque curvaturæ Circulum describe; dein quære concursum radiorum à circulo circa istud punctum refractorum. Nam idem erit concursus refractorum à propositâ Curvâ.

 VII. His

CAPUT VIII. VII. His addi poteſt particularis inventio Curvaturæ ad vertices Curvarum ubi normaliter ſecant baſes. Nempe punctum in quo curvæ perpendiculum cum baſi conveniens, ipſam ultimò ſecuerit, eſt centrum Curvaturæ ejus.

14. Quamobrem habitâ relatione inter baſin x et rectangulam applicatam y, et inde (per Prob. I.) relatione inter fluxiones $\dot{x}$ et $\dot{y}$, valor $\dot{y}y$, ſi in eo ſcribas I pro $\dot{x}$, et fingas $y=0$, erit radius curvaturæ.

15. Sic in Ellipſi $ax-\frac{a}{b}xx=yy$, eſt $\frac{a\dot{x}}{2}-\frac{a\dot{x}x}{b}=\dot{y}y$; qui valor $\dot{y}y$, ſi ſupponas $y=0$, et conſequenter $x=0$, et ſcribas I pro $\dot{x}$, evadet $\frac{1}{2}a$ radius curvaturæ. Et ſic ad vertices Hyperbolæ et Parabolæ radius curvaturæ erit etiam dimidium lateris recti.

16. Atque ita ad Conchoiden, æquatione $\frac{b^2c^2}{xx}+\frac{2bcc}{x}+cc-2bx-bb-xx=yy$ definitam, valor $\dot{y}y$ ope Prob. I. invenietur $-\frac{b^2c^2}{x^3}-\frac{bc^2}{x^2}-b-x$. Qui, ſupponendo $y=0$, et inde $x=c$, vel $-c$, evadet $-\frac{bb}{c}-2b-c$, vel $\frac{bb}{c}-2b+c$, radius curvaturæ. Fac ergo AE : EG :: EG : EC (vid. fig. p. 432) et A*e* : *e*G :: *e*G : *cc*, et habes curvaturæ centra, C et *c*, ad vertices conjugatarum Conchoidum, E et *e*.

PROB. VI.

Curvaturæ ad datum Curvæ alicujus punctum Qualitatem determinare.

17. Per *Qualitatem* curvaturæ intelligo formam ejus, quatenus eſt plus vel minùs inæquabilis; ſive quatenus plus vel minùs variatur in proceſſu per diverſas partes curvæ.

18. Sic interroganti qualis ſit Circuli curvatura, reſponderi poteſt, quòd ſit uniformis ſive invariata; et interroganti qualis ſit curvatura Spiralis, [dd] quæ deſcribitur per motum puncti D, cum acceleratâ celeritate, AD, in rectâ AK, uniformiter circa centrum A gyrante, progredientis ab A, adeo ut recta AD ad arcum BK, dato puncto, K, deſcriptum, rationem habeat numeri ad logarithmum ejus, reſponderi poteſt, quòd ſit uniformiter varia-

[dd] Vide fig. p. 4,0.

ta;

ta; five quòd fit æquabiliter inæquabilis. Et fic aliæ Curvæ, in fingulis earum punctis, *aliquales* pro Curvaturæ variatione denominari poffunt. De Qualitate Curvaturæ.

19. Quæritur itaque Curvaturæ, circa aliquod Curvæ punctum, inæquabilitas five variatio. Quâ de causâ animadvertendum eft, I. Quòd ad puncta in fimilibus curvis fimiliter pofita fimilis eft inæquabilitas, five variatio curvaturæ. II. Et quòd momenta radiorum curvaturæ ad illa puncta funt proportionalia contemporaneis momentis curvarum, et fluxiones fluxionibus. III. Atque adeo quòd ubi fluxiones illæ non funt proportionales, diffimilis erit inæquabilitas curvaturæ. Utpote major erit inæquabilitas, ubi major eft ratio fluxionis radii curvaturæ ad fluxionem curvæ. Adeoque fluxionum ratio illa non immeritò dici poteft *Index inæquabilitatis five variationis curvaturæ*.

20. Ad Curvæ alicujus, AD, puncta D ac d infinitè parùm diftantia, funto radii curvaturæ DC, ac, dc; et exiftente Dd momento curvæ erit Cc contemporaneum momentum radii curvaturæ, et $\frac{Cc}{Dd}$ Index inæquabilitatis curvaturæ: nempe tanta dicetur inæquabilitas illa, quantam effe indicat rationis illius $\frac{Cc}{Dd}$ quantitas; five curvatura dicetur tanto diffimilior curvaturæ circuli.

21. Demiffis jam ad quamlibet, AB, occurrentem DC in P, rectangulis applicatis DB ac db, dic $AB=x$; $BD=y$; $DP=t$; $DC=v$; et inde $Bb=\dot{x}\times o$. Eritque $Cc=\dot{v}\times o$. Et $BD:DP=Bb:Dd=\frac{t\dot{x}o}{y}$, ac $\frac{Cc}{Dd}=\frac{\dot{v}y}{t\dot{x}}$, five $=\frac{\dot{v}y}{t}$ fuppofito $\dot{x}=1$. Quamobrem relatione inter x et y per quamlibet æquationem definitâ, et inde, juxta Prob. IV. et V. invento perpendiculo DP five t, et radio curvaturæ v, ejufque radii fluxione $\dot{v}$ per Prob. I. dabitur Index inæquabilitatis curvaturæ $\frac{\dot{v}y}{t}$.

22. EXEMPL. I. Sit $2ax=yy$ æquatio ad Parabolam. Et per Prob. IV. erit $BP=a$, adeoque $DP=\sqrt{aa+yy}=t$. Item per Prob. V. (cc) $HC=a+2x$. Et $PB:DP=HC:DC=\frac{at+2xt}{a}=v$. Jam æ-

(cc) Cap. VII. § 12.

CAPUT VIII. quationes $2ax=yy$, et $aa+yy=tt$, et $\frac{at+2xt}{a}=v$, per Prob. I. dant $2a\dot{x}=2\dot{y}y=2\dot{t}t$: et $\frac{a\dot{t}+2\dot{t}x+2t\dot{x}}{a}=\dot{v}$. Quibus ordinatis, et posito $\dot{x}=1$, oriuntur $\dot{y}=\frac{a}{y}$; $\dot{t}=\frac{y\dot{y}}{t}=\frac{a}{t}$. Et $\dot{v}=\frac{a\dot{t}+2\dot{t}x+2t}{a}$. Et sic inventis $\dot{y}$, $\dot{t}$, et $\dot{v}$, habebitur $\frac{\dot{v}y}{t}$ Index inæquabilitatis curvaturæ.

23. Quemadmodum si in numeris definiatur $a=1$, sive $2x=yy$, et $x=\frac{1}{2}$, erit $y=\sqrt{2x}=1$; $\dot{y}=\frac{a}{y}=1$; $t=\sqrt{aa+yy}=\sqrt{2}$; $\dot{t}=\frac{a}{t}\sqrt{\frac{1}{2}}$; et $\dot{v}=\frac{a\dot{t}+2x\dot{t}+2t}{a}=3\sqrt{2}$ (ff). Adeoque $\frac{\dot{v}y}{t}=3$ indici inæquabilitis.

24. Sin autem definiatur $x=2$, erit $y=2$; $\dot{y}=\frac{1}{2}$; $t=\sqrt{5}$; $\dot{t}=\sqrt{\frac{1}{5}}$; et $\dot{v}=3\sqrt{5}$. Adeoque $\frac{\dot{v}y}{t}=6$ Index inæquabilitatis. Quamobrem inæquabilitas curvaturæ, ad punctum à quo ad axem demissa ordinatim applicata æquatur lateri recto Parabolæ, dupla est ejus ad punctum, à quo demissa ordinatim applicata æquatur dimidio ejusdem lateris recti: hoc est, curvatura in priori casu duplo dissimilior est curvaturæ Circuli, quàm in posteriori.

25. EXEMPL. 2. Sit $2ax-bxx=yy$, et, per Prob. IV. erit $a-bx=$ BP, et inde $aa-2abx+bbxx+yy=tt$: sive $aa-byy+yy=tt$. Item, per Prob. V. erit DH$=y+\frac{y^3-by^3}{aa}$ (gg). Ubi si pro $yy-byy$ substituas $tt-aa$, evadet DH$=\frac{tty}{aa}$. Et est BD : DP = DH : DC $=\frac{t^3}{aa}=v$. Jam, per Prob. I. æquationes $2ax-bxx=yy$; et $aa-byy+yy=tt$; et $\frac{t^3}{aa}=v$; dant $a-bx=y\dot{y}$ (hh); et $y\dot{y}-by\dot{y}=t\dot{t}$; et $\frac{3t^2\dot{t}}{aa}=\dot{v}$. Et sic invento $\dot{v}$ dabitur $\frac{\dot{v}y}{t}$ Index inæquabilitatis curvaturæ.

26. Sic ad Ellipsin $2x-3xx=yy$, ubi est $a=1$, et $b=3$, si supponatur $x=\frac{1}{3}$, erit $y=\frac{1}{3}$; $\dot{y}=-1$; $t=\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\dot{t}=\sqrt{2}$; $\dot{v}=3\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $\frac{\dot{v}y}{t}=\frac{3}{2}$ Indici inæquabilitatis curvaturæ. Unde patet curvaturam hujus Ellipsis, ad hîc definitum punctum D, esse duplò minùs inæ-

(ff) Nimirum $\frac{a\dot{t}+2x\dot{t}+2t}{a}=t+\dot{t}+2t=2\times\overline{\dot{t}+t}=2\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}=2\,\frac{\sqrt{1}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}}=2\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\times 3$.

quabilem

quabilem (five duplo fimiliorem curvaturæ Circuli) quàm curvatura Parabolæ, ad illud ejus punctum, à quo ad axem demiffa ordinatim applicata æquatur dimidio ejus lateris recti.

De Qualitate Curvaturæ.

27. Si conclufiones in his exemplis concinnare patet, ad Parabolam $2ax=yy$, exibit $\frac{\dot{r}y}{t}=\frac{3y}{a}$ Index inæquabilitatis. Et ad Ellipfin, $2ax-bxx=yy$, exibit Index $\frac{\dot{r}y}{t}=\frac{3y-3by}{aa}\times$ BP. Et fic ad Hyperbolam $2ax+bxx=yy$, obfervatâ analogiâ, erit index $\frac{\dot{r}y}{t}=\frac{3y+3by}{aa}\times$ BP. Unde patet, quòd ad diverfa puncta cujufvis conicæ fectionis, feorfim fpectatæ, curvaminis inæquabilitas eft ut rectangulum BD $\times$ BP. Et quòd ad diverfa puncta Parabolæ eft ut ordinatim applicata BD.

28. Cæterùm cùm Parabola fit fimpliciffima linearum inæquabili curvaturâ flexarum, ejufque curvaturæ inæquabilitas tam levi negotio determinatur, utpote cujus index fit $\frac{6\times\text{ordin. applicat.}}{\text{lat. rect.}}$; aliarum Curvarum curvaturæ ad curvaturam hujus non incommodè referri poffunt. Quemadmodum fi quæratur qualis fit Ellipfeos $2x-3xx=yy$ curvatura, ad illud ejus punctum, quod definitur affumendo $x=\frac{1}{3}$: quoniam index ejus (ut fuprà) fit $\frac{3}{2}$, refponderi poteft, effe fimilem curvaturæ Parabolæ $6x=yy$, ad illud ejus punctum, inter quod et axem recta $=\frac{3}{2}$ ordinatim applicatur.

29. Sic cùm lineæ Spiralis ADE jam ante defcriptæ (ii) fluxio fit ad fluxionem fubtenfæ AD in datâ quâdam ratione, puta d ad e: verfus partes concavas ejus erige ad AD normalem AP $=\frac{e}{\sqrt{dd-ee}}\times$ AD, et erit P centrum curvaturæ, et $\frac{AP}{AD}$, five $\frac{\sqrt{dd-ee}}{e}$, Index inæquabilitatis ejus. Quare Spiralis hæcce curvaturam habet ubique fimiliter inæquabilem, ac Parabola $6x=yy$ habet in illo ejus puncto, à quo demittitur ad axem ordinatim applicata $=\frac{\sqrt{dd-ee}}{e}$.

30. Et fic Index inæquabilitatis ad quodvis Trochoidis punctum D (kk) invenietur effe $\frac{AB}{BL}$. Quare curvatura ejus ad idem D tam inæquabilis eft, five tam diffimilis curvaturæ Circuli, quàm

(gg) Cap. VII. § 12.
(hh) Nimirum pofito $\dot{x}=1$.
(ii) Vide fig. p. 440.
(kk) Vide fig. p. 449.

curvatura

 curvatura Parabolæ cujusvis $ax=yy$, ad illud ejus punctum ubi ordinatim applicata æquatur $\frac{1}{6}a \times \frac{AB}{BL}$.

31. Ex his credo sensus Problematis satis elucescet; quo benè perspecto, non difficile erit animadvertenti seriem rerum suprà traditarum plura exempla de proprio suppeditare, et hujusmodi complures alias operandi methodos, prout res exiget, concinnare. Quinetiam cognata Problemata ubi, perplexà computatione non conteritur et fatigatur, haud majori difficultate transfiget: Cujusmodi sunt,

I. Invenire punctum Curvæ alicujus, ubi vel Nullam, vel Infinitam, vel Maximam, vel Minimam, vel datam quamvis habeat Inæquabilitatem curvaturæ. Sic ad vertices conicarum sectionum nulla est inæquabilitas curvaturæ; ad cuspidem Trochoidis infinita est; et ad puncta Ellipseos maxima est, ubi rectangulum BD × BP sit maximum; hoc est, ubi lineæ diagonales rectanguli parallelogrammi circumscripti Ellipsin secant, cujus latera tangunt illam in principalibus verticibus [h].

II. Curvam alicujus definitæ speciei, puta conicam sectionem, determinare, cujus Curvatura, ad aliquod punctum, et æqualis sit et similis curvaturæ alterius alicujus Curvæ ad datum punctum ejus.

III. Conicam sectionem determinare, ad cujus punctum aliquod Curvatura et lineæ tangentis, respectu axis, positio sit similis Curvaturæ ac Tangentis positioni alterius alicujus Curvæ, ad assignatum punctum ejus. Et hujus Problematis usus est, ut vice Ellipsium secundi generis, quarum refringendi proprietates Cartesius

[h] Ellipsis ADL, cujus axes, transversus quidem AK, secundus HL, rectangulo MNOR circumscribatur, cujus utique latera cum axibus ellipseos erunt parallela. Sit D punctum Ellipseos, à quo si deducatur DB in axem AK ordinatim, alinque DP ad perpendiculum cum rectâ quæ curvam in D contingat, rectangulum DB × BP maximum sit. Dico punctum D esse ad alteram è diagonis parallelogrammi MO. Sit enim E centrum ellipseos. Centro E radio EA scribatur circulus, cui axis ellipseos EH in G occurrat, rectaque ED in F. Sit M angulus ille parallelogrammi circumscripti, quem quadrans ellipseos, AH, in quo positum est punctum D, convexus spectat. Jungaturque FM. Quoniam diagoniæ parallelogrammi MNOR utra-er ellipseos centrum, E, transeunt, erit utique EM altera è diagoniis illis. Dico punctum D esse

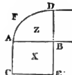
Cartesius in Geometriâ demonstravit, conicæ sectiones, idem in refractionibus quàm proximè præstantes, subrogari possint. Atque idem de aliis Curvis intellige. De Quantitate Curvaturæ.

CAPUT IX.

PROB. VII.

1. *Curvas pro arbitrio multas invenire, quarum Areæ per finitas Æquationes designari possunt.*

SIT AB basis Curvæ, ad cujus initium A erigatur normalis AC=1, et agatur CE parallela AB, sit etiam BD rectangula applicata concurrens rectæ CE in E, et Curvæ AD in D. Et concipe has areas ACEB et ADB à rectis BE et BD, per AB delatis, generari. Et earum incrementa, sive fluxiones, perpetim erunt ut lineæ describentes BE et BD (mm). Quare parallelogrammum ACEB sive AB × 1, dic x, et Curvæ aream, ADC dic z: et fluxiones $\dot{x}$ et $\dot{z}$ erunt ut BE et BD, adeoque posito $\dot{x}=1=$ BE, erit $\dot{z}=$ BD.



Si jam ad arbitrium assumatur æquatio quævis, pro definiendâ relatione z ad x, exinde per Prob. 1. elicietur $\dot{z}$. Atque ita duæ habebuntur æquationes, quarum posterior Curvam definiet, et prior Aream ejus.

3. EXEMPL. Assumatur $xx=z$ et inde per Prob. 1. elicietur $2\dot{x}x=\dot{z}$, sive $2x=\dot{z}$ siquidem est $\dot{x}=1$.

Assumatur $\frac{x^3}{a}=z$, et inde prodibit $\frac{3x^2}{a}=\dot{z}$, æquatio ad Parabolam.

esse ad rectam EM. Namque rectæ BF ad BE ratio data est. (Hamilton. Conic. Lib. 2. Prop. XXIV.) Quare rectanguli BD × BF ad rectangulum BD × BE ratio data. Et propter rationem rectæ BD ad BF datam, rectanguli EB × BD ad rectangulum EB × BF ratio data. Rectangula igitur DB × BF, FB × BE, quorum utrumque ad tertium DB × BE rationem datam habet, hæc datam inter se rationem gerent. (Euclid. dat. 8.) Maximo igitur existente illo DB × BF, alterum FB × BE maximum etiam erit. Maximo autem existente rectangulo FB × BE, erunt EB, BF inter se æquales. Id enim vulgo notum est. Sed æqualium EB, BF ad tertiam BD eadem erit ratio. (El. V. 7.) Et è naturis ellipseos circulique, quibus axis AX est communis, erit FB ad BD, ut EO vel EA ad EH vel AM. Erit igitur EB ad BD ut EA ad AM. (El. V. 11.) Punctum igitur D erit ad rectam EM. (Elem. VI. 32.) Q. E. D.

(mm) Hoc est incrementorum simul nascentium inter ipsa prima ratio, rectarum BE, BD ratio erit. Quæ proinde, *perpetim*, id est, in omni rectæ BD situ, fluxionum inter ipsas ratio erit.

Assumatur

CAPUT IX. Assumatur $ax^3=z^2$, sive $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}=z$; et emerget $\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=\dot{z}$, sive $\frac{9}{4}ax=\dot{z}\dot{z}$, æquatio iterum ad Parabolam.

Assumatur præterea $a^3x=z^2$, sive $a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}=z$; et elicietur $\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}}=\dot{z}$, sive $a^3=4x\dot{z}\dot{z}$.

Item assumatur $\frac{a^3}{x}=z$, sive $a^3x^{-1}=z$, et elicietur $-a^3x^{-2}=\dot{z}$ sive $a^3+\dot{z}xx=0$: ubi negativus valor ipsius $\dot{z}$ tantùm denotat BD capiendam esse ad partes contra BE ([nn]).

Ad hæc si assumas $c^2a^2+c^2x^2=z^2$ elicies $2c^2x=2\dot{z}z$; et exterminato z, proveniet $\frac{cx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\dot{z}$.

Vel si assumas $\frac{a^2+x^2}{b}\sqrt{a^2+x^2}=z$, dic $\sqrt{a^2+x^2}=v$; et erit $\frac{v^3}{b}=z$, et inde (per Prob. 1.) $\frac{3\dot{v}v^2}{b}=\dot{z}$. Item æquatio $a^2+x^2=v^2$ per Prob. 1. dat $2x=2v\dot{v}$, cujus ope si extermines $\dot{v}$, fiet $\frac{3vx}{b}=\dot{z}=\frac{3x}{b}\sqrt{a^2+x^2}$.

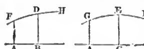
Si denique assumas $8-3xz+\frac{2}{3}z=z^2$, elicies $-3z-3x\dot{z}+\frac{2}{3}\dot{z}=2\dot{z}z$. Quare per assumptam æquationem imprimis quære Aream z; ac deinde Applicatam $\dot{z}$, per elicitam.

Atque ex Areis, qualescunque effingas, semper possis Applicatas determinare.

PROB. VIII.

3. *Curvas pro arbitrio multas invenire, quarum Areæ ad Aream datæ alicujus Curvæ relationem habent per finitas æquationes designabilem.*

Sit FDH data Curva, ac GEI quæsita, et earum Applicatas, DB et EC, concipe super basibus, AB et AC, erectas incedere.



Et Arearum, quas ita transigunt, incrementa ([oo]), sive fluxiones, erunt ut Applicatæ illæ ductæ in earum velocitates incedendi; hoc est, in fluxiones basium. Sit ergo AB$=x$, BD$=v$, AC$=z$, ac CE$=y$. Area AFDB$=s$, et area AGEC$=t$; eritque $\dot{x}v:\dot{z}y::\dot{s}:\dot{t}$. Quare si supponatur $\dot{x}=1$ et $v=\dot{s}$, ut suprà, erit $\dot{z}y=\dot{t}$, et inde $\frac{\dot{t}}{\dot{z}}=y$.

([nn]) Immo, eam potius significat Curvæ speciem, cujus area, z, contigua est basi, AB, ultra ordinatam productæ.

([oo]) Nascentia utique.

5 Assumatur

Affumantur itaque duæ quævis æquationes, quarum una defi- De Curvarum Comparatione.
niat relationem Arearum s ac t, et altera relationem Bafium x et z, et inde (per Prob. 1.) quærantur fluxiones $\dot{t}$ et $\dot{z}$, et fubftituatur $\frac{\dot{t}}{\dot{z}} = y$.

4. Exempl. 1. Data Curva AFD fit Circulus, æquatione $ax - x^2 = vv$, defignatus; et quærantur aliæ Curvæ, quarum areæ adæquant aream ejus. Ex hypothefi ergo eft $s = t$, et inde $\dot{s} = \dot{t} = v$. Et $y = (\frac{\dot{t}}{\dot{z}}) = \frac{v}{\dot{z}}$. Supereft ut $\dot{z}$ determinetur, affumendo relationem aliquam inter bafes x et z.

Veluti fi fingas $ax = zz$, erit per Prob. 1. $a = 2\dot{z}z$: quare fubftitue $\frac{a}{2z}$ pro $\dot{z}$, et fiet $y = (\frac{v}{\dot{z}}) = \frac{2vz}{a}$. Eft autem $v = (\sqrt{ax - xx} =)$ $\frac{z}{a}\sqrt{aa - zz}$, adeoque $\frac{2zz}{aa}\sqrt{aa - zz} = y$, æquatio ad Curvam cujus area æquatur areæ Circuli.

Ad eundem modum fi fingas $x^2 = z$, proveniet $2x = \dot{z}$, et inde $y = (\frac{v}{\dot{z}}) = \frac{v}{2x}$; et exterminato v et x, fiet $y = \frac{\sqrt{az^{\frac{1}{2}} - z}}{2z^{\frac{1}{2}}}$.

Vel fi fingas $cc = xz$, proveniet $0 = z + x\dot{z}$, et inde $-\frac{vx}{z} = y = -\frac{c^2}{z^3}\sqrt{az - cc}$.

Atque ita fi fingas $ax + \frac{s}{1} = z$, ope Prob. 1. obtinebitur $a + \dot{s} = \dot{z}$ et inde $\frac{v}{a + \dot{s}} = y = \frac{v}{a + v}$, quæ Curvam Mechanicam defignat.

5. Exempl. 2. Detur iterum Circulus $ax - x^2 = vv$, et quærantur Curvæ, quarum areæ ad aream ejus habeant aliam quamlibet affumptam relationem. Veluti fi affumas $cx + s = t$, et præterea fingas $ax = zz$, mediante Prob. 1. elicies $c + \dot{s} = \dot{t}$, et $a = 2\dot{z}z$. Quare eft $y = (\frac{\dot{t}}{\dot{z}}) = \frac{2cz + 2\dot{s}z}{a}$; et fubftituto $\sqrt{ax - xx}$ pro $\dot{s}$, et $\frac{z^2}{a}$ pro x, fit $y = \frac{2cz}{a} + \frac{2z^2}{a^2} \times \sqrt{a^2 - z^2}$.

Quòd fi affumas $s - \frac{2v^3}{3a} = t$ et $x = z$, invenies ope Prob. 1. $\dot{s} - \frac{2\dot{v}v^2}{a} = \dot{t}$, et $1 = \dot{z}$. Adeoque $y = (\frac{\dot{t}}{\dot{z}}) = \dot{s} - \frac{2\dot{v}v^2}{a}$, five $= v - \frac{2\dot{v}v^2}{a}$. Jam verò pro exterminando $\dot{v}$, æquatio $ax - x^2 = vv$, per Prob. 1. dat $a - 2x = 2\dot{v}v$; et proinde eft $y = \frac{2vx}{a}$, ubi fi fupprimas v et x, fubftituendo valores $\sqrt{ax - x^2}$, et z, emerget $y = \frac{2z}{a}\sqrt{az - zz}$.

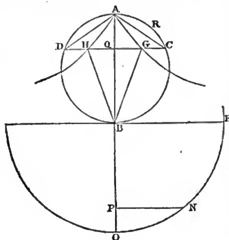
CAPUT IX. Sin assumas $ss=t$, et $x=z^2$, emerget $2\dot{s}=\dot{t}$ et $1=2\dot{z}z$, atque adeo $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=4\dot{s}sz$; et pro $\dot{s}$ et x substitutis $\sqrt{ax-x^2}$ et zz, fiat $y=4sz^2\sqrt{a-zz}$, æquatio ad Curvam Mechanicam.

6. EXEMPL. 3. Ad eundem modum figuræ, assumptam relationem ad aliam quamvis datam figuram habentes, inveniuntur. Sic datâ Hyperbolâ $cc+xx=vv$, si assumas $s=t$, et $xx=cz$, elicies per Prob. 1. $\dot{s}=\dot{t}$, et $2x=c\dot{z}$, et inde $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=\frac{c\dot{s}}{2x}$, et substitutis $\sqrt{cc+x^2}$ pro $\dot{s}$, et $c^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$ pro x proveniet $y=\frac{c}{2z}\sqrt{cz+zz}$.

Atque ita si assumas $xv-s=t$, et $xx=cz$, elicies $v+\dot{v}x-\dot{s}=\dot{t}$, et $2x=c\dot{z}$. Est autem $v=\dot{s}$, et inde $\dot{v}x=\dot{t}$; quare $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=\frac{c\dot{v}}{2}$. Jam verò $cc+xx=vv$, ope Prob. 1. dat $x=\dot{v}v$. Adeoque est $y=\frac{cx}{2v}$, et substitutis $\sqrt{cc+xx}$ pro v, et $c^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$ pro x, fit $y=\frac{cz}{2\sqrt{cz+zz}}$.

7. Ex-

COMPARATIO (pp) Nempe posito $\frac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}=b$, fiet $\frac{ax^3-x^4}{9}=bb$. Et ex hâc æquatione, ope Prob. 1. elicietur fluxionum æquatio, $\frac{3ax^2-4x^3}{9}\dot{x}=2b\dot{b}$. Hoc est, posito $\dot{x}=1$, $\frac{3ax^2-4x^3}{9}=2b\dot{b}$.



(qq) EA est hujusmodi. Sit Circulus ACBD ad quem pertineat Cissoides GAH, cujus axis sit AB circuli diameter, Asymptota recta BE, quæ circulum ACBD in puncto B contingit. A puncto quovis Q, in axe Cissoidis, AB, pro arbitrio sumendo, eductam puta ad perpendiculum rectam DC; quæ Circulo in punctis, D, C, Cissoidi, in illis, H, G, occurrat. Jungantur BH, BG. Centro BA, radio BE, quæ rectæ AB sit æqualis, scribatur circuli quadrans ENO. Jungatur BC. Acceptâque BP æquali rectæ BC, à puncto P ad perpendiculum educatur PN, quæ arcui quadrantis in N occurrat. Sector cissoidis AHBG spatii circularis OPN triplus erit.

Nam si AB dicatur a, AQ, x; erit QC vel QD recta, quæ symbolo $\sqrt{ax-xx}$ designata est (propter circulum). Et QG vel QH erit recta quæ symbolo $\frac{xx}{\sqrt{ax-xx}}$ designatur

7. EXEMPL. 4. Adhæc ſi detur Ciſſoides, $\frac{xx}{\sqrt{ax-x^2}}=v$, ad quam relatæ aliæ figuræ ſunt inveniendæ, et eâ de cauſâ, aſſumatur $\frac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}+\frac{2}{3}s=t$; finge $\frac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}=b$, et erit $b+\frac{2}{3}s=t$, et inde per Prob. 1. $\dot{b}+\frac{2}{3}\dot{s}=\dot{t}$. Æquatio autem $\frac{ax^3-x^4}{9}=bb$, per Prob. 1. dat $\frac{3ax^2-4x^3}{9}=2b\dot{b}$ (PP); ubi ſi extermines b, fiet $\dot{b}=\frac{3ax-4xx}{6\sqrt{ax-xx}}$. Quare cùm præterea ſit $\frac{2}{3}\dot{s}=(\frac{2}{3}v)=\frac{4xx}{6\sqrt{ax-xx}}$, erit $\frac{ax}{2\sqrt{ax-xx}}=\dot{t}$. Porro ad determinandum z et $\dot{z}$, aſſumatur $\sqrt{aa-ax}=z$, et ope Prob. 1. emerget $-a\dot{x}=2\dot{z}z$, ſive $\dot{z}=\frac{-a\dot{x}}{2z}$; quare eſt $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=\frac{-zx}{\sqrt{ax-x^2}}=\sqrt{\frac{zzx}{a-x}}=\sqrt{ax})=\sqrt{aa-zz}$. Quæ æquatio cùm ſit ad Circulum, habebitur ratio arearum Circuli et Ciſſoidis (qq). — De Curvarum Comparatione.

Atque ita ſi aſſumpſiſſes $\frac{2x}{3}\sqrt{ax-x^2}+\frac{1}{3}s=t$, & $x=z$, prodiiſſet $y=\sqrt{az-zz}$. Æquatio denuò ad Circulum.

8. Haud ſecus ſi detur Curva aliqua Mechanica, poſſunt aliæ ad eam relatæ Curvæ Mechanicæ inveniri; ſed ad eliciendum Geometricas convenit, ut è rectis, ab invicem geometricè dependentibus, aliqua pro baſi adhibeatur; et ut Area ad parallelogram-

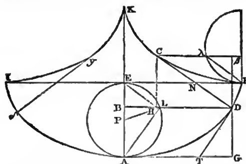
natur (propter ciſſoidem). Erit igitur rectangulum AQ × QG, ſive illi æquale triangulum DAC, ſpatium ſymbolo $x\sqrt{ax-xx}$ ſignificatum; et ſpatium Ciſſoidis, AHO, illud erit quod ſymbolum $2s$ ſignificat. Præterea, propter circulum ACB, recta AC, vel illi æqualis AP, ea erit quam litera z deſignat. Erit igitur PN $=y$, & ſpatium OPN $=t$. Poſito enim $x=0$, hoc eſt puncto Q in A tranſlato, ut ſpatium $\frac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}+\frac{2}{3}s$ in nihilum abeat, recta BC, vel BP, ipſi BA, vel AO æqualis evaſerit, et area OPN in nihilum abierit. Unde areæ illæ, $\frac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}+\frac{2}{3}s$, et OPN, cùm ſimul à nihilo generari incipiant, et æqualibus fluxionibus uſque creſcant, erunt ſemper inter ſe æquales. Quare OPN $=t$. — Ciſſoidis Circulique.

Jam propter æquationem à Newtono poſitam, $\frac{x}{3}\sqrt{ax-xx}+\frac{2}{3}s=t$, erit $x\sqrt{ax-xx}+2s=3t$. Hoc eſt triangulum DAC, ſpatio HAG auctum triplum erit ſpatii OPN. Sed propter Ciſſoidem, BQ : QA = CQ : QG = DC : HG. Triangula igitur DAC, AHG inter ſe ſunt æqualia. Triangulum igitur DAC, ſpatio HAO auctum, æquale erit triangulo AHO acceſſione ejuſdem ſpatii HAG aucto; hoc eſt, ſectori Ciſſoidis BHAG. Quare ſector ciſſoidis BHAG areæ circularis NPN triplus erit. Et hæc eſt relatio ciſſoidis circulique, quam calculi auctoris indicant. Quæ quidem longè elegantiùs rationibus geometricis oſtendi poſſet.

2. Poſito autem $\frac{2x}{3}\sqrt{ax-x^2}+\frac{1}{3}s=t$, & $x=z$; efficietur $y=\sqrt{az-zz}$. Sive eam eſſe Ciſſoidis Circulique relationem, ut ſpatium ciſſoidis, AHO, ſegmenti ARC triplum ſit.

Atque hinc efficitur ſpatium illud omne, quod aſymptotæ BE, et brachiis ciſſoidis, AG, AH, infinitè protenſis adjacet, circuli ACBD, ad quem ciſſoides pertinet, triplum eſſe.

CAPUT IX. mum complementalis quæratur, ſupponendo fluxionem ejus valere baſin ductam in fluxionem ordinatim applicatæ.



9. EXEMPL. 5. Sic Trochoide ADF propoſitâ, refero ad baſin AB; et completo parallelogrammo, ABDG, quæro complementalem ſuperficiem ADG, concipiendò deſcriptam eſſe per motum rectæ GD; et proinde fluxionem ejus valere illam GD in celeritatem progrediendi ductam, hoc eſt, $x \times \dot{v}$. Jam cùm AL ſit parallela tangenti DT, erit AB ad BL ut fluxio ejuſdem AB ad fluxionem applicatæ BD, hoc eſt ut 1 ad $\dot{v}$ (π). Quare eſt $\dot{v} = \frac{BL}{AB}$, adeoque $x\dot{v} = BL$. Et proinde area ADG deſcribitur fluxione BL: atque adeo cùm area circularis ABL eâdem fluxione deſcribatur æquales erunt.

Pari ratione ſi concipias ADF eſſe figuram arcuum ſive ſinuum verſorum, hoc eſt, cujus applicata BD æquatur arcui AL: cùm fluxio arcûs AL ſit ad fluxionem baſis AB, ut PL ad BL, hoc eſt $\dot{v} : 1 :: \frac{1}{2}a : \sqrt{ax-x^2}$ erit $\dot{v} = \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}$. Adeoque $\dot{v}x$, fluxio arcæ ADG, erit $\frac{ax}{2\sqrt{ax-x^2}}$. Quare ſi ad ipſius AB punctum B recta

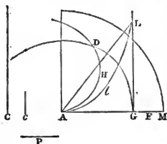
(π) NIMIRUM $DG : GT = \dot{OO} : \dot{GA} = \dot{x} : \dot{v}$ (Introduct. ad Quad. Curv. § 4.) Sed $DG : GT = AB : AL$ (propter triangula ABL, DGT inter ſe ſimilia et æqualia). Quare $\dot{x} : \dot{v} = AB : BL$. Quare $AL \times \dot{x} = AB \times \dot{v} = DG \times \dot{v}$. Areæ igitur ADG, ABL, cùm ſimul à nihilo generari inceperint, inter ſe æquales erunt. (De Quadrat. Curv. Prop. IX.)

(ρ) HÆC et alia hujuſmodi apertiora, credo, fuiſſent, ſi auctor notam $\dot{x}$ retinuiſſet. Illa enim unitatis ſuppoſitio, licet formulis Algebraicis aliquam inducat ſimplicitatis ſpeciem, perſpicuitati tamen ſignificationis Geometricæ adeo nihil confert, ut, me judice, vel potiùs officiat. Neque profectò nihil eſt, quod magnus ille olim Vieta præcipiebat; in formulis Algebraicis condendis, quoties illud ageretur, ut ex illis Geometricæ conſtructiones inferrentur, "*omnino ſervari oportere homogeneorum legem. Cui non attendiſſe cauſam fuiſſe* dicit *multæ caliginis & cæcutiei veterum analyſtarum.*" (Iſagog. Cap. III. De Lege Homogeneorum, & Cap. V. De Legibus Zeteticês.)
Nimirum

recta æqualis $\frac{ax}{2\sqrt{ax-x^2}}$, in angulo recto, applicari concipiatur, illa ad Curvam quandam Geometricam terminabitur, cujus area, basi AB adjacens, æquatur areæ ADG [ff]. De Curvarum Comparatione.

10. Et sic aliis figuris, per arcuum Circuli, Hyperbolæ vel cujusvis Curvæ ad arcuum istorum sinus rectos vel versos aut alias quasvis geometricè determinabiles rectas lineas, in datis angulis applicationem, constitutis, æquales Geometricæ Figuræ inveniri possunt.

11. Circa Spiralium areas levissimum est negotium. Utpote centro convolutionis A, radio quovis AG descripto arcu DG occurrente AF in G, et spirali in D: cùm arcus ille, ad instar lineæ super basi AG incedentis, describit Spiralis aream AHDG, ita ut ejus areæ fluxio sit ad fluxionem rectanguli $1 \times AG$ ut arc. GD ad 1: si rectam GL, arcui isti æqualem, erigas, illa, similiter incedendo super eàdem AG, describet aream ALG æqualem areæ spiralis AHDG; Curvà AlL existente Geometricâ. Et præterea, si subtensa AL ducatur, triangulum ALG ($=\frac{1}{2}AG \times GL = \frac{1}{2}AG \times GD$)= sectori AGD [tt]; adeoque complementalia segmenta ALl, et ADH erunt etiam æqualia. Et hæc non tantùm Spirali Archimedeæ, ubi AlL evadit Parabola Apolloniana, [uu] sed et aliis quibuscunque conveniunt;



Nimirum cum sit $\dot{v} : \dot{x} = \frac{1}{2}a : \sqrt{ax-x^2}$, erit $\dot{v} = \frac{a\dot{x}}{2\sqrt{ax-x^2}}$. Ergo $\dot{v}x$, sive fluxio areæ ADO, æqualis erit huic $\frac{ax}{2\sqrt{ax-x^2}}\dot{x}$. Vel si pro $\frac{ax}{2\sqrt{ax-x^2}}$, hoc est, si pro rectâ quæ nascitur applicando rectangulum ax ad duplam rectam quæ duarum, x, $a-x$, proportione media est, si pro rectâ, inquam, quæ nascitur ex hâc applicatione, scribatur z, erunt rectangula $\dot{v}x$, $z\dot{x}$ inter se æqualia. Si igitur in rectâ quâdam à rectæ AB puncto B, ad perpendiculum eductâ, capiatur longitudo illi z æqualis, terminabitur illa in Curvâ quâdam Geometricâ, cujus area, basi AB apposita, areæ ADG æqualis erit. (Geometr. Flux. Prop. 11.) Nempe cùm areæ illæ simul à nihilo generari inceperint, & æquales semper fluxiones habeant.

[tt] Duci intelligatur recta AD quæ sculptoris incuriâ omissa est.

[uu] Sit AM longitudo illa, quam recta AD, polo A mobilis, perpetim crescendo adepta sit, quando

CAPUT IX. niunt; adeo ut omnes eodem negotio in æquales Geometricas converti poſſint.

12. Poſſem plura hujus conſtruendi Problematis ſpecimina afferre; ſed hæc ſufficiant, cùm ſint adeò generalia, ut quicquid hactenus circa Curvarum Areas inventum fuerit, vel, ni fallor, inveniri poſſit, aliquo ſaltem modo complectantur; et ut plurimùm leviori curà ſine ſolitis ambagibus determinant.

13. Præcipuus autem hujus et præcedentis Problematis uſus eſt, ut aſſumptis conicis ſectionibus, vel quibuſlibet notæ magnitudinis Curvis; aliæ Curvæ, quæ cum his conferri poſſunt, inveſtigentur; et earum definientes æquationes in catalogum ordinatim diſponantur. Et conſtructo ejuſmodi catalogo, cùm Curvæ alicujus Area quæritur, ſi æquatio ejus definiens vel immediatè in catalogo reperiatur, vel in aliam, quam catalogus complectitur, transformari poteſt; exinde cognoſces aream ejus. Quinetiam catalogus ille determinandis Curvarum Longitudinibus, Centris Gravitatum, Solidis per convolutionem generatis, ſolidorum Superficiebus, et cuilibet fluenti quantitati, per analogam fluxionem generatæ, inſervire poteſt.

PROB. IX.

14. *Propoſitæ alicujus Curvæ Aream Determinare.*

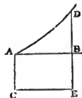
PROBLEMATIS reſolutio in eo fundatur, ut quantitatum fluentium relatio ex relatione fluxionum (per Prob. II.) eliciatur.

Et

COGNATIO do ſemel circumacta in locum illum reverſa ſit, unde moveri inceperat. Centro A radio AM ſcribatur Circulus cujus peripheriæ æqualis ſit recta c. Peripheriæ autem circuli, centro A radio AG ſcripti, æqualis ſit recta *e*. E naturâ Helicis Archimedei, recta AG erit ad AM ut angulus MAG, ad quatuor rectos: hoc eſt, ut arcus GG ad circuitum circuli GDG, ſive ut recta GL ad rectam *e*. Sed recta GL ad rectam *e* proportionem habet compoſitam ex proportionibus rectæ GL ad rectam c rectæque c ad *e*. Et recta c ad *e* proportionem habet eam quam AM ad AG. Quare proportio rectæ GL ad rectam *e* compoſita eſt ex proportionibus rectæ GL ad c rectæque AM ad AG. Sed rectanguli GL × AM ad rectangulum c × AG ex eiſdem eſt compoſita proportio. Erit igitur AG, ſive AG, ad AM ut GL × AM ad c × AG. Quadratum igitur ex AG erit ad rectangulum AM × AG ut GL × AM ad c × AG. Eſt autem rectangulum AM × AG ad quadratum ex AM ut c × AG ad c × AM. Erit igitur ex æquo quadratum ex AG ad quadratum ex AM ut GL × AM ad c × AM. Duabus c, AM ſit P proportione tertia. Erit igitur quadratum ex AM rectangulo c × P æquale.

Et

CURVARUM AREÆ.



Et imprimis si recta BD, cujus motu quæsita area ADB describitur, super basi AB, positione datâ, erectè incedat; concipe, ut suprà, parallelogrammum ABEC à BE, unitatem æquante, interea describi. Et positâ BE fluxione parallelogrammi, erit BD fluxio areæ quæsitæ.

Dic ergo AB$=x$, et erit etiam ABEC$=(1\times x)=x$, et BE$=\dot{x}$: dic insuper aream ADB$=z$, et erit BD$=\dot{z}$, ut et $=\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, eo quòd sit $\dot{x}=1$. Et proin per æquationem definientem BD simul definitur fluxionum ratio $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, et exinde (per Prob. II. Cas. I.) elicietur relatio fluentium quantitatum x et z.

15. EXEMPLA PRIMA.

Ubi BD, *sive* $\dot{z}$, *valet simplicem aliquam quantitatem.*

Detur $\frac{x^2}{a}=\dot{z}$, vel $=\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, æquatio nempe ad Parabolam, et (per Prob. II.) emerget $\frac{x^3}{3a}=z$. Est ergo $\frac{x^3}{3a}$ sive [xx] $\frac{1}{3}$AB$\times$BD $=$ areæ parabolicæ ADB.

Detur $\frac{x^3}{a^2}=\dot{z}$, æquatio ad Parabolam secundi generis, et (per Prob. II.) emerget $\frac{x^4}{4a^2}=z$, hoc est [yy] $\frac{1}{4}$AB$\times$BD $=$ areæ ADB.

Detur $\frac{a^3}{x^2}=\dot{z}$, sive $a^3x^{-2}=\dot{z}$, æquatio ad Hyperbolam secundi generis; et emerget $-a^3x^{-1}=z$ [zz] sive $\frac{-a^3}{x}=z$; hoc est, AB$\times$BD $=$

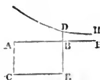
Et quadratum ex AG erit ad rectangulum $c\times p$ ut GL$\times$AM ad $c\times$AM, hoc est ut GL ad c, sive ut GL$\times p$ ad $c\times p$. Quadratum igitur ex AG rectangulo GL$\times p$ æquale erit. Recta autem p magnitudine data est, propter duas c, AM datas. Quare punctum L erit ad Parabolam positione datam, illam scilicet cujus vertex A, axis rectæ GL parallelus, parameter datæ p æqualis. Q.E.D. Est hæc est cognatio illa Helicis Archimedei cum Parabolâ Apollonianâ, cujus jam olim meminere Cavallerius, Torricellius, Barrovius, aliique. HELICIS PARABOLÆQUE.

(xx) Sive $\frac{1}{3}x\times\frac{x^2}{a}$, sive $\frac{1}{3}x\times\dot{z}$, sive $\frac{1}{3}$AB$\times$BD.

(yy) $\frac{1}{4}x\times\frac{x^3}{a^2}$, sive $\frac{1}{4}x\times\dot{z}$, sive $\frac{1}{4}$AB$\times$BD.

(zz) $-x\times a^3x^{-2}$, sive $-x\times\dot{z}$, sive $-$AB$\times$BD $=z$.

areæ



areæ infinitè longæ HDBII ex alterâ parte applicatæ BD jacentis, ut innuit valor negativus.

Atque ita si detur $\frac{a^4}{x^3}=\dot{z}$, emerget $\frac{-a^4}{2x^2}=z$.

Præterea sit $ax=\dot{z}^2$, sive $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=\dot{z}$, æquatio iterum ad Parabolam, et proveniet $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}=z$, hoc est (a), $\frac{2}{3}$ AB × BD = areæ ADB.

Sit $\frac{a^3}{x}=\dot{z}^2$, et fiet $2a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}=z$, sive 2AB × BD = ADB.

Sit $\frac{a^5}{x^3}=\dot{z}^2$, et fiet $-\frac{2a^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}=z$, sive 2AB × BD = HDBII.

Sit $ax^2=\dot{z}^3$, et fiet $\frac{3}{5}a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{5}{3}}=z$, sive $\frac{3}{5}$ AB × BD = ADB. Et sic in aliis.

16. EXEMPLA SECUNDA.

Ubi $\dot{z}$ valet plures ejusmodi connexas quantitates.

Sit $x+\frac{x^2}{a}=\dot{z}$, et fiet $\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3a}=z$.

Sit $a+\frac{a^3}{x^2}=\dot{z}$, et fiet $ax-\frac{a^3}{x}=z$.

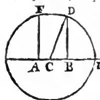
Sit $3x^{\frac{1}{2}}-\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}=\dot{z}$, et fiet $2x^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{x}-4x^{\frac{1}{2}}=z$.

17. EXEMPLA TERTIA.

Ubi prævia reductio per Divisionem requiritur.

Detur $\frac{a^2}{b+x}=\dot{z}$, æquatio ad Hyperbolam Apollonianam; et factâ in

(a) $\frac{2}{3}x\times a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, sive $\frac{2}{3}x\times\dot{z}$, sive $\frac{2}{3}$ AB × BD.



(β) Nempe hoc modo. Rectâ AB positione datâ, datoque in illâ puncto A, sit AB indefinitæ longitudinis, quæ dicatur x. Rectam AB ad perpendiculum insistat BD, quæ dicatur $\dot{z}$. Et rectæ AB, BD eo modo inter se habeant atque hæc æquatio significat; $\dot{z}=\sqrt{a^2+bx-x^2}$: designantibus, b, a longitudines quasdam datas. Dico punctum D esse ad peripheriam circuli magnitudine et positione dati. In rectâ AB sumatur AC $=\frac{1}{2}b$, et jungatur CD. Sumatur etiam BE = AB. Ita erit EC $=2x-\frac{1}{2}b$. Propter angulum ad B rectum, CD² = CB² + BD². Sed CB² = AB² − EC × CA $=x^2-\overline{2x-\frac{1}{2}b}\times\frac{1}{2}b=x^2-bx+\frac{1}{4}b^2$. Et BD² $=a^2+bx-x^2$ (ex hypothesi) Quare CB² + BD² sive CD² $=a^2+\frac{1}{4}b^2$.

in infinitum divisione, evadet $\dot{z}=\frac{a^2}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}+$ &c. Et inde (per Prob. II.) ut in secundis exemplis, obtinebitur $z=\frac{a^2x}{b}-\frac{a^2x^2}{2b^2}+\frac{a^2x^3}{3b^3}-\frac{a^2x^4}{4b^4}$ &c. CURVARUM AREÆ.

Detur $\frac{1}{1+x^2}=\dot{z}$, et per divisionem elicietur, $\dot{z}=1-x^2+x^4-x^6$ &c. Vel etiam $\dot{z}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}$ &c. Indeque (per Prob. II.) $z=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$ &c. $=$ AEDB; vel $z=\frac{-1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}$ &c. $=$ HDBH.

Detur $\frac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}=\dot{z}$, et per divisionem evadet $\dot{z}=2x^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^2+34x^{\frac{5}{2}}$ &c. Et inde (per Prob. II.) $z=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2+\frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{13}{3}x^3+\frac{68}{7}x^{\frac{7}{2}}$ &c.

18. EXEMPLA QUARTA.

Ubi prævia reductio per Extractionem Radicum requiritur.

Detur $\dot{z}=\sqrt{a^2+x^2}$, æquatio nempe ad Hyperbolam. Et radice adusque terminos infinitè multos extractâ, evadet $\dot{z}=a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}$ &c. Atque inde, ut in præcedentibus, $z=ax+\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}+\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}$ &c.

Ad eundem modum, si detur $\dot{z}=\sqrt{aa-xx}$, æquatio scilicet ad Circulum, obtinebitur $z=ax-\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}-\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}$ &c.

Atque ita si detur $\dot{z}=\sqrt{x-x^2}$, æquatio iterum ad Circulum proveniet, extrahendo radicem, $\dot{z}=x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, adeoque est $z=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ &c.

Sic $\dot{z}=\sqrt{a^2+bx-x^2}$, æquatio denuò ad Circulum, (*) per Extractionem Radicis, dat $\dot{z}=a+\frac{bx}{2a}-\frac{x^2}{2a}-\frac{b^2x^2}{8a^3}$ &c. Unde (per Prob. II.) elicitur, $z=ax+\frac{bx^2}{4a}-\frac{x^3}{6a}-\frac{b^2x^3}{24a^3}$ &c.

$a^2+\frac{1}{4}b^2$. Datum igitur CD^2. Ergo CD magnitudine data. Sed punctum C datum, propter rectam AC magnitudine et positione datam, datumque punctum A. Ergo D ad peripheriam circuli positione dati. Scribatur circulus ille, cujus peripheriæ recta per A, cum ordinatis BD parallela, in F occurrat. Areæ circulari FABD series Newtoniana $ax+\frac{bx^2}{4a}-\frac{x^3}{6a}$ &c. infinitè producta fit ultimò æqualis.

Et fic $\sqrt{\frac{1+ax^2}{1-bx^2}} = \dot{z}$, per debitam reductionem dat $\dot{z} = 1 + \begin{array}{l} \frac{1}{2} b x^2 + \frac{3}{8} b^2 x^4 \text{ \&c.} \\ \frac{1}{2} a \quad + \frac{1}{4} ab \\ \qquad - \frac{1}{8} aa \end{array}$ unde (per Prob. 1.) $z = x + \begin{array}{l} \frac{1}{6} b x^3 + \frac{3}{40} b^2 x^5 \text{ \&c.} \\ + \frac{1}{6} a \quad + \frac{1}{10} ab \\ \qquad - \frac{1}{40} aa \end{array}$

Sic denique $\dot{z} = \sqrt[3]{a^3 + x^3}$, per extractionem Radicis Cubicæ, dat $\dot{z} = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8}$ &c. Indeque $z = ax + \frac{x^4}{12a^2} - \frac{x^7}{63a^5} + \frac{x^{10}}{162a^8}$ &c. $=$ ADB. Vel etiam $\dot{z} = x + \frac{a^3}{3x^2} - \frac{a^6}{9x^5} + \frac{5a^9}{81x^8}$ &c. Indeque $z = \frac{x^2}{2} - \frac{a^3}{3x} + \frac{a^6}{36x^4} - \frac{5a^9}{567x^7}$ &c $=$ HDEH (7).

19. EXEMPLA QUINTA.

Ubi prævia reductio per æquationis affectæ resolutionem requiritur.

Si Curva per æquationem $\dot{z}^3 + a^2\dot{z} + ax\dot{z} - 2a^3 - x^3 = 0$ definiatur, extrahe radicem, et proveniet $\dot{z} = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512aa}$ (8) &c. Unde, ut in prioribus, obtinebitur $z = ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048a^2}$ &c.

Sin $\dot{z}^3 - c\dot{z}^2 - 2x^2\dot{z} - c^2\dot{z} + 2x^3 + c^3 = 0$ fit æquatio ad Curvam, resolutio dabit triplicem radicem; nempe $\dot{z} = c + x - \frac{x^2}{4c} + \frac{x^3}{16c^2}$ &c. Et $\dot{z} = c - x + \frac{3x^2}{4c} - \frac{3x^3}{16c^2}$ &c. Et $\dot{z} = -c - \frac{x^2}{2c} - \frac{x^3}{2cc} + \frac{x^5}{4c^4}$ &c. Et inde trium correspondentium arearum valores,

$$z = cx + \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{12c} + \frac{x^4}{64c^2} \text{ \&c.}$$
$$z = cx - \tfrac{1}{2}x + \frac{x^3}{4c} - \frac{3x^4}{64c^2} \text{ \&c.}$$
$$\text{ac } z = -cx - \frac{x^3}{6c} - \frac{x^4}{8c^2} + \frac{x^6}{24c^4} \text{ \&c.}$$

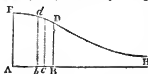
20. De Curvis Mechanicis hic nihil adjicio, fiquidem reductio ad formam Geometricam poft oftendetur.

21. Cæterùm cùm fic inventi valores z areis quandoque ad bafis finitam partem AB, quandoque ad partem BH infinitè verfus H productam, et quandoque ad utramque partem fitis fecundum

(7) Sit CDH curva cujus naturam hæc æquatio indicat $\dot{z} = \overline{a^3 + x^3}\,^{\frac{1}{3}}$, defignante x indefinitam AB, quæ a dato puncto A initium fumat, $\dot{z}$ vero defignante BD. In BD capiatur BE $=$ AB $= x$. Junctaque AE producatur. Recta AE (quæ pofitione data eft per naturam) curvæ CDH afymptotos erit; id enim æquatio infinita $\dot{z} = x + \frac{a^3}{3x^2} - \frac{a^6}{9x^5}$ &c. fatis indicat. Seriei autem infinitæ $\frac{x^2}{2} - \frac{a^3}{3x}$

cundum diversos eorum terminos competant: quo debitus areæ, ad quamlibet basis portionem sitæ, valor assignetur, area illa semper ponenda est æqualis differentiæ valorum z partibus basis, ad initium et finem istius areæ terminatis, competentium. CURVARUM AREÆ.

22. E.G. Ad Curvam, quam æquatio $\frac{1}{1+xx} = \dot{z}$ definit, inventum est $z = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$ &c. Jam ut quantitatem areæ bdBD, ad jacentis parti basis Bb, determinem, à valore z qui fit ponendo AB$=x$, aufero eum qui fit ponendo A$b=x$; et (distinctionis gratiâ scriptâ X majusculâ pro AB, et x minusculâ pro Ab) restat $\mathrm{X} - \frac{1}{3}\mathrm{X}^3 + \frac{1}{5}\mathrm{X}^5$ &c. $-x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5$ &c. valor areæ illius bdBD. Unde si Ab, seu x, ponatur nullum, habebitur tota area AFDB$= \mathrm{X} - \frac{1}{3}\mathrm{X}^3 + \frac{1}{5}\mathrm{X}^5$ &c.



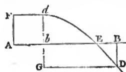
Ad eandem Curvam inventum est etiam $z = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5}$ &c. Unde rursus, juxta præcedentia, erit area illa bdDB$= \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5}$ &c. $-\frac{1}{\mathrm{X}} + \frac{1}{3\mathrm{X}^3} - \frac{1}{5\mathrm{X}^5}$ &c. Adeoque si AB, seu X, statuatur infinitum, area adjacens bdH, à parte H similiter infinitè longa, valebit $\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5}$ &c. Siquidem posterior series, $-\frac{1}{\mathrm{X}} + \frac{1}{3\mathrm{X}^3} - \frac{1}{5\mathrm{X}^5}$ &c. propter infinitatem denominatorum, evanescat.

23. Ad Curvam æquatione $a + \frac{a^3}{x^2} = \dot{z}$ designatam, inventum est $ax - \frac{a^3}{x} = z$. Unde fit $a\mathrm{X} - \frac{a^3}{\mathrm{X}} - ax + \frac{a^3}{x} =$ areæ bdDB. Hæc autem evadit infinita, sive x fingatur nulla, sive X infinita; et proinde utraque area AFDB, et bdH infinitè magna est, ac solæ partes intermediæ, qualis bdDB, exhiberi possunt. Id quod semper evenit, ubi basis x cum in numeratoribus aliquorum tum in denominatoribus aliorum terminorum valoris z reperitur. Ubi verò x in numeratoribus solummodo, ut in primo exemplo, re-

$\frac{a^3}{3x} + \frac{a^6}{36x^4}$ &c. nomen primum $\frac{x^2}{2}$ areæ trianguli rectilinearis ABE æquale est; nomina omnia reliqua areæ HEDH, quæ ultra ordinatam DE asymptoto est contigua. Vide Analysin per Æquat. num. term. inf. Reg. 2. exempla tertia. Series prior $ax + \frac{x^4}{12a^2} - \frac{x^7}{63a^5}$ &c. areæ ACED mensuram exhibet.

(l) Vide Cap. III. § 6.

CAPUT IX. peritur; valor z competit areæ ſitæ ad AB, cis parallelè incedentem. Et ubi in denominatoribus tantùm, ut in ſecundo exemplo; valor ille mutatis omnium terminorum ſignis, competit areæ omni, ultra parallelè incedentem, infinitè productæ.



24. Si quando Curva linea ſecat baſin inter puncta b et B, puta in E, vice areæ habebitur arearum ad diverſas baſis partes differentia, bdE$-$BDE; cui ſi addatur rectangulum BDGb, obtinebitur area dEDG.

25. Præcipuè autem notandum eſt, quòd ubi in valore $\dot{z}$ terminus aliquis per x unius tantùm dimenſionis dividitur; area illi termino correſpondens pertinet ad Hyperbolam conicam, et proinde per infinitam ſeriem ſeorſim exhibenda eſt: quemadmodum in ſequentibus factum.

Sit $\frac{a^3 - a^2x}{ax + x^2} = \dot{z}$, æquatio ad Curvam; et per diviſionem, fiet $\dot{z} = \frac{a^2}{x} - 2a + 2x - \frac{2x^2}{a} + \frac{2x^3}{a^2}$ &c. Indeque $z = \boxed{\frac{aa}{x}} - 2ax + x^2 - \frac{2x^3}{3a} + \frac{x^4}{2a^2}$ &c. Et area bdDB $= \boxed{\frac{aa}{X}} - 2aX + X^2 - \frac{2X^3}{3a}$ &c. $- \boxed{\frac{aa}{x}} + 2ax - x^2 + \frac{2x^3}{3a}$ &c. Ubi per notas $\boxed{\frac{aa}{X}}$ et $\boxed{\frac{aa}{x}}$ deſigno areolas terminis $\frac{aa}{X}$ et $\frac{aa}{x}$ competentes.

Jam ut $\boxed{\frac{aa}{X}}$ et $\boxed{\frac{aa}{x}}$ inveſtigetur, fingo Ab ſeu x definitam eſſe; et bB indefinitam, ſeu fluentem, lineam, quam itaque ſi dicam y, erit $\boxed{\frac{aa}{x+y}}$ = areæ illi hyperbolicæ adjacenti bB, nempe $\boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}}$. Eſt autem, factâ diviſione $\frac{aa}{x+y} = \frac{aa}{x} - \frac{aay}{x^2} + \frac{a^2y^2}{x^3} - \frac{a^2y^3}{x^4}$ &c. Adeoque $\boxed{\frac{aa}{x+y}}$ ſeu $\boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}} = \frac{aay}{x} - \frac{a^2y^2}{2x^2} + \frac{a^2y^3}{3x^3} - \frac{a^2y^4}{4x^4}$ &c. Et proinde tota area quæſita bdBD=

aay

(ε) Nimirum ſi curva una ſit ipſa Hyperbola Apolloniana.

(ζ) Vide

$\frac{aay}{x} - \frac{a^2y^2}{2x^2} + \frac{a^2y^3}{3x^3}$ &c. $- 2aX + X^2 - \frac{2X^3}{3a}$ &c. $+ 2ax - x^2 + \frac{2x^3}{3a}$ &c.

26. Ad eundem modum AB, seu X, pro definitâ lineâ adhiberi potuit, et sic prodiisset $\boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}} = \frac{a^2y}{X} + \frac{a^2y^2}{2X^2} + \frac{a^2y^3}{3X^3} + \frac{a^2y^4}{4X^4}$ &c.

27. Quinetiam si bisecetur bB in C, et assumatur AC esse definitæ longitudinis, et Cb ac CB indefinitæ: tum dicto AC$=e$, et CB vel CB$=y$, erit $bd = \frac{aa}{e-y}$ (4) $= \frac{aa}{e} + \frac{aay}{e^2} + \frac{a^2y^2}{e^3} + \frac{a^2y^3}{e^4} + \frac{a^2y^4}{e^5}$ &c. Indeque area hyperbolica parti basis bC adjacens $\frac{a^2y}{e} + \frac{a^2y^2}{2e^2} + \frac{a^2y^3}{3e^3} + \frac{a^2y^4}{4e^4}$ &c. Erit etiam CB $= \frac{aa}{e+y} = \frac{aa}{e} - \frac{a^2y}{e^2} + \frac{a^2y^2}{e^3} - \frac{a^2y^3}{e^4} + \frac{a^2y^4}{e^5}$ &c. Et inde area alteri basis parti CB adjacens $\frac{a^2y}{e} - \frac{a^2y^2}{2e^2} + \frac{a^2y^3}{3e^3} - \frac{a^2y^4}{4e^4} + \frac{a^2y^5}{5e^5}$ &c. Et harum arearum summa $\frac{2a^2y}{e} + \frac{2a^2y^3}{3e^3} + \frac{2a^2y^5}{5e^5}$ &c. valebit $\boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}}$.

28. Sic æquatione $z^3 + z^2 + z - x^3 = 0$, ad Curvam existente, ejus radix erit $z = x - \frac{1}{3} - \frac{2}{9x} + \frac{7}{81x^2} + \frac{14}{729x^4}$ (5) &c. Unde fit $s = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \boxed{\frac{2}{9x}} - \frac{7}{81x} - \frac{14}{2187x^3}$ &c. Et area bDB$d = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{3}X - \boxed{\frac{2}{9X}} - \frac{7}{81X}$ &c. $- \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \boxed{\frac{2}{9x}} + \frac{7}{81x}$ &c. hoc est, $= \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{7}{81X}$ &c. $- \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{7}{81x}$ &c. $- \frac{4v}{9e} - \frac{4v^3}{27e^3} - \frac{4v^5}{35e^5}$ &c.

29. Potest autem terminus iste hyperbolicus commodè devitari, mutando initium basis; id est, augendo vel minuendo eam per datam aliquam quantitatem. Quemadmodum in exemplo priore, ubi $\frac{a^3 - a^2x}{ax + x^2} = z$, erat æquatio ad Curvam; si faciam b esse initium basis, et fingens Ab cujuslibet esse determinatæ longitudinis, puta $\frac{1}{2}a$, pro basis residuo, bB, jam scribam x: hoc est, si diminuam basem per $\frac{1}{2}a$, scribendo $x + \frac{1}{2}a$ pro x; evadet $\frac{\frac{1}{2}a^3 - a^2x}{\frac{3}{4}a^2 + 2ax + x^2} = z$, et per divisionem $z = \frac{2}{3}a - \frac{28}{9}x + \frac{200x^2}{27a}$ &c. Unde fit $s = \frac{2}{3}ax - \frac{14}{9}x^2 + \frac{200x^3}{81a}$ &c. = areæ bdDB.

Et sic pro initio basis adhibendo aliud, atque aliud ejus punctum, potest area cujusvis Curvæ modis infinitis exprimi.

30. Potuit etiam æquatio $\frac{a^3 - a^2x}{ax + x^2} = z$, in duas series infinitas re-

(5) Vide Cap. III. § 15.

folvi,

CAP. IX. folvi, prodeunte $z = \frac{a^3}{x^2} - \frac{a^4}{x^3} + \frac{a^5}{x^4}$ &c. $-a+x-\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{a^2}$ &c (*). Ubi terminus per x unius tantùm dimenfionis divifus non reperitur. Sed hujufmodi feries, ubi dimenfiones x in unius numeratoribus, et alterius denominatoribus, infinitè afcendunt, minùs aptæ funt, ex quibus z per computum arithmeticum obtineri poffit, cùm in ejus valore numeri pro fpeciebus fubftituuntur.

31. Inftituenti computum hujufmodi numerofum, poftquam valor areæ in fpeciebus habetur, haud aliquid difficile occurret. Tamen in præcedentem doctrinam penitiùs illuftrandam, exemplum unum et alterum fubjungere placuit.

QUADRATURA HYPERBOLÆ. 32. Proponatur Hyperbola AD, quam æquatio $z=\sqrt{x+x^2}$ defignat, utpote cujus vertex eft ad A, et uterque axis æquatur unitati. Et è præcedentibus area ejus ADB erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}+\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}-\frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$ &c. hoc eft, $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{28}x^3+\frac{1}{72}x^4-\frac{5}{704}x^5$ &c. Quæ feries infinitè producitur, multiplicando ultimum terminum continuò per fuccedaneos terminos hujus progreffionis; $\frac{1.3}{2.5}x$. $\frac{-1.5}{4.7}x$. $\frac{-3.7}{6.9}x$. $\frac{-5.9}{8.11}x$. $\frac{-7.11}{10.13}x$. &c. Nempe primus terminus $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\times\frac{1.3}{2.5}x$ facit $\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}$, fecundum terminum. Hic in $\frac{-1.5}{4.7}x$ facit $-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}$ tertium terminum. Hic in $\frac{-3.7}{6.9}x$ facit $\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ quartum terminum. Et fic in infinitum. Sumatur jam AB cujuflibet longitudinis, puta $\frac{1}{4}$, et hunc numerum fcribe pro x, ejufque radicem $\frac{1}{2}$ pro $x^{\frac{1}{2}}$; et primus terminus $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, five $\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}$ in decimalem fractionem reductus, evadit 0,08333333 &c. Hic in $\frac{1.3}{2.5.4}$ facit 0,00625, fecundum terminum. Hic in $\frac{-1.5}{4.7.4}$ facit $-$0,0002790178 &c. tertium terminum. Et fic in infinitum. Terminos autem, quos fic gradatim elicio, difpono in duas Tabulas, affirmativos nempe in unam, et negativos in aliam, et addo, ut hîc vides.

(*) Quippe cum fractio $\frac{a^3-a^2x}{ax+x^2}=\frac{a^3}{x^2+ax}-\frac{a^2}{a+x}$. Horum autem prior, $\frac{a^3}{x^2+ax}=\frac{a^3}{x^2}-\frac{a^4}{x^3}+\frac{a^5}{x^4}$ &c. pofterior $\frac{a^2}{a+x}=a-x+\frac{x^2}{a}-\frac{x^3}{a^2}$ &c. Cap. 1. § 4.

Dein

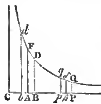
+0,0833333333333333	−0,0002790178571429
6250000000000	34679066051
271267361111	834465027
5135169396	26285354
144628917	961296
4954581	38670
190948	1663
7963	75
352	4
16	−0,0002825719389575
1	+0,0896109885646618
+0,0896109885646618	0,0893284166257043

Dein à summâ affirmativarum aufero summam negativorum, et restat 0,0893284166257043 quantitas areæ hyperbolicæ ADB, quam quærere oportuit.

33. Proponatur jam circulus ADF quam æquatio $\sqrt{x-xx}=z$ designat, hoc est, cujus diameter AF sit unitas, et è præcedentibus area ejus AdB erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ &c. In quâ serie cùm termini non differant à terminis seriei supra exprimentis aream hyperbolicam, nisi in signis + et −, nihil aliud agendum restat, quàm ut eosdem numerales terminos cum aliis signis nectamus, subducendo nempe connexas ambarum præfatarum Tabularum summas 0,0898935605036193 à primo termino duplicato 0,1666666666666666, et residuum 0,0767731061630473, erit areæ circularis portio AdB; posito scilicet AB quadrante diametri. Atque ita videre est, quòd etsi areæ Circuli et Hyperbolæ non conferantur ratione geometricâ, tamen utraque eodem computo arithmetico prodit. QUADRATURA CIRCULI.

34. Inventâ Circuli portione AdB, exinde tota area facilè eruitur. Nempe radio dc acto duc Bd, seu $\frac{1}{4}\sqrt{3}$, in BC, seu $\frac{1}{4}$; et facti dimidium $\frac{1}{32}\sqrt{3}$ seu 0,0541265877365275 valebit triangulum CdB; quod adde areæ AdB, et habebitur sector Acd = 0,1308996938995748; cujus sextuplum 0,7853981633974488 est area tota.

35. Et hinc obiter exit peripheriæ longitudo 3,141592653589793², dividendo nempe Aream per quadrantem Diametri.



I

36. Hisce calculum areæ inter Hyperbolam dFD et ejus asymptoton CA interceptæ subnectimus. Sit C centrum hyperbolæ, et positâ CA $=a$, AF $=b$, et AB $=$ A$b=x$; erit $\frac{ab}{a+x}=$ BD et $\frac{ab}{a-x}=bd$, et inde area AFDB $=bx-\frac{bx^2}{2a}+\frac{bx^3}{3a^2}-\frac{bx^4}{4a^3}$ &c. Et area AF$db=bx+\frac{bx^2}{2a}+\frac{bx^3}{3a^2}+\frac{bx^4}{}$

CAPUT IX. $\frac{b x^{8}}{4 a^{3}}$ &c. Ac earum summa bdDB$=2bx+\frac{2bx^{3}}{3a^{2}}+\frac{2bx^{5}}{5a^{4}}+\frac{2bx^{7}}{7a^{6}}$ &c.

Ponamus jam CA=AF=1, et Ab vel AB=$\frac{1}{10}$, existente cb=0,9, et CB=1,1; et substituendo hos numeros pro a, b, et x, primus seriei terminus evadet 0,2; secundus 0,00066666 &c. tertius 0,000004; et sic deinceps, ut vides in hâc Tabulâ.

	0,2000000000000000
	6666666666666
	4000000000
	285714286
	2222222
	18182
	154
	1
Summa	0,2006706954621511 = areæ bdDB

37. Quòd si areæ hujus partes Ad et AD seorsim desiderentur; subduc minorem DA è majori dA et restabit, $\frac{bx^{2}}{a}+\frac{bx^{4}}{2a^{3}}+\frac{bx^{6}}{3a^{5}}+\frac{bx^{8}}{4a^{7}}$ &c. Ubi si 1 scribatur pro a et b, ac $\frac{1}{10}$ pro x, termini, in decimales redacti, conficient sequentem Tabulam.

	0,0100000000000000
	50000000000000
	333333333333
	2500000000
	20000000
	166667
	1429
	14
Summa	0,0100503358535014 = Ad − AD

38. Jam si hæc arearum differentia addatur et auferatur summæ earum priùs inventæ, aggregati dimidium 0,1053605156578263 erit major area Ad; et residui dimidium 0,0953101798043248, minor AD.

39. Per easdem Tabulas obtinentur etiam areæ illæ AD et Ad, ubi AB et Ab ponantur $\frac{1}{100}$, sive CB=1,01 et cb=0,99 si modò numeri in depressiora loca debitè transferantur, ut hîc

	0,0200000000000000
	6666666667
	400000
	28
Summa	0,0200006667066695 = bdDB

	0,0001000000000000
	50000000
	3333
Summa	0,0001000050003333 = Ad − AD

videre est. $\frac{1}{2}$ aggregat 0,0100503358535014=Ad; $\frac{1}{2}$ resid. 0,0099503308531681=AD.

40. Et sic positis AB et Ab $\frac{1}{1000}$, seu CB=1,001, et cb=0,999, obtinebitur Ad=0,0010005003335835, et AD=0,0009995003330835.

41. Ad eundem modum si stantibus CA et AF=1, ponantur AB et Ab=0,2, vel =0,02, vel =0,002, eliciantur areæ illæ.

Ad=0,2231435513142097 et AD=0,1823215567939546
vel Ad=0,0202027073175194 et AD=0,0198026272961797
vel Ad=0,002002 et AD=0,001

42. Ex

42. Ex inventis hiſce areis jam facile eſt alias, per ſolam additionem et ſubductionem, derivare. Utpote cùm ſit $\frac{1,2}{0,8}$ in $\frac{1,2}{0,9}=2$, arearum pertinentium ad rationes $\frac{1,2}{0,8}$ et $\frac{1,2}{0,9}$ (hoc eſt, inſiſtentium partibus baſis $1,2-0,8$ et $1,2-0,9$) ſumma, $0,69314718055994 53$, erit area AF$\delta\beta$, exiſtente c$\beta=2$, ut notum eſt. Dein cùm ſit $\frac{1,2}{0,8}$ in $2=3$, arearum pertinentium ad $\frac{1,2}{0,8}$, et 2 ſumma, $1,0986122886681097$, erit area AF$\delta\beta$, exiſtente c$\beta=3$. Pariter cùm ſit $\frac{2 \text{ in } 2}{0,8}=5$, et 2 in $5=10$, per debitam arearum additionem obtinebitur $1,6094379124341004=$AF$\delta\beta$, exiſtente c$\beta=5$; et $2,3025850929940457=$AF$\delta\beta$, exiſtente c$\beta=10$. Atque ita cùm ſit $10\times 10=100$, et 10 in $100=1000$, et $\sqrt{5 \text{ in } 10 \text{ in } 0,98}=7$, et 10 in $1,1=11$, et $\frac{1000\times 1,001}{7\times 11}=13$, et $\frac{100\times 1,02}{2\times 3}=17$, et $\frac{1000\times 0,999}{3\times 3\times 3}=37$, et $100\times 1,01=101$, et $\frac{1000\times 1,002}{2\times 3}=167$, et $\frac{1000\times 0,998}{2}=499$, patet aream AF$\beta\delta$ per arearum ſuprà inventarum compoſitionem inveniri poſſe, exiſtente c$\beta=100; 1000; 7$; aut alio quolibet è recenſitis numeris, et ſtante AB$=$BF$=1$. Id quod ſignificare volui, ut methodus conſtruendo Logarithmum canoni aptiſſima pateret; quæ areas Hyperbolicas (ex quibus logarithmi facilè deducantur) tot numeris primis correſpondentes, quaſi per binas tantùm haud moleſtas operationes determinat. Cæterùm cùm canon iſte ex hoc fonte præ cæteris feliciter depromi videatur, quid ſi conſtructionem ejus, coronidis loco, perſtringam. AREÆ HYPERBOLICÆ.

43. IMPRIMIS itaque aſſumpto 0 pro logarithmo numeri 1, et 1 pro logarithmo numeri 10, ut ſolet, inveſtigandi ſunt logarithmi primorum numerorum, 2,3,5,7,11,13,17,37, dividendo inventas areas hyperbolicas per $2,3025850929940457$, aream nempe correſpondentem numero 10: vel, quod eodem recidit, multiplicando per ejus reciprocum $0,4342944819032518$. Sic enim *e. g.* Si $0,69314718$ &c. area correſpondens numero 2, multiplicetur per $0,43429$ &c. facit $0,3010299956639812$. Logarithmum numeri 2. LOGARITHMOTECHNIA.

44. Deinde logarithmi numerorum omnium in canone, qui ex horum multiplicatione fiunt, indagandi ſunt per additionem

CAPUT IX. eorum logarithmorum, ut solet: et loca vacua postmodum interpolanda, ope hujus Theorematis.

45. Sit n numerus logarithmo donandus, x differentia inter illum et proximos numeros hinc inde æqualiter distantes, quorum logarithmi habentur; ac d, semissis differentiæ logarithmorum: et quæsitus logarithmus numeri n obtinebitur addendo $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3}$ &c. logarithmo minoris numeri. Nam si numeri exponantur per cp, cβ, & CP, et existente rectangulo CBD vel c$\beta\delta = 1$ ut suprà, ac erectis parallelè incedentibus pq & PQ: si n scribatur pro cβ, et x pro βp vel βP, erit area pqQP, sive $\frac{2x}{n} + \frac{2x^3}{3n^3} + \frac{2x^5}{5n^5}$ &c. ad aream $pq\delta\beta$, sive $\frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3}$ &c. ut differentia inter logarithmos extremorum numerorum, sive $2d$, ad differentiam inter logarithmos minoris et medii: quæ proinde erit $\dfrac{\frac{dx}{n} + \frac{dx^3}{2n^3} + \frac{dx^5}{3n^5}}{\frac{x}{n} + \frac{x^3}{3n^3} + \frac{x^5}{5n^5}}$ &c. hoc est, factâ divisione, $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3}$ (6).

46. Hujus autem seriei duos primos terminos, $d + \frac{dx}{2n}$, pro canone construendo sat accuratos existimo, etiamsi adusque quatuordecim, vel forte quindecim figurarum loca logarithmi producerentur: si modò numerus logarithmo donandus non sit minor quàm 1000 (7). Quod sanè calculum haud difficilem præbere potest, siquidem x ut plurimùm erit unitas, vel numerus binarius. Non opus est tamen omnia loca beneficio hujus regulæ interpolare. Nam logarithmi numerorum, qui prodeunt è multiplicatione

LOGARITHMO-

(6) $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3} + \frac{7dx^5}{180n^5} + \frac{181dx^7}{7560n^7} + \frac{1903dx^9}{113400n^9}$ &c.

(7) ALIAM seriem acutissimus Halleius excogitavit, quæ in exiguis etiam numeris mirâ celeritate ad metam properat.

Sit $a + e$ numerus cujus logarithmus exquirendus est, datis numerorum a, $a + 2e$ logarithmis. Propter datos numerorum a, $a + 2e$, logarithmos, data erit summæ illorum semissis, quæ dicatur A. Erit A numeri $\sqrt{a^2 + 2ae}$ logarithmus. Numerus autem $a + e$, numero $\sqrt{a^2 + 2ae}$ major erit; duorum scilicet, a, $a + 2e$, arithmeticè medius eorundem geometricè medio. Logarithmus igitur numeri $a + e$ logarithmo dato A major erit. Differentia sit z. Erit igitur A $+ z$ numeri $a + e$ logarithmus, cujus datâ parte A, si pars reliqua z inventa fuerit, logarithmus totus definitus erit. Est autem z logarithmus rationis numeri $\sqrt{a^2 + 2ae}$ ad numerum $a + e$. Ponatur $y^2 = 2 \times a \times \overline{a + 2e} + e^2 = 2a^2 + 4ae + e^2$. Erit igitur $y^2 - e^2 = 2 \times \overline{a^2 + 2ae}$; et $y^2 + e^2 = 2 \times \overline{a + e}|^2$. Ergo $\sqrt{y^2 - e^2} : \sqrt{y^2 + e^2} = \sqrt{a^2 + 2ae} : a + e$. Quare z logarithmus erit rationis quam $\sqrt{y^2 - e^2}$ habet ad $\sqrt{y^2 + e^2}$, et $2z$ logarithmus rationis quam $y^2 - e^2$ habet ad $y^2 + e^2$. Jam sit CA $= y^2$, AB et A$b = e^2$.

tiplicatione vel divifione numeri noviffimè tranfacti, per numeros, quorum logarithmi priùs habebantur, obtineri poffunt per additionem vel fubductionem eorum logarithmorum. Quinetiam per differentias logarithmorum, et illarum differentiarum fecundas differentias tertiafque, fi opus eft, loca vacua expeditiùs impleri poffunt, adhibitâ tantùm prædictâ regulâ, ubi ad obtinendum illas differentias continuatio aliquot locorum plenorum defideratur. LOGARITHMOTECHNIA.

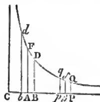
47. Eâdem methodo regulæ pro intercalatione logarithmorum inveniri poffunt, ubi è tribus numeris dantur logarithmi minoris & medii, vel medii et majoris; idque licet numeri non fint in arithmeticâ progreffione.

48. Imo et hujus methodi veftigiis infiftendo, regulæ, pro conftruendis artificialium finuum et tangentium Tabulis, fine adminiculo naturalium, haud difficulter depromi poffunt. Sed hæc in tranfitu.

CAPUT DECIMUM.

1. HACTENUS Curvarum, quæ per æquationes minùs fimplices definiuntur, quadraturam, mediante reductione in æquationes ex infinitè multis terminis fimplicibus conftantes, oftendimus. Cùm vero ejufmodi Curvæ per finitas etiam æquationes nonnunquam quadrari poffint, vel faltem comparari cum aliis Curvis, quarum areæ quodammodo pro cognitis habeantur, quales funt fectiones conicæ: ea propter fequentes duos Theo-

$Ab = e^2$. Et rectangulo CA × AF exiftente = 1, erit AF $= \frac{1}{y^2}$. Tum hifce e^2, y^2, $\frac{2}{y^2}$ pro illis x, TEC a, b in feriem Newtonianam fubftitutis, efficietur area BD$db = \frac{2e^2}{y^2} + \frac{2e^6}{3y^6} + \frac{2e^{10}}{5y^{10}} + \frac{2e^{14}}{7y^{14}}$ &c. Et hanc feriem fi in modulum fyftematis Briggiani multiplicaveris, logarithmum effeceris Briggianum rationis ejus quam Cb habet ad CB, five ejus quam $y^2 - e^2$ habet ad $y^2 + e^2$, hoc eft logarithmum $2z$.



$$\text{Ergo } 2z = \frac{2e^2}{y^2} + \frac{2e^6}{3y^6} + \frac{2e^{10}}{5y^{10}} + \frac{2e^{14}}{7y^{14}} \text{ \&c.} \times 0{,}4342944 \text{ \&c.}$$

$$\text{Ergo } z = \frac{e^2}{y^2} + \frac{e^6}{3y^6} + \frac{e^{10}}{5y^{10}} + \frac{e^{14}}{7y^{14}} \text{ \&c.} \times 0{,}43429 \text{ \&c.}$$

$$\text{Et logarithmus numeri } a+e = 0{,}43429 \text{ \&c.} \times \overline{\frac{e^2}{y^2} + \frac{e^6}{3y^6} + \frac{e^{10}}{5y^{10}} \text{ \&c.}} + A.$$

Vel fi e fit unitas, quod plerumque ufuveniet, logarithmus numeri $a + 1 = 0{,}43429 \text{ \&c.} \times \overline{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{3y^6} + \frac{1}{5y^{10}} \text{ \&c.}} + A$. Q. E. I.

 rematum

 rematum Catalogos, in illum usum ope Propositionis VII^{a} et VIII^{a}, ut promisimus, constructos, jam visum est adjungere.

2. Horum prior exhibet areas Curvarum quæ quadrari possunt; et posterior complectitur Curvas, quarum areas cum areis conicarum sectionum conferre liceat.

3. In utrisque literæ Latinæ *d*, *e*, *f*, *g* et *h*, datas quasvis quantitates, *x* et *z* bases curvarum, *v* et *y* parallelè incedentes, et *s* ac *t* areas, ut suprà denotant. Græcæ autem, η et θ, quantitati z suffixæ denotant ejusdem z dimensionum numerum, sive sit integer vel fractus, sive affirmativus aut negativus. Veluti si sit $\eta=3$, erit $z^{\eta}=z^{3}$, $z^{2\eta}=z^{6}$, $z^{-\eta}=z^{-3}$ sive $\frac{1}{z^{3}}$, $z^{\eta+1}=z^{4}$, et $z^{\eta-1}=z^{2}$.

4. Insuper in valoribus arearum, abbreviandi causâ, scribitur R vice radicalis illius $\sqrt{e+fz^{\eta}}$, vel $\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}$, quâ valor incedentis *y* afficitur.

Catalogus

Catalogus Curvarum aliquot ad Rectilineas Figuras relatarum, ope Prob. VII. *Constructus.*

CURVARUM ORD.			AREARUM VALORES
I		$dz^{\eta-1}=y$	$\frac{d}{\eta}z^{\eta}=t$
II		$\frac{dz^{\eta-1}}{ee+2efz^{\eta}+ffz^{2\eta}}=y$	$\frac{dz^{\eta}}{\eta ee+\eta efz^{\eta}}=t$, vel $\frac{-d}{\eta ef+\eta ffz^{\eta}}=t$
III	1	$dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{2d}{3\eta f}R^{3}=t$
	2	$dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{-4e+6fz^{\eta}}{15\eta f^{2}}dR^{3}=t$
	3	$dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{16e^{2}-24efz^{\eta}+30f^{2}z^{2\eta}}{105\eta f^{3}}dR^{3}=t$
	4	$dz^{4\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{-96e^{3}+144e^{2}fz^{\eta}-180ef^{2}z^{2\eta}+210f^{3}z^{3\eta}}{945\eta f^{4}}dR^{3}=t$
IV	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{2d}{\eta f}R=t$
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{-4e+2fz^{\eta}}{3\eta f^{2}}dR=t$
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{16e^{2}-8efz^{\eta}+6f^{2}z^{2\eta}}{15\eta f^{3}}dR=t$
	4	$\frac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{-96e^{3}+48e^{2}fz^{\eta}-36ef^{2}z^{2\eta}+30f^{3}z^{3\eta}}{105\eta f^{4}}dR=t$

5. His adjiciantur ſequentia magis Generalia Theoremata, quibus via ad altiora ſternitur.

Ponatur p pro $\sqrt{b+iz^{\eta}}$

6. Poſſint

CAPUT X.

V	1	$\begin{matrix}2\theta e z^{\theta-1} + 2\theta f \\ +3\eta f\end{matrix} z^{\theta+\eta-1} \times \tfrac{1}{3}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$z^{\theta}R^{3} = t$
	2	$\begin{matrix}2\theta e z^{\theta-1} + 2\theta f \\ +3\eta f\end{matrix} z^{\theta+\eta-1} + \begin{matrix}2\theta g \\ +6\eta g\end{matrix} z^{\theta+2\eta-1} \text{ in } \tfrac{1}{3}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} = y$	$z^{\theta}R^{3} = t$
VI	1	$\frac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta+\eta}\times f z^{\theta+\eta-1}}{2\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$z^{\theta}R = t$
	2	$\frac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta+\eta}\times f z^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+2\eta}\times g z^{\theta+2\eta-1}}{2\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}} = y$	$z^{\theta}R = t$
VII	1	$\frac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta+\eta}\times f z^{\theta+\eta-1}}{e+fz^{\eta} \text{ in } 2\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{z^{\theta}}{R} = t$
	2	$\frac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta+\eta}\times f z^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+2\eta}\times g z^{\theta+2\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta} \text{ in } 2\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}} = y$	$\frac{z^{\theta}}{R} = t$
VIII	1	$\frac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta+2\eta}\times f z^{\theta+\eta-1}}{ee+2efz^{\eta}+f^{2}z^{2\eta}} = 2y$	$\frac{z^{\theta}}{R^{2}}$ (sive $\frac{z^{\theta}}{e+fz^{\eta}}$) $= t$
	2	$\frac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta+2\eta}\times f z^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+4\eta}\times g z^{\theta+2\eta-1}}{e^{2}+2efz^{\eta}+\overline{f^{2}+2eg}\times z^{2\eta}+2fgz^{3\eta}+ggz^{4\eta}} = 2y$	$\frac{z^{\theta}}{R^{2}}$ (sive $\frac{z^{\theta}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}$) $= t$
IX		$2\theta eb z^{\theta-1} + \begin{matrix}\overline{2\theta+3\eta}\times fb \\ +\overline{2\theta+\eta}\times ei\end{matrix} z^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+4\eta}\times fi z^{\theta+2\eta-1} \text{ in } \frac{\sqrt{e+fz^{\eta}}}{2\sqrt{b+iz^{\eta}}} = y$	$z^{\theta}R^{3}p = t$
X		$2\theta eb z^{\theta-1} + \begin{matrix}\overline{2\theta+3\eta}\, fb \\ +\overline{2\theta+\eta}\times ei\end{matrix} z^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+2\eta}\times fi z^{\theta+2\eta-1} \text{ in } \frac{\sqrt{e+fz^{\eta}}}{b+iz^{\eta} \text{ in } 2\sqrt{b+iz^{\eta}}} = y$	$\frac{z^{\theta}R^{3}}{p} = t$

6. Possint et hujusmodi alia adjici, sed ad alterius generis Curvas, quæ cum conicis sectionibus conferri possunt, jam transeo. Et in hoc Catalogo expositam curvam lineâ QEχR designatam habes, cujus basis principium sit A; basis AC, parallelè incedens CE, areæ principium αχ, et area descripta αχεC. Ejus autem areæ principium sive terminus initialis (quod ut plurimùm vel basis principio A insistit, vel ad infinitam distantiam recedit) invenitur, quærendo basis longitudinem, Aα, cùm areæ valor nullus est, et erigendo normalem αχ.

(ε) Colsoni verissimam emendationem sequor. Codices MSS. habent 868, Vitiosè. Confer Librum de Quad. Curv. not. (°°).

7. A'

7. Ad eundem modum conicam fectionem habes defignatam lineâ SDG, (*Vide Librum, De Quad. Curv. Tab.* II. *fig.* 1, 2, 3, 4.) cujus centrum fit A, vertex a, rectangulæ femidiametri Aa & AP: bafis principium A, vel a, vel α; bafis AB, vel aB, vel αB: ordinatim applicata BD, tangens TD occurrens AB in T, fubtenfa aD, et infcriptum vel afcriptum rectangulum ABDO. De Tabula Curvarum Secunda.

8. Itaque retentis jam antè definitis literis, erit AC$=z$, CE$=y$, $\alpha\chi$EC$=t$, AB vel aB$=x$, BD$=v$ & ABDP vel aGDB$=s$. Et prætérea, fiquando ad alicujus areæ determinationem duæ conicæ fectiones requiruntur, pofterioris area dicetur σ, bafis ξ, et parallelè incedens Υ.

Catalogus Curvarum aliquot ad Conicas fectiones relatarum ope Prob. VIII. *conftructus.* Vide Tab. II. Libri de Quad. Curv.

9. Antequam Theoremata, in his Curvarum claffibus tradita, exemplis illuftrare pergam, juvabit obfervare

I. Quòd cùm quantitatum d, e, f, g, h & i figna omnia, in æquationibus curvas definientibus, affirmativa pofuerim; fiquando contingant effe negativa, in fubfequentibus bafis et incedentis lineæ fectionis conicæ, necnon quæfitæ areæ valoribus mutari debent.

II. Numeralium η & θ, ubi negativæ funt, figna in arearum valoribus funt etiam mutanda. Quinetiam ipfarum fignis mutatis Theoremata novam formam inducere poffunt. Sic in quartâ formâ pofterioris Catalogi, Theorema tertium, figno ipfius η mutato, evadit $\frac{d}{z^{-2\eta+\iota}\sqrt{e+fz^{-\eta}}}=y$, $\frac{1}{z^{-\eta}}=x$ &c. hoc eft $\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{ez^{2\eta}+fz^{\eta}}}=y$, $z^{\eta}=x$, $\sqrt{fx+ex^2}=v$, $\frac{d}{\eta}$ in $2xv-3s=t$, & fic in aliis.

III. Cujufque ordinis (fi fecundum prioris Catalogi demas) feries utrinque in infinitum continuari poteft. Scilicet in tertii quartique ordinis feriebus prioris Catalogi, numeri coefficientes initialium terminorum, 2,−4, 16,−96, 768 (*) &c. generantur multiplicando numeros −2,−4,−6,−8,−10, &c. in fe continuò (*); et fubfequentium terminorum coefficientes ex initialibus in tertio ordine derivantur, multiplicando gradatim per $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{4}$, $-\frac{7}{6}$, $-\frac{9}{8}$, $-\frac{11}{10}$, &c. vel in quarto ordine, multiplicando per $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{6}$, $-\frac{7}{8}$, $-\frac{9}{10}$, &c. Denominatorum verò coefficientes, 1, 3, 15, 105, &c.

(*) Vide Librum de Quadratura Curvarum, not. (*).

ex

 ex ductu numerorum 1, 3, 5, 7, 9, &c. in se gradatim oriuntur.

In secundo autem Catalogo series ordinum, Primi, Secundi, Quinti, Sexti, Noni & Decimi, ope solius divisionis infinitè producuntur. Sic habito $\frac{dz^{4\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$, si divisionem ad usque convenientem periodum instituas, orietur E. g. $\frac{d}{f}z^{3\eta-1}-\frac{de}{ff}z^{2\eta-1}+\frac{de^2}{f^3}z^{\eta-1}-\frac{\frac{de^3}{f^3}z^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$. Priores tres termini sunt primi ordinis prioris Catalogi, et quartus primæ speciei hujus ordinis ([u]). Unde constat aream valere $\frac{d}{3\eta f}z^{3\eta}-\frac{de}{2\eta f^2}z^{2\eta}+\frac{de^2}{\eta f^3}z^{\eta}-\frac{e^3}{\eta f^3}s$; positâ nempe s areâ sectionis conicæ, cujus basis x sit $=z^{\eta}$, et incedens applicata $v=\frac{d}{e+fx}$.

Tertii autem septimique ordinis series, ope duorum Theorematum in quinto ordine prioris Catalogi, per debitam additionem vel subductionem infinitè producuntur; ut et quarti octavique series, ope theorematum in subsequenti sexto ordine; ac undecimi series ope theorematis in decimo ordine ejusdem prioris catalogi. E. G. Si præfati tertii ordinis series ultrà producenda sit, finge $\theta=-4\eta$; & quinti ordinis alterius Catalogi Theorema primum evadet, $-8\eta e z^{-4\eta-1}-5\eta f z^{-3\eta-1}$ in $\frac{1}{2}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$. $\frac{R^3}{z^{4\eta}}=t$. Est autem juxta quartum theorema hujus producendæ seriei, (scripto $-\frac{5\eta f}{2}$ pro d) $-\frac{5\eta f}{2}z^{-3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$. $\frac{1}{z^{\eta}}=x$. $\sqrt{fx+ex^2}=v$. & $\frac{10fv^3-15f^2s}{12e}=t$. Quare subductis prioribus ipsarum y, ac t, valoribus, restabunt $4\eta e z^{-4\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$. et $\frac{10fv^3-15f^2s}{12e}-\frac{R^3}{z^{4\eta}}=t$. Ipsisque in $\frac{d}{4\eta e}$ ductis, et pro $\frac{R^3}{z^{4\eta}}$ scripto si placet xv^3, emerget quintum producendæ seriei Theorema, $\frac{d}{z^{4\eta+1}}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$. $\frac{1}{z^{\eta}}=x$. $\sqrt{fx+exx}=v$, & $\frac{10dfv^3-15df^2s}{48\eta e^2}-\frac{dxv^3}{4\eta e}=t$.

IV. Horum ordinum nonnulli ex aliis etiam possunt aliter derivari: utpote in posteriori Catalogo Tertius, Quartus, Septimus et Undecimus, ab Octavo, ac Nonus à Decimo. Adeo ut omisisse potuissem, nisi quòd usui esse possint, quamvis non prorsus necessarii. Nonnullos tamen ordines omisi, quos à primo et se-

([u]) Intellige, primæ speciei primi ordinis posterioris Catalogi.

cundo,

cundo, nec non à nono decimoque derivasse potuissem; utpote qui denominatoribus magis compositis afficiuntur, & proinde vix ulli unquam usui esse possunt. De Tabula Curvarum Secunda.

V. Si Curvæ alicujus definiens æquatio ex pluribus æquationibus diversorum ordinum, vel diversarum specierum ejusdem ordinis componatur, ejus aream ex areis correspondentibus componere oportet: cavendo tamen ut signis + et − rectè connectantur. Nam parallelè incedentes parallelè incedentibus, et areæ correspondentes correspondentibus areis non semper sunt simul addendæ, vel simul subducendæ; sed aliquando harum summa, et illarum differentia sumendà est pro novà lineà incedente, et areà correspondente, constituendâ. Et hoc fieri debet, cùm constituentes areæ positæ sunt ad diversam partem parallele incedentis. Ut autem hoc incommodum cauti promptiùs devitare possint, singulis arearum valoribus propria signa, etiamsi nonnunquam negativa, ut sit in posterioris Catalogi tertio quartoque ordine præfixi.

VI. De arearum signis observandum est præterea, quod $+s$ vel denotat aream conicæ sectionis, basi adjacentem, esse reliquis quantitatibus in valore t addendam (vide Exem. 1. sequ.) vel aream ex alterà parte ordinatim applicatæ esse subducendam. Et contrà, $-s$ ambiguè denotat aream, basi adjacentem, esse subducendam, vel aream, ex alterà parte ordinatim applicatæ, esse addendam; prout commodum videbitur. Deinde valor ipsius t, si affirmativus prodierit, designat aream Curvæ propositæ adjacentem basi ejus; et contrà, si fuerit negativus, designat aream ex alterà parte ordinatim applicatæ.

VII. Cæterùm ut area illa certiùs definiatur, prospiciendum est de limitibus ejus. Et quidem limitum ad basin, parallelè incedentem, et Curvæ perimetrum, nulla potest esse incertitudo: sed limes initialis, sive principium à quo incipit descriptio ejus, varias positiones obtinet. In sequentibus exemplis vel est ad initium basis, vel ad infinitam distantiam; vel in concursu Curvæ cum basi ejus. Sed potest alibi locari. Et ubicunque sit, invenies quærendo illam basis longitudinem, ad quam valor ipsius t evadit nullus; et parallelè incedentem erigendo. Nam erecta illa linea erit limes quæsitus.

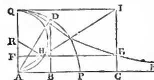
(e) Vide Analysin per Æquationes numero terminorum infinitas, C. 11. § 6.

CAPUT X. VIII. Siqua pars areæ infra bafin pofita fit, t defignabit differentiam ejus et partis fupra bafin.

IX. Siquando dimenfiones terminorum in valoribus x, v & t. nimis altæ vel nimis depreffæ obvenerint, ad juftum gradum liceat reducere, dividendo vel multiplicando toties per datam quamvis quantitatem, quæ vices unitatis gerere fingitur, quoties dimenfiones illæ fint jufto altiores, vel depreffiores.

X. Præter præcedentes Catalogos poffunt etiam catalogi Curvarum ad alias curvas, in fuo genere fimpliciffimas, (ut ad $\sqrt{e+fx^3}=v$, vel ad $x\sqrt{e+fx^3}=v$, vel ad $\sqrt{e+fx^4}=v$, &c.) relatarum conftrui; eò ut Curvæ cujuflibet propofitæ aream ex origine fimpliciffimâ poffimus derivare, et cum quibus Curvis affinitatem habeat cognofcere. Cæterùm præcedentes tandem Exemplis aliquot illuftremus.

10. EXEMPL. 1. Sit QER ejufmodi Conchoidalis, ut, femicirculo QHA defcripto, et ad diametrum AQ erecto AC perpendiculo; fi compleatur parallelogrammum QACI, et agatur diagonalis AI femicirculo occurrens in H, et ab H demittatur ad IC normalis HE, punctum E incidat in Curvam; et quæratur area ACEQ.



Dic itaque AQ$=a$, AC$=z$, CE$=y$; et propter continuè proportionales AI, AQ, AH, EC, erit EC, five y, $=\frac{a^3}{a^2+z^2}$.

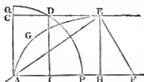
Jam ut hæc induat formam æquationum in Catalogis, finge $\eta=2$, & pro z^2 in denominatore fcribe z^η, ac $a^3z^{\frac{1}{2}\eta-1}$ pro a^3, five a^3z^{1-1}, in numeratore, et emerget $y=\frac{a^3z^{\frac{1}{2}\eta-1}}{a^2+z^\eta}$, æquatio primæ fpeciei fecundi ordinis pofterioris Catalogi; collatifque terminis, fiet $d=a^3$, $e=a^2$ & $f=1$. Adeoque $\sqrt{\frac{a^3}{a^2+z^2}}=x$, $\sqrt{a^3-a^2x^2}=v$, & $xv-2s=t$.

Ut autem inventi valores x & v, ad juftum dimenfionum numerum reducantur: felige datam quamlibet quantitatem, velut a; per quam, tanquam unitatem, femel multiplicetur a^3 in valore x, et in valore v dividatur a^3 femel, et a^2x^2 bis; et hoc pacto obtinebis $\sqrt{\frac{a^4}{a^2+x^2}}=x$, $\sqrt{a^2-x^2}=v$, & $xv-2s=t$. Quorum conftructio eft ejufmodi. Centro

Centro A intervallo AQ, describe quadrantem circuli QDP. In AC cape AB=AH. Erige normalem BD quadranti occurrentem in D, et age AD; et sectoris ADP duplum æquabitur areæ quæsitæ ACEQ. Est enim $\sqrt{\frac{a^4}{a^2+z^2}}$ ($=\sqrt{AQ \times EC} = HA$) $= AB$ sive x: et $\sqrt{a^2-x^2}$ ($=\sqrt{AD^2-AB^2}$) $= BD$ sive v; et $xv-2s=2\Delta ADB-2ABDQ$; vel etiam $=2\Delta ADB+2BDP$, hoc est, vel$=-2QAD$, vel$=2DAP$: quorum valorum affirmativus 2DAP competit areæ ACEQ citra EC, et negativus 2QAD competit areæ RECR, ultra EC, in infinitum protensæ. Curvæ cum Conicis comparandæ.

11. Solutiones problematum sic inventæ nonnunquam concinnari possunt. Sic in hoc casu, actâ RH circuli QHA semidiametro, propter arcus QH, DP æquales, erit sector QRH dimidium sectoris DAP; atque adeo pars quarta superficiei ACEQ. Nam si à puncto D demittatur perpendicularis ad AQ erit ista sinus anguli QAD in quadrante QDP. Erit etiam, ob parallelas DB, QA, æqualis AB=AH chordæ ang. ([f]) Consequenter arcus QD in quadrante = arcui AH in semicirculo: unde constat arcus QH, DP æquales esse.

12. EXEMPL. 2. Sit AGE Curva, quam normæ, AEF, punctum angulare, E, describit, dum crurum alterum, AE, interminatum continuò transit per datum punctum A, & alterum EF, datæ longitudinis, super rectâ AF, positione datâ, prolabitur. Demitte EH ad AF normalem, et comple parallelogrammum AHEC, ac dictis $AC=z$, $CE=y$, & $EF=a$, propter HF, HE, HA continuò proportionales, erit HA sive $y=\frac{z^2}{\sqrt{a^2-z^2}}$.

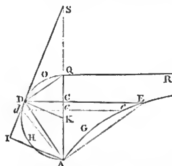


Jam ut innotescat area AGEC, finge $z^2=z^\eta$ sive $2=\eta$; et inde fiet $\frac{z^{3\eta-1}}{\sqrt{a^2-z^{\eta}}}=y$. Ubi cùm z sit fractæ dimensionis in numeratore, deprime valorem y, dividendo per z'^{η}, et fiet $\frac{z^{\eta-1}}{\sqrt{a^2z^{-\eta}-1}}=y$: æquatio secundæ speciei quarti ordinis posterioris Catalogi. Ac terminis collatis evadet $d=1$, $e=-1$ et $f=a^2$. Adeoque z^2 ($=\frac{1}{z^{-\eta}}$) $=x^2$. $\sqrt{a^2-x^2}=v$, & $s-xv=t$. Cùm itaque x et z æquentur, et sit $\sqrt{a^2-x^2}=v$, æquatio ad circulum cujus diameter est a: centro A intervallo a, sive EF, describatur circulus PDQ, cui occurrat CE

([f]) Anguli QHA in semicirculo QHA.

Caput X. in D, et compleatur parallelogrammum ACDI; eritque $AC = z$, $CD = v$ & area quæsita AGEC $(= s - xv = ACDP - ACDI) = IDP$.

13. Exempl. 3. Sit AGE Ciſſois, ad circulum ADQ, diametro AQ deſcriptum, pertinens. Agatur DCE diametro normalis, et Curvis occurrens in D et E. Et nominatis $AC = z$, $CE = y$, & $AQ = a$; propter CD, CA, CE continuè proportionales, erit CE, ſive $y, = \frac{zz}{\sqrt{az - zz}}$; ac dividendo per z, ſit $y = \frac{z}{\sqrt{az^{-1} - 1}}$. Eſt itaque $z^{-1} = z^{\eta}$ ſive $-1 = \eta$; et inde $y = \frac{z^{-2\eta - 2}}{\sqrt{az^{\eta} - 1}}$; æquatio tertiæ ſpeciei quarti ordinis poſterioris Catalogi. Collatiſque terminis ſit $d = 1$, $e = -1$, & $f = a$. Adeoque $z \; (= \frac{1}{z^{\eta}}) = x$, $\sqrt{ax - xx} = v$, & $3s - 2xv = t$. Quare eſt $AC = x$, $CD = v$, et inde $ACDH = s$, adeoque $3ACDH - 4\Delta ADC \; (= 3s - 2xv = t)$ = areæ ciſſoidali ACEGA. Vel quod perinde eſt, 3 ſegment. ADHA = areæ ADEGA, ſive 4 ſegment. ADHA = areæ AHDEGA.



14. Exempl. 4. Eſto PE Prima Conchoides Veterum, centro G, aſymptoto AL, et intervallo LE deſcripta; age GAP axem ejus, ac demitte EC ordinatim applicatam: dictiſque $AC = z$, $CE = y$, $GA = b$ &, $AP = c$; propter proportionales $AC : CE - AL :: GC : CE$, erit CE ſive $y = \frac{b + z}{z} \sqrt{c^2 - z^2}$ (r). Jam ut ejus area PEC exhinc inveniatur, partes applicatæ CE, ſeorſim conſiderandæ ſunt. Et quidem ſi illa CE ita dividatur in D, ut ſit $CD = \sqrt{c^2 - z^2}$, ac $DE = \frac{b}{z} \sqrt{c^2 - z^2}$ erit CD ordinatim applicata circuli centro A et intervallo AP deſcripti: adeoque pars areæ PDC innoteſcet, et reſtabit pars altera DPED invenienda.

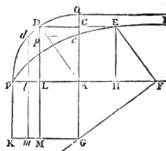
Cùm

(r) Propter $EL : EG = AC : CG$, erit $EG = \frac{EL \times CG}{AC}$, hoc eſt $EG = c \times \frac{b + z}{z}$. Quare $EG^2 =$

Cùm itaque DE (pars applicatæ quâcum defcribitur) valeat $\frac{b}{z}\sqrt{c^2-z^2}$ fuppone $2=\eta$, et evadet $\frac{b}{z}\sqrt{c^2-z^\eta}=$ DE, æquatio primæ fpeciei tertii ordinis pofterioris Catalogi. Collatifque terminis fiet $d=b$, $e=c^2$ et $f=-1$. Atque adeo $\frac{1}{z}=\sqrt{\frac{1}{z^2}}=x$; $\sqrt{-1+c^2x^2}=v$, et $2bc^2s-\frac{bv^3}{x}=t$. His inventis, redige ad juftum dimenfionum numerum, multiplicando terminos nimis depreffos, ac dividendo nimis altos per datam quamvis quantitatem. Id quod fi fiet per c, prodibit $\frac{c^2}{z}=x$, $\sqrt{-c^2+x^2}=v$, et $\frac{2bs}{c}-\frac{bv^3}{cx}=t$. Et horum conftructio eft ejufmodi. Curvæ cum Conicis Comparandæ.

Centro A, vertice principali P & parametro 2AP Hyperbolam PK defcribe: deinde à puncto C age rectam CK quæ tangat hyperbolam in K, et erit ut AP ad 2AG ita area CKPC ad aream quæfitam DPED.

15. Exempl. 5. Normâ GFE ita circa polum G rotante, ut ejus punctum angulare F fuper rectâ AF, pofitione datâ, continuò prolabatur: concipe Curvam PE à puncto quolibet E in crure EF fito defcribi. Jam ut inveniatur hujus area, demitte GA & EH ad rectam AF perpendiculares; et, completo parallelogrammo AHEC, dic AC$=z$, CE$=y$, AG$=b$ & EF$=c$: et propter proportionales HF:EH::AG:AF, erit AF $=\frac{bz}{\sqrt{c^2-z^2}}$: adeoque CE, five y, $=\frac{bz}{\sqrt{c^2-z^2}}-\sqrt{c^2-z^2}$. Cùm autem $\sqrt{c^2-z^2}$ fit ordinatim applicata circuli, femidiametro c defcripti circa centrum A, defcribe talem circulum PDQ; eique CE producta occurrat in D, et erit DE $=\frac{bz}{\sqrt{c^2-z^2}}$; cujus æquationis ope reftat area PDEP, vel DERQ, determinanda. Supponatur ergo $\eta=2$ et evadet DE $=\frac{bz^{\eta-1}}{\sqrt{c^2-z^\eta}}$ æquatio primæ fpeciei quarti ordinis prioris Catalogi: et collatis terminis fiet $b=d$, $c^2=e$ & $-1=f$; adeoque $b\sqrt{c^2-z^2}\,(=-b\text{R})=t$.



EG$^2=\overline{\frac{b+z}{z}}\big|^2\times c^2$. Sed CG$^2=\overline{\frac{b+z}{z}}\big|^2\times z^2$. Quare CE$^2=$ EG$^2-$CG$^2=\overline{\frac{b+z}{z}}\big|^2\times c^2-z^2$. Et CE $=\frac{b+z}{z}\sqrt{c^2-z^2}$.

Jam

Caput X. Jam cùm valor t negativus existat, et inde area per t designata jaceat ultra lineam DF, ut ejus limes initialis inveniatur, quære illam ipsius z longitudinem, quâ t evadit nulla: et invenies esse c. Quare produc AC ad Q ut sit AQ$=c$, et erige applicatam QR, et erit DQRED area illa cujus valor jam inventus est $=-b\sqrt{c^2-z^2}$. Quòd si quantitatem areæ PDE juxta basin AC positæ, et cum eâ coextensæ desideres, possis, ignoto limite QR, sic determinare. A valore quem t ad basis longitudinem AC sortita est, subduc valorem ejus ad initium basis hoc est, $a-b\sqrt{c^2-z^2}$ subduc $-bc$, et proveniet quantitas $bc-b\sqrt{c^2-z^2}$ quam quæris. Comple ergo parallelogrammum PAGK, et ad AP demitte normalem DM, quæ cum GK occurrat in M, et erit parallelogrammum PMNK æquale areæ PDE.

16. Siquando æquatio Curvam aliquam definiens non reperiatur in Catalogis, neque ad simpliciores terminos ope divisionis, vel alio pacto, reduci possit, transformanda est in alias affinium Curvarum æquationes, pro more in Prob. VIII. ostenso; donec tandem obvenerit aliqua, cujus area ex catalogis innotescat. Et conatibus omnimodò institutis, si nulla talis obveniat, certum est Curvam propositam neque cum figuris rectilineis, neque cum conicis sectionibus, comparari posse.

17. Ad eundem modum cùm de Curvis Mechanicis agitur, illæ imprimis transformandæ sunt in æquales Geometricas, prout in eodem Prob. VIII. ostensum fuit, ac deinde Geometricarum areæ ex Catalogis eliciendæ. Cujus rei accipe sequens exemplum.

18. Exempl. 6. Proponatur figura arcuum cujusvis conicæ sectionis ad sinus rectos applicatorum determinanda. Utpote sit A centrum conicæ sectionis, AQ et AR semiaxes, CD ordinatim applicata ad axem AR, et PD perpendiculum ad punctum D. Sit etiam AE dicta figura mechanica occurrens CD in E, et ex ejus naturâ præfinita erit CE$=$ arcui QD. Quæritur itaque area AEC, vel parallelogrammo ACEF completo, quæritur excessus AEF. In quem finem sit a latus rectum conicæ sectionis et b latus transversum sive 2AQ; sit etiam AC$=z$ & CD$=y$ eritque $\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}z^2}=y$

(c) Hamilton. Conic. Lib. 2. Prop. XXIV.

æquatio

æquatio ad conicam fectionem, ut notum eft. Erit etiam PC $= \frac{b}{a} z$ (*) et inde PD $= \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b^2+ab}{a^2} z^2}$.

Curvæ cum Conicis Comparandæ.

Atque adeo cùm fit fluxio arcûs QD ad fluxionem bafis AC, ut PD ad CD, fi fluxio bafis fupponatur 1, erit arcûs illius QD five applicatæ CE fluxio $=$

$\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b^2+ab}{a^2} z^2}{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b}{a} z^2}}$. Hanc duc in FE, five z, et proveniet $z\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b^2+ab}{aa} z^2}{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b}{a} z^2}}$ fluxio areæ AEF; adeoque fi in applicatâ DC capias CG $= z\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b^2+ab}{a^2} z^2}{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b}{a} z^2}}$, area AGC, quam illa CG fuper AC incedens defcribet, æquabitur areæ AEF; et erit AG Curva Geometrica. Quæritur itaque area AGC. Et in hunc finem fubftituatur z^n pro z^2 in æquatione noviffimâ, et evadet $z^{n-1}\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b^2+ab}{a^2} z^n}{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b}{a} z^n}}$ $=$ CG; æquatio fecundæ fpeciei undecimi ordinis pofterioris Catalogi. Et collatis utrobique terminis, fit $d = 1$, $e = \frac{1}{4}b^2 = g$, $f = \frac{b^2+ab}{a^2}$, et $b = \frac{b}{a}$; adeoque $\sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b}{a} z^2} = x$ et $\sqrt{-\frac{b^2}{4a} + \frac{a+b}{a} x^2} = v$. & $\frac{a}{b} s = t$. Hoc eft CD $= x$, DP $= v$ et $\frac{a}{b} s = t$. Et inventorum talis eft conftructio.

Ad Q erige QK perpendicularem et æqualem QA, et huic parallelam, æqualem verò DP, age HI per punctum D. Et linea KI, in quam HI terminatur, erit fectio conica, areaque comprehenfa HIKQ ad aream quæfitam AEF, ut b ad a, five ut PC ad AC.

19. Nota

CAPUT X. 19. Nota si mutes signum b, sectio conica cujus arcui recta CG æquatur, evadet Ellipsis: et præterea si fiat $b=-a$ Ellipsis evadet Circulus: in quo casu linea KI fit recta parallela AQ.

20. POSTQUAM Curvæ alicujus area sic inventa fuerit, de constructionis demonstratione consulendum est, quâcum sine computo algebraico, quantùm liceat, contextâ ornetur Theorema, ut evadat publicæ notitiæ dignum (e). Estque demonstrandi methodus generalis, quam sequentibus exemplis illustrare conabor.

21. *Demonstratio constructionis in Exemplo* 5.

In arcu PQ (vide fig. p. 493.) sume punctum d proximum ad D, et age dc ac dm parallelas DE ac DM, et occurrentes DM et AP in p et l: et erit DEed momentum areæ PDEP, et LMml momentum areæ LMKP. Age semidiametrum AD, et concipe indefinitè exiguum arcum Dd esse instar rectæ, et triangula Dpd et ALD erunt similia: adeoque Dp : pd : : AL : LD. Est autem HF : EH : : AG : AF; hoc est, AL : LD : : ML, DE. Et proinde Dp : pd : : ML : DE. Quare Dp × DE = pd × ML. Hoc est, momentum DEed æquale momento LMml. Et cùm hoc de quibuslibet contemporaneis momentis indeterminatè demonstratur, patet singula momenta areæ DPEP esse singulis contemporaneis momentis areæ PLMK æqualia, adeoque totas areas ex istis momentis compositas æquari. Q. E. D.

22. *Demonstratio constructionis in Exemplo* 3.

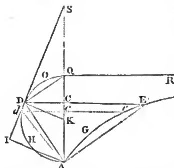
Esto DEed momentum superficiei AHDE ac AdDA contem-

(e) " Et verò non nimis effectio geometrica concinna est. Singula enim Problemata suas habent elegantias: verùm ea cæteris antefertur, quæ compositionem operis non ex æqualitate, sed æqualitatem ex compositione arguit, et demonstrat; ipsa verò se ipsam. Itaque artifex Geometra, quanquam analyticam edoctus, illud dissimulat; & tanquam de opere efficiundo cogitans profert suum syntheticum problema, et explicat: deinde, Logistis auxiliaturus, de proportione vel æqualitate in eo agnitâ concipit et demonstrat Theorema." *Vieta. Isagog. Cap.* VII. *De Officio Rheticés.*

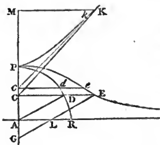
" Monemus tantùm Viros Clarissimos, ut, sepositis tantisper speciebus analyseos, problemata Geometrica viâ Euclideanâ et Apollonianâ exequantur; ne pereat paulatim elegantia et construendi et demonstrandi, cui præcipuè operam dedisse Veteres innuunt satis et Data Euclidis, & alii à Pappo enumerati Analyseos Libri." *Fermatius in Epistolâ quâdam suâ ad Kenelm Digby,* quæ septima est à quadragesimâ in Commercio Epistolico Wallisii.

poraneum momentum segmenti ADH. Age semidiametrum DK, et *de* occurrat AQ in *c*, eritque C*c* : D*d* : : DC : DK (σ). Præterea est DC : QA (2DK) : : AC : DE (τ). Adeoque C*c* : 2D*d* (: : DC : 2DK) : : AC : DE; et C*c* × DE = 2D*d* × AC. Jam ad peripheriæ momentum D*d* rectâ productum, i. e. ad tangentem circuli, demitte normalem AI, et erit AI æqualis AC (υ), adeoque 2D*d* × AC = 2D*d* × AI = 4 triangulis AD*d*. Quare 4 triang. AD*d* = C*c* × DE = momento DE*cd*. Spatii ergo AHDE singula momenta sunt quadrupla momentorum contemporaneorum segmenti ADH, et proinde totum illud spatium quadruplum totius segmenti. Q. E. D.

De Compendiis Demonstrationibus.



23. *Demonstratio constructionis in Exemplo* 4.



Parallelam CE age indefinitè parùm distantem *ce*, et hyperbolæ tangentem C*k*, ac demitte KM rectam ad AP: et ex Hyperbolæ naturâ erit AC : AP : : AP : AM (φ). Adeoque AG^q : GL^q (: : AC^q : LE^q sive AP^q) : : AP^q : AM^q: ac divisim AG^q : AL^q (DE^q) : : AP^q : $AM^q - AP^q$ (MK^q) et inversè (χ) AG : AP : : DE : MK. Est autem areola DE*ed* ad triangulum

(σ) Excerpt. ex Epist. not. (ᵏ) § 5.

(τ) E naturâ Cissoideos QC : CD = CA : CE. Quare QA : DE = QC : CD. (El. v. 12.) Sed propter angulos QDA, QCD rectos, QC : CD = CD : CA. Quare QA : DE = CD : AC. (El. v. 11.) Permutando QA : CD = DE : AC. Invertendo CD : QA = AC : DE.

(υ) Namque angulus ADI angulo AQD æqualis est (El. III. 32.) et angulus AQD æqualis est angulo ADC. (El. VI. 8.) Anguli igitur ADI, ADC inter se æquales sunt. Sed et ACD, AID inter se æquales. Rectus enim uterque. Et triangulis ADC, AID latus AD est commune. Quare et reliqua eorum latera singulatim inter se æqualia erunt; eâ nempe lege, ut æqualia latera æqualibus angulis obversa sint. (El. I. 26.) Quare latera AI, AC inter se æqualia. Q. E. D.

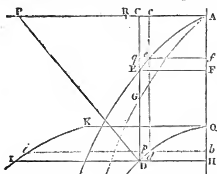
(φ) Hamilton. Conic. I. 49.

(χ) *Permutando* potiùs.

 CKc, ut altitudo DE ad femiffem altitudinis KM: hoc eft, ut AG ad $\frac{1}{2}$AP. Quare omnia fpatii PDE momenta ad omnia contemporanea momenta fpatii PKC funt ut AG ad $\frac{1}{2}$AP. Et proinde tota illa fpatia funt in eâdem ratione. Q. E. D.

24. *Demonftratio conftructionis in Exemplo* 6.

Parallelam & proximam CD age *cd* occurrentem Curvæ AE in *e*. Age *bi* et *fe* occurrentes DC in *p* et *q*. Et erit ex hypothefi D*d*=E*q*: et ex fimilitudine triangulorum D*pd*, DCP, erit D*p*: D*d*(E*q*) : : CP: PD(HI). Adeoque D*p* × HI = E*q* × CP; et inde D*p* × HI (moment. HI*ib*): E*q* × AC (moment. EE*fe*) : : E*q* × CP : E*q* × AC : : CP : AC. Quare cùm PC et AC fint in datâ ratione lateris tranfverfi ad latus rectum conicæ fectionis QD(ψ), et arearum HIKQ et AEF momenta, HI*ib* et EF*fe*, in illâ ratione, erunt ipfæ areæ in eâdem ratione. Q. E. D.



25. In hujufmodi demonftrationibus obfervandum eft, quòd quantitates pro æqualibus habeo, quarum ratio eft æqualitatis. Et ratio æqualitatis cenfenda eft, quæ minùs differt ab æqualitate quàm quælibet inæqualis ratio poteft affignari. Sic in poftremâ demonftratione, pofui rectangulum E*q* × AC five FE*qf* æquale fpatio FE*ef*; quia, propter differentiam E*qe* infinitè minorem ipfis, five refpectu

(ψ) Hamilton Conic. (ω) Indivifibilium.

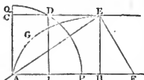
(αα) Et per § 4. Introduct. ad Quadrat. Curv.

(ββ) Junctâ enim AD, cùm triangula duo rectangularia, AID, FHE, hypotenufas AD, FE inter fe æquales habeant, necnon latera EH, ID inter fe æqualia, erunt et tertia eorundem latera AI, HF inter fe æqualia. Quare FH : HE = AI : ID. Sed propter angulos AEF, AHE rectos, FH : HE = HE : AH vel CE. (El. VI. 8.) Quare AI : ID = HE vel ID : CE.

(γγ) Nimirum ad demonftrationes ex fluxionum doctrinâ componendas nil conferunt lineæ illæ

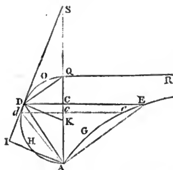
respectu ipsarum nullam, non habent rationem inæqualitatis. Et eâdem de causâ, posui $Dp \times HI = HIib$, et sic in aliis. De Componendis Demonstrationibus.

26. Hâc methodo probandi Curvas, per æqualitatem vel datam rationem momentorum, æquales esse, vel datam rationem habere, hîc usus sum, quòd cum methodis in his rebus usitatis (*) affinitatem habeat. Sed magis naturalis videtur, quæ genesi superficierum ex fluendi motu innititur. Sic si constructio in



Exemplo 2, demonstranda sit: Ex naturâ circuli (**) est fluxio rectæ ID ad fluxionem rectæ IP ut AI ad ID: estque AI : ID : : ID : CE, ex naturâ curvæ AGE (cc). Et proinde CE × flux. ID = ID × flux. IP. Sed CE × flux. ID = fluxioni areæ ACEG; et ID × flux. IP = fluxioni areæ PDI. Et propterea areæ illæ, æqualiter fluendo genitæ, æquales erunt. Q. E. D.

27. Plenioris illustrationis gratiâ, adjiciam demonstrationem constructionis, quâ Cissoidis area in Exemplo 3, determinatur.



Lineæ punctis notatæ in schemate deleantur (yy), et agatur DQ, et Cissoidis asymptotos QR. Et ex naturâ circuli, est $DQ^q = AQ \times CQ$. Et inde per Prob. 1. 2DQ × flux. ipsius DQ = AQ × flux. CQ. Adeoque AQ : DQ = 2 flux. DQ : flux. CQ. Est et ex naturâ Cissoidis ED : AD = AQ : DQ (zz). Quare ED : AD : : 2 flux. DQ : flux. CQ. Et ED × flux. CQ = AD × 2 flux. DQ, sive $4 \times \frac{1}{2}$AD × flux. DQ. Jam cùm DQ perpendicularis sit ad terminum ipsius AD

illæ vicinissimæ, sine quibus nihil unquam moliri ausa est *Indivisibilium*, quæ dicitur, Geometria. Meliùs autem sine illis rem agi, cùm ex illis demonstrationibus, quæ in notis nostris ad quartum Excerptorum ex Epistolis posuimus, satis pateat, tum plurimarum exemplis, quas ad varia Principiorum loca brevi proferemus, clariùs etiam elucescet.

(zz) Nam è naturâ Cissoidis CE : CA = CA : CD. Junctâ igitur EA, angulus EAD rectus erit. Atque idcirco ED : DA = DA : DC. (El. vi. 8.) Sed propter angulos ADQ, ACD rectos DA : DC = AQ : QP. (El. vi. 8.) Quare ED : DA = AQ : QD.

CAPUT X. circa A gyrantis, est $\frac{1}{2}$ AD × flux. DQ = fluxioni generanti aream ADOQ. Est et ejus quadruplum, ED × flux. CQ, = fluxioni generanti ciffoidalem aream QREDO. Et proinde area illa infinitè longa QREDO generatur quadrupla alterius ADOQ. Q. E. D.

SCHOLIUM.

28. Per præcedentes Catalogos non tantùm areæ Curvarum, sed et aliæ cujuscunque generis quantitates, analogâ fluendi ratione generatæ, è fluxionibus derivari possunt. Idque mediante hoc Theoremate. *Quòd quantitas cujuscunque generis sit ad unitatem congeneram, ut area curvæ ad unitatem superficialem; si modò fluxio quantitatem illam generans sit ad unitatem sui generis, ut fluxio generans aream ad unitatem sui generis; hoc est ut linea super basi normaliter incedens, quâ area illa describitur, ad unitatem linearem.* Et proinde si fluxio qualiscunque exponatur per ejusmodi lineam incedentem, quantitas, ab illâ fluxione generata, exponetur per aream ab illâ incedente descriptam. Vel si fluxio per eosdem terminos algebraicos cum incedente lineâ exponatur, quantitas generata exponetur per eosdem cum areâ descriptâ. Æquatio itaque, quæ fluxionem cujuscunque generis exhibet, quærenda est in primâ columnâ Catalogorum, et valor t, in ultimâ columnâ, indicabit quantitatem generatam.

29. Quemadmodum si $\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$ fluxionem cujuscunque generis exhibeat, pone æqualem y; et ut ad formam æquationum in Catalogis reducatur, substitue z^{η} pro z: sic enim evadet $z^{\eta-1}\sqrt{1+\frac{9z^{\eta}}{4a}}=y$, æquatio primæ speciei tertii ordinis prioris Catalogi. Et collatis terminis, fiet $d=1$; $e=1$; $f=\frac{9}{4a}$: et inde $\frac{8a+18z}{27}\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}\left(=\frac{2d}{3\eta f}R^3\right)=t$. Est itaque $\frac{8a+18z}{27}\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$ quantitas, quæ generatur fluxione $\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$.

30. Atque ita si $\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ designet fluxionem, per debitam reductionem (extrahendo $z^{\frac{1}{3}}$ è radicali, et scribendo z^{η} pro $z^{-\frac{1}{3}}$)

5 habebitur

habebitur $\frac{1}{z^{\eta+1}}\sqrt{z^{\eta}+\frac{16}{9a^{\frac{2}{3}}}}=y$, æquatio ſecundæ ſpecici tertii ordinis poſterioris Catalogi. Et collatis terminis fit $d=1$; $e=\frac{16}{9a^{\frac{2}{3}}}$; et $f=1$. Adeoque $z^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{z^{\eta}}=xx$; $\sqrt{1+\frac{16xx}{9a^{\frac{2}{3}}}}=v$; et $3s=\frac{-2d}{\eta}s=t$. De Uſu Catalogorum.

Quibus inventis, quantitas per fluxionem $\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ generata innoteſcet, ponendo eſſe ad unitatem ſui generis ut area $3s$ ad unitatem ſuperficialem. Vel quod eodem recidit, ponendo quantitatem t non ampliùs ſuperficiem ſignificare, ſed alterius generis quantitatem, quæ eſt ad unitatem ejuſdem generis ut ſuperficies illa ad unitatem ſuperficialem. Sic poſito quòd $\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ deſignet fluxionem linearem, imaginor t non ampliùs ſuperficiem ſed lineam jam ſignificare; eam nempe, quæ ad unitatem linearem eſt ut area, quam t juxta Catalogos deſignat, ad unitatem ſuperficialem; hoc eſt, eam quæ producitur applicando aream illam ad linearem unitatem. Quâ ratione, ſi linearis unitas ſtatuatur e, longitudo, per præfatam fluxionem generata, erit $\frac{3t}{e}$. Et hoc fundamento Catalogi illi, ad longitudines Curvarum, contenta Solidorum, et alias quaſcunque quantitates, æquè ac areas Curvarum, determinandas, applicari poſſunt.

CAPUT XI.

De Quæſtionibus cognatis.

SECT. I.

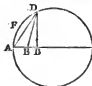
Curvarum areas per Mechanicam approximare (u)

1. METHODUS eſt, ut duarum pluriumve rectilinearum figurarum valores ita componantur inter ſe, ut valorem areæ Curvæ quàm proximè conſtituant. Sic ad circulum AFD quem æquatio $x-xx=rr$ deſignat, poſtquam inventus eſt areæ AFDB valor $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ &c. quærendi ſunt aliquot rectangnlorum valores, Conſtructiones Mechanicæ.

(u) Vide Excerpt. IV. ſub fin.

quales

Caput XI. quales sunt ipsius BD × AB valor $x\sqrt{x-xx}$, sive $x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{9}{2}}$ &c. ac ipsius AD × AB valor $x\sqrt{x}$, sive $x^{\frac{3}{2}}$. Dein hi valores per literas quaslibet diversas, quæ numeros indefinitè designent, multiplicandi sunt et addendi; summæque termini cum correspondentibus terminis valoris areæ AFDB comparandi; ut quantùm liceat evadant æquales.



Quemadmodum si per e & f multiplicentur, fiet summa $\begin{matrix}+e\\+f\end{matrix}\,x^{\frac{3}{2}}-\frac{e}{2}x^{\frac{5}{2}}-\frac{e}{8}x^{\frac{7}{2}}$ &c; cujus terminis cum terminis hisce $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}$ &c. collatis, prodit $e+f=\frac{2}{3}$; et $-\frac{e}{2}=-\frac{1}{5}$; sive $e=\frac{2}{5}$, et $f=\frac{2}{3}-e=\frac{4}{15}$. Adeoque est $\frac{2}{5}$BD × AB + $\frac{4}{15}$AD × AB = areæ AFDB proximè. Scilicet $\frac{2}{5}$BD × AB + $\frac{4}{15}$AD × AB valet $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{20}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{40}x^{\frac{9}{2}}$ &c. quod ab areâ AFDB subductum relinquit solummodò errorem $\frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}}+\frac{1}{90}x^{\frac{9}{2}}$ &c.

2. Sic bisectâ AB in E, rectanguli AB × DE valor erit $x\sqrt{x-\frac{3}{4}xx}$, sive $x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{8}x^{\frac{5}{2}}-\frac{9}{128}x^{\frac{7}{2}}-\frac{27}{1024}x^{\frac{9}{2}}$ &c. Et hoc collatum cum rectangulo AD × AB dat $\frac{8\text{DE}+2\text{AD}}{15}$ × AB = areæ AFDB, errore tantùm existente $\frac{1}{560}x^{\frac{7}{2}}+\frac{1}{5760}x^{\frac{9}{2}}$ &c. qui semper minor est quàm $\frac{1}{1500}$ totius areæ, etiamsi AFDB ponatur quadrans circuli. Hoc autem Theorema sic enunciari potest. *Ut 3 ad 2 ita rectangulum* AB *in* DE *plus quintâ parte differentiæ inter* AD *ac* DE *ad aream* AFDB *proximè.*

3. Atque ita conferendo duo rectangula AB × ED et AB × BD, vel omnia tria rectangula inter se, vel adhibendo adhuc alia rectangula, possunt aliæ regulæ excogitari, eæque tanto exactiores quo plura rectangula adhibentur. Et idem de areâ Hyperbolæ ac aliarum Curvarum intelligendum est. Imo et per unicum tantùm rectangulum area plerumque commodè exhiberi potest: ut in prædicto Circulo, si capiatur AE ad AB ut $\sqrt{10}$ ad 5, rectangulum AB × ED erit ad aream AFDB ut 3 ad 2, errore tantùm existente $\frac{1}{175}x^{\frac{7}{2}}+\frac{11}{2150}x^{\frac{9}{2}}$ &c.

SECT. II.

Ex Datâ Areâ, Basem et Incedentem Lineam determinare (§§).

1. Ubi area per finitam æquationem exhibetur, nihil occurrit

(§§) Vide Analys. per Æquat. Infinit. C. VII. Sect. 1.

diffi-

difficultatis. Ubi verò per infinitam exhibetur, affecta radix extrahenda eſt, quæ baſem deſignat. Sic ad Hyperbolam, quam æquatio $\frac{ab}{a+x}=y$ deſignat; poſtquam inventum eſt $z=bx-\frac{bxx}{2a}+\frac{bx^3}{3aa}$ &c. ut ex datâ areâ, z, viciſſim innoteſcat baſis, x, extrahe radicem affectam, et proveniet $x=\frac{z}{b}+\frac{zz}{2abb}+\frac{z^3}{6aab^3}+\frac{z^4}{24a^3b^4}+\frac{z^5}{96a^4b^5}$ &c. Et præterea ſi incedens, y, deſideretur; divide ab per $a+x$, hoc eſt per $a+\frac{z}{b}+\frac{zz}{2abb}+\frac{z^3}{6aab^3}$ &c. et emerget $y=b-\frac{z}{a}+\frac{zz}{2aab}-\frac{z^3}{6a^3bb}+\frac{z^4}{24a^4b^3}$ &c. BASIS EX AREA.

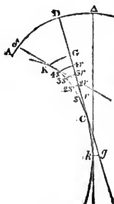
2. Sic ad Ellipſin, quam æquatio $ax-\frac{a}{c}xx=yy$ deſignat; poſtquam inventa fuerit area $z=\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}-\frac{a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5c}-\frac{a^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{28cc}-\frac{a^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{9}{2}}}{72c^3}$ &c. ſcribe v^3 pro $\frac{3z}{2a^{\frac{1}{2}}}$, ac t pro $x^{\frac{1}{2}}$, et evadet $v^3=t^3-\frac{3t^5}{10c}-\frac{3t^7}{56cc}-\frac{t^9}{48c^3}$ &c. Et, extractâ radice, $t=v+\frac{v^3}{10c}+\frac{81v^5}{1400cc}+\frac{1171v^7}{25200c^3}$ &c. Cujus quadratum, $vv+\frac{v^4}{5c}+\frac{22v^6}{175cc}+\frac{823v^8}{7875c^3}$ &c. valet x. Et hoc valore pro x in æquatione, $ax-\frac{a}{c}xx=yy$, ſubſtituto, et extractâ radice, proveniet $y=a^{\frac{1}{2}}v-\frac{2a^{\frac{1}{2}}v^3}{5c}-\frac{38a^{\frac{1}{2}}v^5}{175cc}-\frac{407a^{\frac{1}{2}}v^7}{2250c^3}$ &c. Adeoque ex datâ areâ z, et inde v, ſive $\sqrt{\text{cub.}}\,\frac{3z}{2a^{\frac{1}{2}}}$, dabitur Baſis x et Incedens y. Quæ omnia ad Hyperbolam etiam accommodantur, ſi modò ſignum quantitatis c ubique mutetur, ubi exiſtit imparium dimenſionum.

CAPUT XII.

PROBLEMA X.

Curvas pro arbitrio multas invenire, quarum Longitudines per finitas Æquationes deſignari poſſunt.

AD hujus reſolutionem via per ſequentes poſitiones ſternitur. 1. Si recta DC, in Curvam quamvis AD perpendiculariter inſiſtens, moveri concipiatur; ſingula ejus puncta G, g, r, &c. deſcribent



describent alias æquidistantes sibique perpendiculares curvas GK, *gk*, *rs*, &c.

2. Si recta illa hinc inde indefinitè producatur, ejus extremitates movebuntur ad contrarias plagas; et punctum quod distinguit inter contrarios motus, quodque ideo dici potest centrum Motionis, idem est cum centro Curvaturæ, quam Curva AD habet ad punctum D, ut suprà diximus. Istud autem punctum esto C.

3. Si lineam AD non circularem esse, sed difformiter incurvatam supponamus, puta magis curvam in δ, et minùs in Δ; illud centrum continuò mutabitur, propiùs accedens ad partes magis curvas, ut in K, et longiùs recedens à partibus minùs curvis, ut in *k*: eoque pacto lineam aliquam, qualis KC*k*, describet.

4. Hanc à centro Curvaturæ descriptam lineam recta DC continuò tanget. Nam si rectæ illius punctum D moveat versus δ, ejus punctum G, quod interea transit ad K et situm est ad eandem partem centri C, movebit versus eandem plagam (per positionem secundam). Deinde si idem D moveat versus Δ, punctum *g*, quod interea transit ad *k*, et situm est ad contrariam partem centri C, movebit ad contrariam, hoc est ad eandem plagam ad quam G in priori casu movebat, dum transit ad K. Et proinde K et *k* jacent ad eandem partem rectæ DC. Quare cùm K et *k* indeterminatè pro quibuslibet punctis sumantur, patet totam illam Curvam jacere ad eandem partem rectæ DC, proindeque ab illâ non secari, sed tangi tantùm.

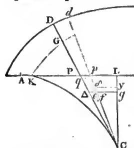
Hic supponitur lineam δDΔ magis curvam esse à parte δ continuò, et minùs à parte Δ. Quòd si maxima minimave Curvatura fuerit ad ipsum D, tunc recta DC secabit curvam KC, sed in angulo tamen qui sit quovis rectilineo minor: quod perinde est ac si tangere dicatur. Imo punctum C, in hoc casu, terminus est instar cuspidis, ad quem partes Curvæ, obliquissimo concursu desinentes, se mutuò contingunt; proindeque à rectâ DC, quæ angulum illum contactûs dividit, rectiùs dicatur tangi quàm secari.

5. Recta CG æquatur Curvæ CK. Nam concipe rectæ illius singula

singula puncta r, $2r$, $3r$, $4r$, &c. describere Curvarum arcus rs, $2r2s$, $3r3s$, &c. interea dum per motum rectæ illius accedant ad Curvam CK; et arcus illi, cùm (per positionem primam) sint perpendiculares ad rectas quæ (per posit. 4.) tangunt Curvam CK, erunt etiam perpendiculares ad Curvam illam. Quare partes istius CK, inter arcus illos interjectæ, quæ propter infinitam parvitatem pro rectis haberi possint, æquantur intervallis eorundem arcuum, hoc est (per posit. 1) totidem partibus rectæ CG. Et, additis utrinque æqualibus, tota CK æquabitur toti CG. Inventio CURVARUM quæ Rectis æquari possunt.

6. Idem constare potest, imaginando singulas partes rectæ CG, inter movendum, successivè applicari ad singulas partes Curvæ CK, easque mensurare: perinde ut rotæ, super planum per gyros promoventis, circumferentia distantiam metitur, quam punctum contactûs transigit.

7. Ex his pateat Problema resolvi posse, assumendo pro lubitu Curvam quamvis $A\delta D\Delta$, et inde determinando alteram Curvam KCk, in quâ assumptæ centrum curvaturæ versatur.



Ad rectam itaque quamvis positione datam, AB, demissis perpendiculis, DB, CL, et in AB sumpto quovis puncto A, dictisque $AB = x$, et $BD = y$, pro Curvâ AD definiendâ assumatur relatio quævis inter x et y, et inde (per Prob. v.) elicietur punctum C, quo et Curva CK et ejus longitudo GC determinatur.

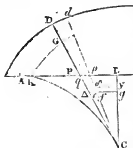
8. Exempl. Sit $ax = y^2$ æquatio ad Curvam AD, Parabolam nempe Apollonianam. Et per Prob. v. invenientur $AL = \frac{1}{2}a + 3x$, $CL = \frac{4y^3}{aa}$, ac $DC = \frac{a+4x}{a}\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + ax}$. Quibus habitis, Curva KC determinatur per AL ac LC, et longitudo ejus per DC: utpote cùm liberum sit ubivis in Curvâ KC assumere puncta K & C, supponamis K esse centrum curvaturæ Parabolæ ad verticem; et positis perinde AB & BD, seu x & y, nullis, evadit $DC = \frac{1}{2}a$: estque hæc longitudo AK, vel DG, quæ, subducta à superiori indefinito valore DC, relinquit GC, seu $KC, = \frac{a+4x}{a}\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + ax} - \frac{1}{2}a$.

9. Jam si qualis sit hæc Curva, quantaque ejus longitudo, non amplius

CAPUT XII amplius habitâ ratione ad Parabolam, scire desideratur: dic $KL = z$, et $LC = v$; et erit $z = (AL - \frac{1}{2}a) = 3x$; seu $\frac{1}{3}z = x$, et $\frac{az}{3} (= ax) = y^2$; adeoque $4\sqrt{\frac{z^3}{27a}} (= \frac{4y^3}{aa} = CL) = v$, sive $\frac{16z^3}{27a} = v^2$. Quod indicat Curvam KC esse Parabolam secundi generis. Et pro ejus longitudine prodit $\frac{3a+4z}{3a}\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{3}az} - \frac{1}{2}a$, scribendo $\frac{1}{3}z$ pro x in valore CG.

9. Potest etiam Problema resolvi per assumptionem æquationis, quæ relationem inter AP et PD (positâ nempe P intersectione basis et perpendiculi) definiant.

10. Nam dictis $AP = x$, et $PD = y$, concipe CPD per spatium quàm minimum moveri; puta ad locum Cpd: inque CD & Cd sumpto $C\Delta$, et $C\delta$, ejusdem cujusvis datæ longitudinis, puta 1, et ad CL demissis Δg, $\delta\gamma$ perpendiculis, quorum Δg (quod dic z) occurrat Cd in f, et completo parallelogrammo $g\gamma\delta\epsilon$; erit $\Delta e : \Delta f \; (:: \overline{\Delta e}^2 : \overline{\Delta\delta}^2 :: \overline{Cg}^2 : \overline{C\Delta}^2) :: \frac{\overline{Cg}^2}{C\Delta} : C\Delta$. Et $\Delta f : Pp :: C\Delta : CP$. Et ex æquo $\Delta e : Pp :: \frac{\overline{Cg}^2}{C\Delta} : CP$. Est autem Pp momentum basis AP, cujus additamento evadit Ap; ac Δe contemporaneum momentum perpendiculi Δg, cujus ablatione evadit $\delta\gamma$: adeoque Δe et Pp sunt ut fluxiones linearum Δg (z) et AP (x), hoc est, ut $\dot{x}$ et $\dot{z}$. Quare $\dot{z} : \dot{x} :: \frac{\overline{Cg}^2}{C\Delta} : CP$. Et proinde cùm sit $\overline{Cg}^2 \; (= \overline{C\Delta}^2 - \overline{\Delta g}^2) = 1 - zz$; et $C\Delta = 1$; erit $CP = \frac{\dot{x} - \dot{x}z^2}{\dot{z}}$. Et insuper cùm è tribus $\dot{x}$, $\dot{y}$



et $\dot{z}$ quamlibet pro uniformi fluxione, ad quam cæteræ referantur, habere liceat; si ista ponatur $\dot{x}$ ejusque quantitas unitas, evadet $CP = \frac{1-zz}{\dot{z}}$.

11. Præterea est $C\Delta \, (1) : \Delta g \, (z) :: CP : PL$; et $C\Delta \, (1) : Cg \, (\sqrt{1-zz}) :: CP : CL$; adeoque fit $PL = \frac{z - z^3}{\dot{z}}$, et $CL = \frac{1-zz}{\dot{z}}\sqrt{1-zz}$. Ac denique actâ pq parallelâ arcui infinitè parvo Dd, seu perpendiculari DC, erit Pq momentum ipsius DP, cujus additamento evadit dp, simul ac AP evadit Ap. Et idcirco Pp & Pq sunt ut fluxiones ipsarum AP (x) et PD (y), hoc est ut 1 & $\dot{y}$. Atque adeo cùm

propter

propter similia triangula Ppq et $c\Delta g$, $c\Delta$ ac Δg, seu I & z, sint in eâdem ratione, erit $\dot{y}=z$. Unde talis evadit Problematis resolutio. Inventio CURVARUM quæ Ex[illegible]

12. E propositâ æquatione, quæ relationem inter x et y designat, quære relationem fluxionum $\dot{x}$ et $\dot{y}$ (per Prob. I.) Et posito $\dot{x}=1$ habebitur valor $\dot{y}$, cui z æquatur. Dein substituto z pro $\dot{y}$, ope æquationis novissimæ, quære relationes fluxionum $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ (per idem Prob. I.) et iterum substituto I pro $\dot{x}$, obtinebitur valor $\dot{z}$. Quibus habitis, fac $\frac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}}=$ CP; $z\times$ CP $=$ PL; et CP $\times\sqrt{1-\dot{y}\dot{y}}=$ CL, et erit C ad Curvam, cujus pars quævis, KC, æquatur rectæ CG, differentiæ nempe tangentium ductarum à punctis C et K perpendiculariter ad Curvam Dd.

13. EXEMPL. Sit $ax=yy$ æquatio quæ relationem inter AP et PD designet, et per Prob. I. primò erit $a\dot{x}=2y\dot{y}$, seu $a=\frac{2y\dot{y}}{\dot{x}}=2yz$. Deinde $0=2\dot{y}z+2y\dot{z}$, seu $\frac{-zz}{y}=\dot{z}$. Indeque fit CP $=(\frac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}}=)\,y-\frac{4y^3}{aa}$; PL $=(z\times$ CP $=)\,\frac{1}{2}a-\frac{2yy}{a}$; et CL $=\frac{aa-4yy}{2aa}\sqrt{4yy-aa}$. Et à CP ac PL ablatis y et x, restat CD $=-\frac{4y^3}{aa}$, et AL $=\frac{1}{2}a-\frac{3yy}{a}$. Aufero autem y et x, quòd CP et PL, ubi valores habent affirmativos, cadant ad partes puncti P versus D et A, et tunc diminui debent auferendo affirmativas quantitates PD et AP. Ubi verò negativos valores obtinent, cadunt ad contrarias partes puncti P; et tunc augeri debent: id quod etiam fit auferendo affirmativas quantitates PD et AP.

14. Jam ut Curvæ, in quâ punctum C locatur, longitudo inter duo quævis puncta, K et C, noscatur; quæro longitudinem tangentis ad punctum K, & aufero à CD. Quemadmodum si K sit punctum, ad quòd tangens terminatur, ubi $c\Delta$ et Δg, seu I & z, ponuntur æquales, quodque proinde in ipsâ basi AP situm est; scribe I pro z in æquatione $a=2yz$, & prodit $a=2y$. Quare pro y scribe $\frac{1}{2}a$ in valore CD, nempe in $-\frac{4y^3}{aa}$, et oritur $-\frac{1}{2}a$. Estque hæc longitudo tangentis ad punctum K, sive ipsius DG; inter quam et superiorem indefinitum valorem CD differentia, $\frac{4y^3}{aa}-\frac{1}{2}a$, est GC, cui Curvæ pars KC æquatur.

15. Ut insuper pateat qualis sit hæc Curva, ab AL (mutato priùs signo ut evadat affirmativa) aufer AK, quæ erit $\frac{1}{4}a$; et restabit KL $=\frac{3yy}{a}-\frac{3}{4}a$, quam dic t; et in valore lineæ CL, quam dic v, scribe $\frac{4at}{3}$

CAPUT XII. pro $4yy-aa$, & prodibit $\frac{2t}{3a}\sqrt{\frac{4}{3}at}=v$, seu $\frac{16t^3}{27a}=vv$, æquatio ad Parabolam secundi generis, ut suprà.

16. Siquando relatio inter t & v minùs commodè ad æquationem redigi possit, sufficit investigasse tantùm longitudines PC & PL. Quemadmodum si pro relatione inter AP & PD [vid. fig. p. 506] assumatur æquatio $3a^2x+3a^2y-y^3=0$. Inde (per Prob. 1.) primò prodit $a^2+a^2z-y^2z=0$; deinde $a^2\dot{z}-2yz^2-y^2\dot{z}=0$. Adeoque est $z=\frac{aa}{y^2-a^2}$, & $\dot{z}=\frac{2yz^2}{a^2-y^2}$. Unde dantur $PC=\frac{1-yy}{\dot{z}}$, & $PL=z\times PC$; quibus punctum C, quod ad Curvam situm est, determinatur. Et longitudo Curvæ inter duo ejusmodi puncta è differentiâ correspondentium duarum tangentium DC, sive $PC-y$, innotescit.

EX. GR. Si ponatur $a=1$, et ad determinandum aliquod Curvæ punctum C, sumatur $y=2$; evadet AP seu x $(=\frac{y^3-3a^2y}{3aa})=\frac{2}{3}$; $z=\frac{1}{3}$; $\dot{z}=-\frac{4}{9}$, $PC=-2$, & $PL=-\frac{2}{3}$. Deinde ad aliud punctum determinandum, si sumatur $y=3$, evadet $AP=6$; $z=\frac{1}{8}$; $\dot{z}=\frac{-3}{256}$; $PC=-84$, & $PL=-10\frac{1}{2}$. Quibus habitis, si auferatur y à PC, restabit -4 in priori casu, et -87 in secundo casu, pro longitudinibus DC; quarum differentia, 83, est longitudo Curvæ inter inventa duo puncta C et c.

Hæc ita intelligenda sunt, ubi Curva inter puncta duo C & c vel K & C continuatur, sine termino quem cuspidi assimilavimus. Sed ubi unus vel plures ejusmodi termini interjacent istis punctis (qui termini inveniuntur, per determinationem Maximæ aut Minimæ PC vel DC) longitudines singularum partium Curvæ, inter illos et puncta C vel K, seorsim investigari debent & addi.

PROBLEMA XI.

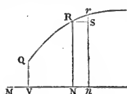
17. *Curvas invenire quotascunque, quarum Longitudines cum propositæ alicujus Curvæ Longitudine, vel cum Areâ ejus ad datam Lineam applicatâ, ope finitarum Æquationum, comparari possunt.*

18. Peragitur, involvendo longitudinem aream ve propositæ Curvæ in æquatione, quæ in præcedente Problemate assumitur ad determinandam relationem inter AP & PD. Sed ut z et $\dot{z}$ inde per Prob. 1. eliciantur, fluxio longitudinis vel areæ illius priùs investigari debet.

19. Fluxio

COMPARARE CURVARUM LONGITUDINES.

19. Fluxio longitudinis ejus determinatur ponendo æqualem radici quadraticæ fummæ quadratorum à fluxionibus bafis & perpendiculariter incedentis. Sit RN linea perpendiculariter incedens



fuper bafi MN, et QR Curva propofita ad quam RN terminatur. Dictifque $MN=s$, $NR=t$ & $QR=v$; concipe lineam NR ad locum quàm proximum, nr, promoveri; et demiffo ad nr perpendiculo RS, erunt RS, sr & Rr, contemporanea momenta linearum MN, NR, & QR, quorum additamentis evadunt Mn, nr, & Qr. Et cùm hæc fint inter fe ut earundem linearum fluxiones, ac propter angulum rectum RSr fit $\sqrt{RS^2+sr^2}=Rr$, erit $\sqrt{\dot{s}^2+\dot{t}^2}=\dot{v}$.

20. Ad determinandas autem fluxiones $\dot{s}$ & $\dot{t}$, duæ requiruntur æquationes; una, quæ definiat relationem inter MN & NR, feu s & t: unde relatio inter fluxiones $\dot{s}$ & $\dot{t}$ eruenda eft: et alia, quæ definiat relationem inter MN vel NR ad datam figuram, et AP feu x ad quæfitam; unde relatio fluxionis $\dot{s}$, vel $\dot{t}$, ad fluxionem $\dot{x}$, feu 1, innotefcit.

21. Invento $\dot{v}$, fluxiones $\dot{y}$ et $\dot{z}$ per affumptam tertiam æquationem, quâ longitudo PD five y definitur, inveftigandæ funt; & capienda $PC=\frac{1-\dot{y}^2}{\dot{z}}$; $PL=\dot{y}\times PC$; ac $DC=PC-y$, ut in præcedente Problemate.

22. EXEMPL. 1. Sit $as-ss=tt$, æquatio ad datam Curvam QR, utpote circulum; $xx=as$ relatio inter lineas AP et MN; et $\frac{2}{3}v=y$ relatio inter longitudinem datæ Curvæ, QR, et rectæ PD. Per primam, fit $a\dot{s}-2s\dot{s}=2t\dot{t}$, feu $\frac{a-2s}{2t}\dot{s}=\dot{t}$. Et inde $\frac{a\dot{s}}{2t}(\sqrt{\dot{s}\dot{s}+\dot{t}\dot{t}})=\dot{v}$. Per fecundam fit $2x=a\dot{s}$: adeoque eft $\frac{x}{t}=\dot{v}$. Et per tertiam fit $\frac{2}{3}\dot{v}=\dot{y}$, hoc eft $\frac{2x}{3t}=z$, dein hinc fit $\frac{2}{3t}-\frac{2x\dot{t}}{3tt}=\dot{z}$. Quibus inventis, capienda funt $PC=\frac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}}$; $PL=\dot{y}\times PC$; ac $DC=PC-y$, five $PC-\frac{2}{3}QR$; ubi patet longitudinem datæ Curvæ QR inveniri non poffe, quin fimul innotefcat longitudo rectæ DC, indeque longitudo Curvæ ad quam punctum C cadit. Et contrà.

23. EXEMPL. 2. Stante $as-ss=tt$, ponatur $x=s$, & $vv-4ax=4ay$.

Perque

Caput XI. Perque primam invenietur $\frac{a\dot{s}}{st}=\dot{v}$, ut suprà. Per secundam verò $1=\dot{s}$; atque adeo $\frac{a}{st}=\dot{v}$. Et per tertiam $2\dot{v}v-4a=4a\dot{y}$, seu (eliminato $\dot{v}$) $\frac{v}{4t}-1=\dot{z}$; dein hinc $\frac{\dot{v}}{4t}-\frac{v\dot{t}}{4tt}=\dot{z}$.

24. Exempl. 3. Ponantur tres æquationes $aa=st$; $a+3s=x$; et $x+v=y$. Et per primam (quæ Hyperbolam denotat) evadit $0=\dot{s}t+\dot{t}s$, seu $-\frac{\dot{s}t}{s}=\dot{t}$: et inde $\frac{\dot{s}}{s}\sqrt{ss+tt}\;(=\sqrt{\dot{s}^2+\dot{t}^2})=\dot{v}$. Per secundam evadit $3\dot{s}=1$; adeoque est $\frac{1}{3s}\sqrt{s^2+t^2}=\dot{v}$. Et per tertiam fit $1+\dot{v}=\dot{y}$, sive $1+\frac{1}{3s}\sqrt{ss+tt}=\dot{z}$. Dein hinc fit $\dot{\varphi}=\dot{z}$, positâ scilicet $\dot{\varphi}$ fluxione radicalis $\frac{1}{3s}\sqrt{s^2+t^2}$; quæ si fingatur æqualis φ, sive $\frac{1}{9}+\frac{tt}{9s^2}=\varphi\varphi$, proveniet inde $\frac{2t\dot{t}}{9ss}-\frac{2tt\dot{s}}{9s^3}=2\varphi\dot{\varphi}$. Et substituto imprimis $-\frac{\dot{s}t}{s}$ pro $\dot{t}$, deinde $\frac{1}{3}$ pro $\dot{s}$, factâque divisione per 2φ, habebitur $\frac{-2t^2}{27\varphi s^3}=(\dot{\varphi}=)\dot{z}$. Inventis $\dot{y}$ & $\dot{z}$ cætera peraguntur ut in Exemplo Primo.

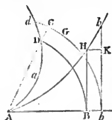
25. Quòd si à quovis Curvæ puncto Q, perpendiculum QV ad MN demittatur, et Curva invenienda sit, cujus longitudo ex longitudine, quæ oritur, applicando aream QRNV ad datam aliquam lineam, innotescat: ponatur illa data linea E; longitudo $\frac{\text{QRNM}}{\text{E}}$, quæ ex applicatione oritur, v. Et cùm fluxio areæ QRNV sit ad fluxionem areæ parallelogrammi rectanguli super VN ad altitudinem E constituti ut incedens linea NR, seu t, quâ hæc describitur, ad incedentem lineam E, quâ illud eodem tempore describitur; et longitudinum, quæ oriuntur applicando areas illas ad datam E, hoc est, linearum v et VN, seu s, fluxiones $\dot{v}$ et $\dot{s}$ sint in eâdem ratione, erit $\dot{v}=\frac{\dot{s}t}{\text{E}}$. Per hanc itaque Regulam valor $\dot{v}$ inquirendus est, cæteraque ut in præcedentibus Exemplis peragenda.

26. Exempl. 4. Sit QR Hyperbola quam æquatio $aa+\frac{ass}{c}=tt$ definit, et inde juxta Prob. 1. evadet $\frac{as\dot{s}}{c}=t\dot{t}$, sive $\frac{as\dot{s}}{ct}=\dot{t}$. Dein, si pro aliis duabus æquationibus assumantur $x=s$, & $y=v$, prior dabit $1=\dot{s}$; unde fit $\dot{v}\;(=\frac{\dot{s}t}{\text{E}})=\frac{t}{\text{E}}$; et posterior dabit imprimis $\dot{y}=\dot{v}$, sive

$z = \frac{t}{E}$; dein hinc $\dot{z} = \frac{\dot{t}}{E}$; et substituto $\frac{a\dot{s}}{ct}$, sive $\frac{as}{ct}$, pro $\dot{t}$, evadet $\dot{z} = \frac{as}{Ect}$. Inventis $\dot{y}$ et $\dot{z}$, fac $\frac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}} =$ CP, & $\dot{y} \times$ CP=PL, ut in præcedentibus; et inde punctum C, adeoque Curva, in quam omnia ejusmodi puncta cadunt, determinabitur: cujus Curvæ longitudo ex longitudine DC, quæ valet CP$-v$, innotescat, uti satis ostendimus. COMPARARE CURVARUM LONGITUDINES.

27. Est et alia methodus quâ Problema resolvitur, quærendo nempe Curvas, quarum fluxiones vel æquentur fluxioni Curvæ propositæ, vel ex illius et aliarum linearum fluxionibus componantur. Et hæc aliquando usui esse potest, præsertim in convertendo Mechanicas Curvas, in æquales Geometricas, cujus rei insigne est exemplum in Spiralibus.

28. Sit AB recta positione data; BD arcus super AB tanquam basi incedens, ac interea retinens A pro centro; ADd Spiralis, ad quam arcus ille perpetim terminatur; bd arcus quàm proximus, sive locus in quem arcus BD, dum incedit, proximè movetur; DC perpendicularis ad arcum bd; dG differentia arcuum; AH alia Curva Spirali AD æqualis; BH recta super AB normaliter incedens ac terminata ad curvam AH; bb locus quàm proximus in quem recta illa incedit; et HK perpendicularis ad bb. Et in triangulis infinitè parvis DCd ac HKb, cùm DC & HK æqualia sint eidem tertio Bb, indeque sibi mutuò æqualia; ac Dd & Hb ex hypothesi sint correspondentes partes æqualium Curvarum, et inde etiam æqualia; nec non anguli ad C & K recti; tertia etiam latera, dC & bK, æqualia erunt. Quare cùm insuper sit AB : BD : : Ab : bC : : A$b-$AB (Bb) : bC$-$BD (CG); adeoque $\frac{BD \times Bb}{AB} =$ CG; si hoc auferatur à dG, restabit dG$-\frac{BD \times Bb}{AB}$ $(=d$C$) = b$K. Dic itaque AB$=z$, BD$=v$, & BH$=y$, et cùm Bb, dG, & HK sint earundem contemporanea momenta quorum additamentis evadunt Ab, bd, & bb, et proinde inter se sint ut fluxiones, ideo pro momentis in æquatione novissimâ substituantur fluxiones, juxta et notæ pro lineis, et emerget $\dot{v} - \frac{v\dot{z}}{z} = \dot{y}$. Ubi si è fluxionibus $\dot{z}$ pro æ-



quabili-

CAPUT XII. quabili habeatur & supponatur unitas esse, ad quam cæteræ referantur, evadit $\dot{v} - \frac{v}{z} = y$.

Quamobrem datâ per æquationem aliquam relatione inter AB & BD (sive x et v) quâ Spiralis definiatur, dabitur (per Prob. I.) fluxio $\dot{v}$, et inde etiam fluxio $\dot{y}$, ponendo æqualem $\dot{v} - \frac{v}{z}$. Atque hæc per Prob. II. dabit lineam y, sive BH, cujus est fluxio.

29. EXEMPL. 1. Si detur $\frac{zz}{a} = v$ æquatio nempe ad Spiralem Archimedeam, inde (per Prob. I.) elicietur $\frac{2z}{a} = \dot{v}$. A quo aufer $\frac{v}{z}$, sive $\frac{z}{a}$, et restabit $\frac{z}{a} = \dot{y}$, et inde per Prob. II. fit $\frac{zz}{2a} = y$. Quod indicat Curvam AH, cui hæc Spiralis AD æquatur, esse Parabolam Apollonianam, cujus latus rectum existit $2a$, sive cujus incedens, BH, perpetuò æquatur semissi arcûs BD.

30. EXEMPL. 2. Si proponatur Spiralis, quam æquatio $z^3 = av^2$, sive $v = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ definit, emerget, per Prob. I. $\frac{3z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} = \dot{v}$. A quo si auferatur $\frac{v}{z}$, seu $\frac{z^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$, restabit $\frac{z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} = \dot{y}$, et inde per Prob. II. producetur $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}} = y$. Hoc est $\frac{1}{3}$BD$=$BH, existente AH Parabolâ secundi generis.

31. EXEMPL. 3. Si ad Spiralem sit $z\sqrt{\frac{a+z}{c}} = v$. Exinde per Prob. I. elicietur $\frac{2a+3z}{2\sqrt{ac+cz}} = \dot{v}$. A quo si auferatur $\frac{v}{z}$, sive $\sqrt{\frac{a+z}{c}}$, restabit $\frac{z}{2\sqrt{ac+zc}} = \dot{y}$. Jam cùm quantitas hâc fluxione $\dot{y}$ generata nequeat inveniri per ea quæ in Prob. II. habentur, nisi fiat resolutio in infinitam seriem, juxta tenorem Scholii Prob. IX. reduco ad formam æquationum in primâ columnâ Catalogorum, substituendo z^2 pro z; et evadit $\frac{z^{2-1}}{2\sqrt{ac+cz^2}} = \dot{y}$: æquatio nempe secundæ speciei quarti ordinis prioris Catalogi. Et conferendo terminos fit $d = \frac{1}{2}$; $e = ac$; & $f = c$: adeoque $\frac{z-2a}{3c}\sqrt{ac+cz}\ (=t) = y$, quæ æquatio est ad Curvam Geometricam AH, cui Spiralis AD æquatur.

PROB.

PROBLEMA XII.

CURVARUM LONGITUDINES.

Curvarum Longitudines determinare.

33. Fluxionem Curvæ lineæ in ſuperiore Problemate oſtendimus æqualem eſſe radici quadraticæ ſummæ quadratorum à fluxionibus baſis et perpendiculariter incedentis. Et proinde ſi baſis fluxionem pro uniformi ac determinatâ menſurâ, nimirum unitate, ad quam cæteræ fluxiones referantur, habeamus; et inſuper per æquationem, quæ Curvam definit, quæramus fluxionem Incedentis, habebitur fluxio Curvæ lineæ, à quâ longitudo ejus per Prob. II. elicienda eſt.

34. EXEMPL. I. Proponatur Curva FDH, quam æquatio $\frac{z^3}{aa} + \frac{aa}{12z} = y$ definit; poſito ſcilicet $z=$ baſi AB, ac $y=$ incedenti DB. Et ex æquatione illâ per Prob. I. elicietur $\frac{3zz}{aa} - \frac{aa}{12z^2} = \dot{y}$, exiſtente nimirum I fluxione ipſius z. Dein additis fluxionum quadratis, fit ſumma $\frac{9z^4}{a^4} + \frac{1}{2} + \frac{a^4}{144z^4} = tt$; et extractâ radice, $\frac{3zz}{aa} + \frac{aa}{12zz} = t$, indeque per Prob. II. $\frac{z^3}{aa} - \frac{aa}{12z} = t$.

35. Itaque ſi cujuſvis portionis Curvæ hujus, puta dD, longitudo deſideretur; à punctis d ac D demitte ad AB perpendicula db ac DB, et in valore t ſubſtitue quantitates Ab et AB ſeorſim pro z, ac differentia productorum erit longitudo quæſita dD. Quemadmodum ſi ſit A$b=\frac{1}{2}a$, et AB$=a$, ſcripto $\frac{1}{2}a$ pro z, evadet $t=-\frac{a}{24}$. Dein ſcripto a pro z, evadet $t=\frac{11a}{12}$: à quo ſi prior valor auferatur, reſtabit $\frac{23a}{24}$ pro longitudine dD. Vel ſi Ab tantùm definiatur eſſe $\frac{1}{2}a$, et AB ſpectetur indefinitè, reſtabit $\frac{z^3}{aa} - \frac{aa}{12z} + \frac{a}{24} = d$D.

36. Quòd ſi cupias noſcere portionem Curvæ quam t deſignat, finge valorem t æquari nihilo; et evadet $z^4 = \frac{a^4}{12}$, ſive $z = \frac{a}{\sqrt[4]{12}}$; adeoque

CAPUT XII. fi fumatur $Ab=\frac{a}{\sqrt[4]{12}}$, et erigatur bd, longitudo arcûs dD erit t, five $\frac{z^3}{aa}-\frac{aa}{12z}$. Et hæc de aliis Curvis generaliter intelligenda funt.

37. Ad eundem modum, quo hujus longitudinem determinavimus, fi pro aliâ Curvâ definiendâ proponatur æquatio $\frac{z^4}{a^3}+\frac{a^3}{32z^2}=y$, proveniet $\frac{z^4}{a^3}-\frac{a^3}{32z^2}=t$. Vel fi proponatur $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}=y$, proveniet $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}=t$. Vel generaliter fi fit $cz^{\theta}+\frac{z^{2-\theta}}{4\theta\theta c-8\theta c}=y$, ubi θ pro quolibet numero, five integro, five fracto, defignando adhibetur, erit $cz^{\theta}-\frac{z^{2-\theta}}{4\theta\theta c-8\theta c}=t$.

38. EXEMPL. 2. Proponatur Curva, quam æquatio $\frac{2a^2+2z^2}{3a^2}\sqrt{a^2+z^2}=y$ definit: et per Prob. I. obtinebitur $\dot{y}=\frac{4a^4z+8a^2z^3+4z^5}{3a^4y}$; five exterminato y, $\dot{y}=\frac{2z}{aa}\sqrt{a^2+z^2}$: cujus quadrato adde 1, et fumma erit $1+\frac{4zz}{aa}+\frac{4z^4}{a^4}$; ejufque radix $1+\frac{2z^2}{aa}=\dot{t}$, unde per Prob. II. obtinetur $z+\frac{2z^3}{3a^2}=t$.

39. EXEMPL. 3. Proponatur Parabola fecundi generis, ad quam æquatio eft $z^3=ay^2$, feu $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}=y$: et inde (per Prob. I.) elicietur $\frac{3z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}}=\dot{y}$; adeoque eft $\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}\,(\sqrt{1+\dot{y}\dot{y}})=\dot{t}$. Jam cùm longitudo per fluxionem $\dot{t}$ generata nequeat inveniri per Prob. II. abfque reductione in infinitam feriem fimplicium terminorum, confulo Catalogos ad Prob. VIII. et juxta ea quæ in Scholio ejus habentur, prodit $t=\frac{8a+18z}{27}\times\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$.

40. Et fic Parabolarum $z^5=ay^4$, $z^7=ay^6$, $z^9=ay^8$, &c. longitudines inveniri poffunt.

41. EXEMPL. 4. Proponatur Parabola, ad quam æquatio eft $z^4=ay^3$, five $\frac{z^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}=y$; et inde per Prob. I. orietur $\frac{4z^{\frac{1}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}}=\dot{y}$. Adeoque $\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}\,(=\sqrt{\dot{y}\dot{y}+1})=\dot{t}$. Quo invento, confulo Catalogos juxta Scholium prædictum, et factâ collatione cum fecundo Theoremate tertii ordinis pofterioris catalogi, prodit $z^{\frac{1}{3}}=x$; $\sqrt{1+\frac{16x^2}{9a^{\frac{2}{3}}}}=v$,

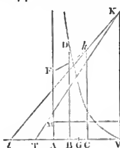
3 et

et $3s=t$. Ubi x designat basem, y ordinatim applicatam, & s aream Hyperbolæ, atque t longitudinem quæ oritur applicando aream $3s$ ad unitatem linearem. CURVARUM LONGITUDINES.

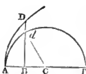
42. Eâdem methodo Parabolarum $z^6=ay^5$, $z^8=ay^7$, $z^{10}=ay^9$, &c. longitudines etiam per aream Hyperbolæ determinantur.

43. EXEMPL. 5. Proponatur Cissois Veterum; et existente ad eam æquatione $\frac{aa-2az+zz}{\sqrt{az-zz}}=y$, inde per Prob. I. elicietur $\frac{-a-3z}{2zz}\sqrt{az-zz}=\dot{y}$: et consequenter $\frac{a}{2z}\sqrt{\frac{a+3z}{z}}$ $(=\sqrt{\dot{y}\dot{y}+1})=i$; quæ, scribendo z^n pro $\frac{1}{z}$ seu z^{-1}, evadit $\frac{a}{2z}\sqrt{az^n+3}=i$, æquatio primæ speciei tertii ordinis posterioris Catalogi. Et collatis terminis fit $\frac{a}{z}=d$, $3=e$, et $a=f$; adeoque $z\ (=\frac{1}{z^n})=x^2$, $\sqrt{a+3x^2}=v$, & $6s-\frac{2v^3}{x}$ $(=\frac{4de}{nf}\text{ in }\frac{v^3}{2ex}-s)$ $=t$. Et adhibitâ a pro unitate, per cujus multiplicationem vel divisionem hæ quantitates ad justum dimensionum numerum reducantur, evadit $az=xx$, $\sqrt{aa+3xx}=v$, & $\frac{6s}{a}-\frac{2v^3}{ax}=t$. Quorum hæc est constructio.

44. Existente VD Cissoide, AV diametro circuli ad quam aptatur,



AF asymptoto ejus, ac DB perpendiculari ad AV; cum semiaxe AF=AV, & semiparametro $AG=\frac{1}{3}AV$, describatur Hyperbola FkK: et inter AB & AV sumptâ AC mediâ proportionali, erigantur ad C & V perpendicula Ck & VK, et agantur kt & KT rectæ tangentes Hyperbolam in k et K, et occurrentes AV in t ac T; et ad AV constituatur rectangulum VM æquale spatio TKkt; et Cissoidis VD longitudo erit sextupla altitudinis AM.



45. EXEMPL. 6. Existente Ad Ellipsi, quam æquatio $\sqrt{az-2zz}=y$, definit: proponatur Curva Mechanica AD, talis ut si Bd, seu y, producatur donec huic Curvæ ad D occurrat, sit BD æqualis arcui elliptico Ad. Jam quo hujus longitudo determinetur, æquatio $\sqrt{az-2zz}=y$, dabit $\frac{a-4z}{2\sqrt{az-2zz}}=\dot{y}$. Cujus quadrato si I addatur, prodit $\frac{a^2-4az+8z^2}{4az-8z^2}$ quadratum fluxionis arcûs

CAPUT XII. Ad: et huic si iterum addatur 1, provenit $\frac{aa}{4az-8zz}$; cujus radix $\frac{a}{2\sqrt{az-2zz}}$ est fluxio Curvæ lineæ AD. Ubi si è radicali extrahatur z, & pro z^{-1} scribatur z^{η}, habebitur $\frac{a}{2z\sqrt{az^{\eta}-2}}$ fluxio primæ speciei quarti ordinis posterioris Catalogi. Collatisque terminis exibunt $d=\frac{1}{2}a$, $e=-2$, & $f=a$: adeoque $z\,(=\frac{1}{z^{\eta}})=x$, $\sqrt{ax-2x^{2}}=v$, & $\frac{8s}{a}-\frac{4xv}{a}+v\;(=\frac{8de}{\eta ff}$ in $s-\frac{1}{2}xv-\frac{fv}{4e})=t$.

46. Quorum constructio est, ut ad Ellipsis centrum D actâ rectâ dC, constituatur super AC parallelogrammum æquale sectori ACd, et duplum altitudinis ejus ponatur esse longitudo Curvæ AD.

47. EXEMPL. 7. Existente $\alpha\beta=\phi$, & $\alpha\delta$ Hyperbolâ ad quam æquatio sit $\sqrt{-a+b\phi\phi}=\beta\delta$, actâque δT tangente ejus: proponatur Curva, VdD, cujus basis AB sit $\frac{1}{\phi\phi}$, & normaliter incedens, BD, longitudo, quæ oritur applicando aream $\alpha\delta$Tα ad unitatem linearem. Jam ut hujus αD longitudo determinetur, quæro fluxionem areæ $\alpha\delta$Tα, cùm AB uniformiter fluit; & invenio esse $\frac{a}{4bz}\sqrt{b-az}$, positâ AB$=z$, & fluxione ejus unitate. Nam est αT$=\frac{a}{b\phi}=\frac{a}{b}\sqrt{z}$; ejusque fluxio $\frac{a}{2b\sqrt{z}}$: cujus dimidium ductum in altitudinem $\beta\delta$, seu $\sqrt{-a+\frac{b}{z}}$, est fluxio areæ αTδ descriptæ per tangentem δT. Quare fluxio illa est $\frac{a}{4bz}\sqrt{b-az}$, atque hæc applicata ad unitatem fit fluxio incedentis BD. Hujus quadrato $\frac{aab-a^{3}z}{16bbz^{3}}$ adde 1, quadratum fluxionis ipsius AB, et prodit $\frac{a^{2}b-a^{3}z+16b^{2}z^{3}}{16b^{2}z^{3}}$; cujus radix $\frac{1}{4bz}\sqrt{a^{2}b-a^{3}z+16b^{2}z^{3}}$ est fluxio curvæ VD. Est autem hæc fluxio primæ speciei septimi ordinis posterioris Catalogi. Collatisque terminis exeunt $\frac{1}{4b}=d$, $aab=e$, $-a^{3}=f$, $16b^{2}=g$; adeoque $z=x$, & $\sqrt{a^{2}b-a^{3}x+16b^{2}x^{3}}=v$ (æquatio ad unam conicam sectionem, puta GH, (fig. 2) cujus area EFGH sit s, existente

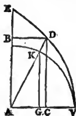
existente EF$=x$, & FG$=v$). Item $\frac{1}{z}=\xi$, et $\sqrt{16b^2-a^3\xi+ab\xi^2}=\Upsilon$ (æquatio ad aliam conicam sectionem, puta ML (fig. 3) cujus area IKLM sit σ, existente IK$=\xi$, & KL$=\Upsilon$) Denique $\frac{2aabb\xi\Upsilon - ab\Upsilon - a^4v - 4a^2b^2\sigma - 32abbs}{64b^4-a^4}$ $=t$. CURVARUM LONGITUDINES.

48. Quare ut Curvæ VD portionis cujuscunque, Dd, longitudo noscatur; demitte db normalem ad AB, fingeque AB$=z$, & exinde per jam inventa quære t: dein finge BA$=z$, & exinde etiam quære t: & horum duorum t differentia erit longitudo Dd.

49. EXEMPL. 8. Proponatur Hyperbola, ad quam æquatio est $\sqrt{aa+bzz}=y$; et inde (per Prob. I.) elicietur $\dot{y}=\frac{bz}{y}$, seu $\frac{bz}{\sqrt{aa+bzz}}$. Cujus quadrato adde 1, & summæ radix erit $\sqrt{\frac{aa+bzz+bbzz}{aa+bzz}}=\dot{t}$. Hanc fluxionem, cùm non reperiatur in Tabulis, reduco in infinitam seriem: & primò, per divisionem, evadit $\dot{t}=\sqrt{1+\frac{bz^2}{a^2}-\frac{bz^4}{a^4}+\frac{b^4z^6}{a^6}-\frac{bz^8}{a^8}}$ &c. dein per extractionem radicis $\dot{t}=1+\frac{b^2z^2}{2a^2}-\frac{4b^3+b^4}{8a^4}z^4+\frac{8b^4+4b^5+b^6}{16a^6}z^6$ &c. Et hinc per Prob. II. obtinetur t, seu longitudo Hyperbolæ $=z+\frac{b^2}{6a^2}z^3-\frac{4b^3+b^4}{40a^4}z^5+\frac{8b^4+4b^5+b^6}{112a^6}z^7$ &c.

50. Quòd si Ellipsis, $\sqrt{aa-bzz}=y$, proponatur; debet signum ipsius b ubique mutari: & habebitur $z+\frac{b^2}{6a^2}z^3+\frac{4b^3-b^4}{40a^4}z^4+\frac{8b^4-4b^5+b^6}{112a^6}z^5$ &c. pro longitudine ejus. Et positâ insuper unitate pro b, emerget $z+\frac{z^3}{6a^2}+\frac{3z^5}{40a^4}+\frac{5z^7}{112a^6}$ &c. pro longitudine Circuli: cujus seriei numerales coefficientes in infinitum inveniuntur, multiplicando continuò terminos hujus progressionis, $\frac{1\times 1}{2\times 3}$, $\frac{3\times 3}{4\times 5}$, $\frac{5\times 5}{6\times 7}$, $\frac{7\times 7}{8\times 9}$, $\frac{9\times 9}{10\times 11}$, &c.

51. EXEMPL. 9. Proponatur denique Quadratrix, VDE, cujus vertex est V, existente A centro, et AV semidiametro Circuli interioris ad quam aptatur, atque angulo VAE recto. Actâ jam rectâ quâlibet AKD secante Circulum istum in K et Quadraticem in D, demissisque ad AV, AE normalibus KG, DB; dic AV, a; KG, z; VK, x; & BD, y; eritque ut in superiore exemplo, $x=z+\frac{z^3}{6a^2}+\frac{3z^5}{40a^4}+\frac{5z^7}{112a^6}$ &c. Extrahe radicem z, et emerget $z=x-\frac{x^3}{6a^2}+\frac{x^5}{120a^4}-\frac{x^7}{5040a^6}$ &c. Cujus quadratum



CAPUT XII. dratum aufer de $\overline{AK}^2$, et refidui radix $a - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^4}{24a^3} - \frac{x^6}{720a^5} +$ &c. erit AG. Jam cùm ex naturâ Quadratricis fit AB=VK=x, fitque etiam GK:AG::AB:BD (y), divide AB×AG per GK, et orietur $y = a - \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5}$ &c. Et inde per Prob. I. $\dot{y} = -\frac{2x}{3a} - \frac{4x^3}{45a^3} - \frac{4x^5}{315a^5}$ &c. Cujus quadrato adde 1, et fummæ radix erit $1 + \frac{2x^2}{9a^2} + \frac{14x^4}{405a^4} + \frac{604x^6}{127575a^6}$ &c. $= \dot{t}$; unde per Prob. II. obtinetur t feu Quadratricis arcus VD$= x + \frac{2x^3}{27a^2} + \frac{14x^5}{2025a^4} + \frac{604x^7}{893025a^6}$ &c.

FINIS GEOMETRIÆ ANALYTICÆ.

METHODUS

METHODUS

DIFFERENTIALIS.

METHODUS

DIFFERENTIALIS.

PROP. I.

Si figuræ curvilineæ Abſciſſa componatur ex quantitate quâvis datâ A, *& quantitate indeterminatâ* x, *& Ordinata conſtet ex datis quotcunque quantitatibus* b, c, d, e, *&c. in totidem terminos hujus progreſſionis geometricæ* x, x^2, x^3, x^4, *&c. reſpectivè ductis, & ad Abſciſſæ puncta totidem data erigantur ordinatim applicatæ: dico quòd Ordinatarum differentiæ primæ dividi poſſint per earum intervalla; & differentiarum ſic diviſarum differentiæ dividi poſſint per Ordinatarum binarum intervalla; & harum differentiarum ſic diviſarum differentiæ dividi poſſint per Ordinatarum ternarum intervalla; & ſic deinceps in infinitum.*

ETENIM ſi pro Abſciſſæ parte indeterminatâ, x, ponantur quantitates quævis datæ p, q, r, s, t, &c. ſucceſſivè, & ad Abſciſſarum ſic datarum terminos erigantur Ordinatæ α, β, γ, ε, δ, &c. Hæ Abſciſſæ & Ordinatæ & ordinatarum differentiæ diviſæ per Abſciſſarum differentias (quæ utique ſunt Ordinatarum intervalla) & quotorum differentiæ diviſæ per Ordinatarum alternarum differentias, & ſic deinceps, exhibentur per Tabulam ſequentem.

Prop. II.

Abscissæ	Ordinatæ
$A+p$	$A+bp+cp^2+dp^3+ep^4=\alpha$
$A+q$	$A+bq+cq^2+dq^3+eq^4=\beta$
$A+r$	$A+br+cr^2+dr^3+er^4=\gamma$
$A+s$	$A+bs+cs^2+ds^3+es^4=\delta$
$A+t$	$A+bt+ct^2+dt^3+et^4=\varepsilon$
Divisor. Diff. Ord.	Quoti per divisionem prodeuntes.
$p-q)\ \alpha-\beta$	$b+c\times\overline{p+q}+d\times\overline{pp+pq+qq}+e\times\overline{p^3+p^2q+pq^2+q^3}=\zeta$
$q-r)\ \beta-\gamma$	$b+c\times\overline{q+r}+d\times\overline{qq+qr+rr}+e\times\overline{q^3+q^2r+qr^2+r^3}=\eta$
$r-s)\ \gamma-\delta$	$b+c\times\overline{r+s}+d\times\overline{rr+rs+ss}+e\times\overline{r^3+r^2s+rs^2+s^3}=\theta$
$s-t)\ \delta-\varepsilon$	$b+c\times\overline{s+t}+d\times\overline{ss+st+tt}+e\times\overline{s^3+s^2t+st^2+t^3}=\kappa$
$p-r)\ \zeta-\eta$	$c+d\times\overline{p+q+r}+e\times\overline{pp+pq+qq+pr+qr+rr}=\lambda$
$q-s)\ \eta-\theta$	$c+d\times\overline{q+r+s}+e\times\overline{qq+qr+rr+qs+rs+ss}=\mu$
$r-t)\ \theta-\kappa$	$c+d\times\overline{r+s+t}+e\times\overline{rr+rs+ss+rt+st+tt}=\nu$
$p-s)\ \lambda-\mu$	$d+e\times\overline{p+q+r+s}=\xi$.
$q-t)\ \mu-\nu$	$d+e\times\overline{q+r+s+t}=\pi$
$p-t)\ \xi-\pi$	$e=\sigma$

PROP. II.

Iisdem positis, & quòd numerus terminorum b, c, d, e, &c. sit finitus, dico quòd Quotorum ultimus æqualis erit ultimo terminorum b, c, d, e, &c. et quòd per quotos reliquos dabuntur termini reliqui b, c, d, e, &c. et his datis dabitur Linea Curva generis Parabolici, quæ per Ordinatarum omnium terminos transibit.

Etenim in Tabulâ superiore quotus ultimus, σ, æqualis erat termino ultimo e. Et hic terminus ductus in summam datam $\overline{p+q+r+s}$, & ablatus de quoto ξ relinquit terminum penultimum d. Et quantitates jam datæ $d\times\overline{p+q+r}+e\times\overline{pp+pq+qq+pr+qr+rr}$, si auferantur de quoto λ, relinquunt terminorum antepenultimum c. Et quantitates jam datæ $c\times\overline{p+q}+d\times\overline{pp+pq+qq}+e\times\overline{p^3+ppq+pqq+q^3}$, si auferantur de quoto ζ, relinquunt terminum b. Et simili computo, si plures essent termini, colligerentur omnes per quotorum ordines totidem. Deinde quantitates datæ $bp+cpp+dp^3+ep^4$, si subducantur de Ordinatâ primâ α, relinquunt Abscissæ terminum primum A. Et quantitas $A+bx+cx^2+dx^3+ex^4+$ &c. est Ordinata Curvæ generis Parabolici, quæ per Ordinatarum omnium datarum terminos transibit, existente Abscissâ $A+x$.

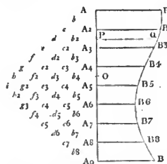
Ex his Propositionibus quæ sequuntur facilè colligi possunt.

PROP.

PROP. III.

Si recta aliqua AA9 *in æquales quotcunque partes* AA2, A2A3, A3A4, A4A5, *&c. dividatur, & ad puncta divisionum erigantur parallelæ* AB, A2B2, A3B3, *&c. Invenire Curvam Geometricam generis Parabolici, quæ per omnium erectarum terminos* B, B2, B3, *&c. transibit.*

Erectarum AB, A2B2, A3B3, &c. quære differentias Primas, b, $b2$, $b3$, &c. Secundas c, $c2$, $c3$, &c. Tertias d, $d2$, $d3$, &c. et sic deinceps usque dum veneris ad ultimam differentiam, quæ hic sit i.



Tunc incipiendo ab ultimâ differentiâ excerpe medias differentias in alternis Columnis vel Ordinibus differentiarum; & Arithmetica media inter duas medias reliquarum, ordine pergendo usque ad seriem primorum terminorum AB, A2B2, A3B3, &c. sint hæc k, l, m, n, o, p, q, r, s, &c. quorum ultimus significet ultimam differentiam; penultimus medium arithmeticum inter duas penultimas differentias; antepenultimus mediam trium antepenultimarum differentiarum, & sic deinceps usque ad primum, quod erit vel medius terminorum A, A2, A3, &c. vel arithmeticus medius inter duos medios. Prius accidit ubi numerus terminorum A, A2, A3, &c. est impar; posterius ubi par.

CAS. I.

In Casu priori, sit A5B5 iste medius terminus, hoc est, A5B5 $=k$; $\frac{b4+b5}{2}=l$; $c4=m$; $\frac{d3+d4}{2}=n$; $e3=o$; $\frac{f2+f3}{2}=p$; $g2=q$; $\frac{h+h2}{2}=r$; $i=s$. Et erectâ ordinatim applicatâ PQ, dic A5P$=x$; & duc terminos hujus progressionis $1 \times \frac{x}{1} \times \frac{x}{2} \times \frac{x^2-1}{3x} \times \frac{x}{4} \times \frac{x^2-4}{5x} \times \frac{x}{6} \times$

PROP. III. $\frac{x^2-9}{7x} \times \frac{x}{8} \times \frac{x^2-16}{9x} \times \frac{x}{10} \times \frac{x^2-25}{11x} \times \frac{x}{12} \times \frac{x^2-36}{13x}$ &c. in se continuò; & orientur termini $1.\ x.\ \frac{x^2}{2}.\ \frac{x^3-x}{6}.\ \frac{x^4-x^2}{24}.\ \frac{x^5-5x^3+4x}{120}.\ \frac{x^6-5x^4+4x^2}{720}$ $\frac{x^7-14x^5+49x^3-36x}{5040}$ &c. per quos si termini seriei k, l, m, n, o, p, &c. respectivè multiplicentur, aggregatum factorum $k + xl + \frac{x^2}{2}m + \frac{x^3-x}{6}n + \frac{x^4-x^2}{24}o + \frac{x^5-5x^3+4x}{120}p +$ &c. erit longitudo ordinatim applicatæ PQ.

CAS. II.

In Casu posteriori, sint A4B4, A5B5 duo medii termini; hoc est, sit $\frac{A4B4+A5B5}{2}=k$; $b4=l$; $\frac{c3+c4}{2}=m$; $d3=n$; $e2+e3=o$; $f2=p$; $\frac{g+g2}{2}=q$; & $b=r$. Et erectâ ordinatim applicatâ PQ, bisseca A4A5 in O, & dicto $OP=x$, duc terminos hujus progressionis $1 \times \frac{x}{1} \times \frac{xx-\frac{1}{4}}{2x} \times \frac{x}{3} \times \frac{xx-\frac{9}{4}}{4x} \times \frac{x}{5} \times \frac{xx-\frac{25}{4}}{6x} \times \frac{x}{7} \times \frac{xx-\frac{49}{4}}{8x}$, &c. in se continuò; et orientur termini $1.\ x.\ \frac{4xx-1}{8}.\ \frac{4x^3-x}{24}.\ \frac{16x^4-40x^2+9}{384}.$ &c. per quos si termini seriei k, l, m, n, o, p, q, &c. respectivè multiplicentur, aggregatum factorum $k+xl+\frac{4x^2-1}{8}m+\frac{4x^3-x}{24}n+\frac{16x^4-40x^2+9}{384}o+$ &c. erit longitudo ordinatim applicatæ PQ.

Sed hîc notandum est, quòd intervalla AA2, A2A3, A3A4, &c. hîc supponantur esse unitates, & quòd differentiæ colligi debent auferendo inferiores quantitates de superioribus, A2B2 de AB, A3B3 de A2B2, $b2$ de b, &c. et faciendo ut sint $AB-A2B2=b$, $A2B2-A3B3=b2$, $b-b2=c$, &c. adeoque quando differentiæ illæ hoc modo prodeunt negativæ, signa earum mutanda sunt.

PROP. IV.

Si recta aliqua in partes quotcunque inæquales AA2, A2A3, A3A4, A4A5, *&c. dividatur, & ad puncta divisionum erigantur parallelæ* AB, A2B2, A3B3, *&c. invenire Curvam Geometricam generis Parabolici, quæ per omnium erectarum terminos* B, B2, B3, *&c. transibit.*

Sunto puncta data B, B2, B3, B4, B5, B6, B7, &c. et ad Abscissam quamvis, AA7, demitte Ordinatas perpendiculariter BA, B2A2, &c. Et

Et fac $\frac{AB - A2B2}{AA2} = b$, $\frac{A2B2 - A3B3}{A2A3} = b2$, $\frac{A3B3 - A4B4}{A3A4} = b3$, $\frac{A4B4 - A5B5}{A4A5} = b4$, $\frac{A5B5 - A6B6}{A5A6} = b5$, $\frac{A6B6 - A7B7}{A6A7} = b6$, $\frac{-A7B7 - A8B8}{A7A8} = b7$. Deinde $\frac{b - b2}{AA3} = c$, $\frac{b2 - b3}{A2A4} = c2$, $\frac{b3 - b4}{A3A5} = c3$, &c. Tunc $\frac{c - c2}{AA4} = d$, $\frac{c2 - c3}{A2A5} = d2$, $\frac{c3 - c4}{A3A6} = d3$, &c. Et $\frac{d - d2}{AA5} = e$, $\frac{d2 - d3}{A2A6} = e2$, $\frac{d3 - d4}{A3A7} = e3$, &c.

Sic pergendum eſt ad ultimam differentiam.

Differentiis ſic collectis & diviſis per intervalla ordinatim applicatarum; in alternis earum columnis, ſive ſeriebus vel ordinibus, excerpe medias, incipiendo ab ultimâ; & in reliquis columnis excerpe media arithmetica inter duas medias, pergendo uſque ad ſeriem primorum terminorum, AB, A2B2, &c. Sunto hæc k, l, m, n, o, p, q, r, &c. quorum ultimus terminus ſignificet ultimam differentiam; penultimus medium arithmeticum inter duas penultimas; antepenultimus mediam trium antepenultimarum, &c. Et primus k erit media ordinatim applicata, ſi numerus datorum punctorum eſt impar; vel medium arithmeticum inter duas medias, ſi numerus eorum eſt par.

CAS. I.

In Caſu priori, ſit A4B4 iſta media ordinatim applicata; hoc eſt, ſit $A4B4 = k$; $\frac{b3 + b4}{2} = l$; $c3 = m$; $\frac{d2 + d3}{2} = n$; $e2 = o$; $\frac{f + f2}{2} = p$; $g = q$. Et erectâ ordinatim applicatâ PQ, & in baſi AA5 ſumpto quovis puncto O, dic $OP = x$, & duc in ſe gradatim terminos hujus progreſſionis, $1 \times \overline{x - OA4} \times \overline{x - \frac{OA3 + OA5}{2}} \times \frac{\overline{x - OA3} \times \overline{x - OA5}}{x - \frac{1}{2}OA3 + OA5} \times \overline{x - \frac{OA2 + OA6}{2}} \times$ &c. et ortam progreſſionem aſſerva; vel quod perinde eſt, duc terminos hujus progreſſionis $1 \times \overline{x - OA4} \times \overline{x - OA3} \times \overline{x - OA5} \times \overline{x - OA2} \times \overline{x - OA6} \times \overline{x - OA} \times \overline{x - OA7} \times$ &c. in ſe gradatim; & terminos exinde ortos duc reſpectivè in terminos hujus progreſſionis, $1.\ x - \frac{+OA3 + OA5}{2}.\ x - \frac{+OA2 + OA6}{2}.\ x - \frac{+OA + OA7}{2}$, &c. et orientur

termini

PROP. IV. termini intermedii, totâ progreſſione exiſtente $1.\ x - OA4.\ x^2 - \overline{\frac{+OA3 + 2OA4 + OA5}{2}}\, x + \frac{OA3 + OA5}{2} \times OA4$, &c.

Vel dic $OA = \alpha$; $OA2 = \beta$; $OA3 = \gamma$; $OA4 = \delta$; $OA5 = \varepsilon$; $OA6 = \zeta$; $OA7 = \eta$: $\frac{OA3 + OA5}{2} = \theta$; $\frac{OA2 + OA6}{2} = \chi$; $\frac{OA + OA7}{2} = \lambda$. Et ex progreſſione $1 \times \overline{x - \delta} \times \overline{x - \gamma} \times \overline{x - \varepsilon} \times \overline{x - \beta} \times \overline{x - \zeta} \times \overline{x - \alpha} \times \overline{x - \eta}$ &c. collige terminos. Quibus multiplicatis per $1.\ x - \theta,\ x - \chi,\ x - \lambda$, &c. collige alios terminos intermedios; totâ ſerie prodeunte $1,\ x - \delta,\ x^2 - \overline{\delta + \theta}\, x + \delta\theta,\ x^3 - \overline{\delta + 2\theta}\, x^2 + \overline{\gamma\varepsilon + 2\delta\theta}\, x - \gamma\delta\varepsilon$, &c. per cujus terminos multiplica ſeries k, l, m, n, o, &c. Et aggregatum productorum $k + \overline{x - \delta} \times l + \overline{x^2 - \overline{\delta + \theta}\, x + \delta\theta} \times m +$ &c. erit longitudo ordinatim applicatæ PQ.

CAS. II.

In Caſu poſteriori, ſint $A4B4$, $A5B5$ duæ mediæ ordinatim applicatæ; hoc eſt, $\frac{A4B4 + A5B5}{2} = k$; $b4 = l$; $\frac{c3 + c4}{2} = m$; $d3 = n$; $\frac{e2 + e3}{2} = o$; $f2 = p$; &c. Et alternorum k, m, o, q, &c coefficientes orientur ex multiplicatione terminorum hujus progreſſionis in ſe; $1 \times \overline{x - OA4} \times \overline{x - OA5} \times \overline{x - OA3} \times \overline{x - OA6} \times \overline{x - OA2} \times \overline{x - OA7} \times \overline{x - OA} \times \overline{x - OA8}$ &c. Et reliquorum coefficientes ex multiplicatione horum per terminos hujus progreſſionis; $x - \frac{+OA4 + OA5}{2}$, $x - \frac{+OA3 + OA6}{2}$, $x - \frac{+OA2 + OA7}{2}$, $x - \frac{+OA + OA8}{2}$, &c. Hoc eſt, erit $k + \overline{x - \frac{+OA4 + OA5}{2}} \times l + \overline{x^2 - \overline{OA4 + OA5}\, x + OA4 \times OA5} \times m$ &c. ordinatim applicata PQ. Vel PQ=

$$\begin{array}{llllllllll} k+ & x & \times l+ & x & \times+ & x & \times m+ & x & \times+ & x & \times+ x & \times n \text{ \&c.} \\ & -\frac{1}{2}OA4 & & -OA4 & & -OA5 & & -OA4 & & -OA5 & -\frac{1}{2}OA3 & \\ & -\frac{1}{2}OA5 & & & & & & & & & -\frac{1}{2}OA6 & \end{array}$$

Sive dic $x - \frac{+OA4 + OA5}{2} = \pi$, $\overline{x - OA4} \times \overline{x - OA5} = \varrho$,

$\varrho \times \overline{x - \frac{+OA3 + OA6}{2}} = \sigma$, $\varrho \times \overline{x - OA3} \times \overline{x - OA6} = \tau$,

$\tau \times \overline{x - \frac{+OA2 + OA7}{2}} = \upsilon$, $\tau \times \overline{x - OA2} \times \overline{x - OA7} = \varphi$,

$\varphi \times \overline{x - \frac{+OA + OA8}{2}} = \chi$, $\varphi \times \overline{x - OA} \times \overline{x - OA8} = \psi$,

Et erit $k + \pi l + \varrho m + \sigma n + \tau o + \upsilon p + \varphi q + \chi r + \psi s =$ PQ.

PROP. V.

Datis aliquot terminis feriei cujufcunque ad data intervalla difpofitis, invenire terminum quemvis intermedium quamproximè.

Ad rectam pofitione datam erigantur termini dati in dato angulo, interpofitis datis intervallis, & per eorum puncta extima, per propofitiones præcedentes, ducatur Linea Curva generis Parabolici. Hæc enim continget terminos omnes intermedios per feriem totam.

PROP. VI.

Figuram quamcunque curvilineam quadrare quamproximè, cujus Ordinatæ aliquot inveniri poffunt.

Per terminos Ordinatarum ducatur Linea Curva generis Parabolici, ope propofitionum præcedentium. Hæc enim figuram terminabit, quæ femper quadrari poteft, et cujus area æquabitur areæ figuræ propofitæ quamproximè.

SCHOLIUM.

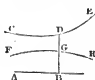
Utiles funt hæ Propofitiones ad tabulas conftruendas per interpolationem ferierum, ut & ad folutiones Problematum quæ à quadraturis Curvarum dependent; præfertim fi Ordinatarum intervalla & parva fint & æqualia inter fe, & Regulæ computentur, & in ufum referventur pro dato quocunque numero Ordinatarum. Ut fi quatuor fint Ordinatæ ad æqualia intervalla fitæ, fit A fumma primæ & quartæ, B fumma fecundæ & tertiæ, & R intervallum inter primam & quartam; & Ordinata nova in medio omnium erit $\frac{9B-A}{16}$, & Area tota inter primam & quartam erit $\frac{A+3B}{8}R$.

Et nota, quòd ubi Ordinatæ ftant ad æquales ab invicem diftantias, fumendo fummas Ordinatarum quæ ab Ordinatâ mediâ hinc inde æqualiter diftant, & duplum Ordinatæ mediæ, componitur Curva nova, cujus area per pauciores Ordinatas determinatur, & æqualis eft areæ Curvæ prioris, quam invenire oportuit. Quinetiam fi pro Ordinatis novis fumantur fumma Ordinatæ primæ & fecundæ,

SCHOLIUM. ſecundæ, et ſumma tertiæ & quartæ, & ſumma quintæ & ſextæ, & ſic deinceps; vel ſi ſumantur ſumma trium primarum Ordinatarum, & ſumma trium proximarum, & ſumma trium quæ ſunt deinceps; vel ſi ſumantur ſummæ quaternarum Ordinatarum, vel ſummæ quinarum; Area Curvæ novæ æqualis erit areæ Curvæ primò propoſitæ. Et ſic habitis Curvæ quadrandæ Ordinatis quotcunque, quadratura ejus ad quadraturam Curvæ alterius per pauciores Ordinatas reducetur.

Per data verò puncta quotcunque non ſolùm Curvæ lineæ generis Parabolici, ſed etiam Curvæ lineæ innumeræ diverſorum generum duci poſſunt.

Sunto CDE, FGH Curvæ duæ Abſciſſam habentes communem AB, et Ordinatas in eâdem rectâ jacentes BD, BG; & relatio inter has Ordinatas definiatur per æquationem quamcunque. Dentur puncta quotcunque, per quæ Curva CDE tranſire debet, & per æquationem illam dabuntur puncta totidem nova, per quæ Curva FGH tranſibit. Per propoſitiones ſuperiores deſcribatur Curva FGH generis Parabolici, quæ per puncta illa omnia nova tranſeat; & per æquationem eandem dabitur Curva CDE, quæ per puncta omnia primò data tranſibit.



ENUMERATIO

LINEARUM TERTII ORDINIS.

ARGUMENTI CAPITUM HUJUS LIBRI.

ENUMERATIO

LINEARUM TERTII ORDINIS.

CAPUT PRIMUM.

Linearum Ordines.

LINEÆ Geometricæ ſecundum numerum dimenſionum æquationis, quâ relatio inter Ordinatas & Abſciſſas definitur, vel (quod perinde eſt) ſecundum numerum punctorum in quibus à lineâ rectâ ſecari poſſunt, optimè diſtinguuntur in Ordines. Quâ ratione linea Primi Ordinis erit recta ſola; eæ Secundi ſive quadratici Ordinis erunt Sectiones Conicæ & Circulus; & eæ Tertii ſive cubici Ordinis Parabola Cubica, Parabola *Neiliana*, Ciſſois Veterum, & reliquæ quas hîc enumerare ſuſcepimus. Curva autem primi generis (ſiquidem recta inter curvas non eſt numeranda) eadem eſt cum lineâ ſecundi ordinis; & Curva ſecundi generis eadem cum lineâ ordinis tertii. Et linea ordinis infiniteſimi, ea eſt quam recta in punctis infinitis ſecare poteſt; qualis eſt Spiralis, Cyclois, Quadratrix, & linea omnis quæ per radii, vel rotæ, revolutiones infinitas generatur.

CAPUT SECUNDUM.

Proprietates Sectionum Conicarum competunt Curvis ſuperiorum generum.

SECTIONUM conicarum proprietates præcipuæ à Geometris paſſim traduntur. Et conſimiles ſunt proprietates Curvarum ſecundi generis, & reliquarum, ut ex ſequenti proprietatum præcipuarum enumeratione conſtabit.

Caput II. 1. *De Curvarum secundi generis Ordinatis, Diametris, Verticibus, Centris, Axibus.*

Si rectæ plures parallelæ, & ad Conicam Sectionem utrinque terminatæ, ducantur, recta duas earum bisecans bisecabit alias omnes, ideoque dicitur *Diameter* figuræ; & rectæ bisectæ dicuntur *Ordinatim Applicatæ* ad diametrum; & concursus omnium diametrorum est *Centrum* figuræ; & intersectio Curvæ & Diametri *Vertex* nominatur; & diameter illa *Axis* est, cui ordinatim applicatæ insistunt ad angulos rectos. Et ad eundem modum in Curvis secundi generis, si rectæ duæ quævis parallelæ ducantur occurrentes Curvæ in tribus punctis: recta, quæ ita secat has parallelas, ut summa duarum partium, ex uno secantis latere ad Curvam terminatarum, æquetur parti tertiæ ex altero latere ad Curvam terminatæ, eodem modo secabit omnes alias his parallelas, Curvæque in tribus punctis occurrentes rectas; hoc est, ita ut summa partium duarum, ex uno ipsius latere, semper æquetur parti tertiæ ex altero latere. Has itaque tres partes, quæ hinc inde æquantur, *Ordinatim Applicatas*; & rectam secantem, cui ordinatim applicantur, *Diametrum*; & intersectionem diametri & Curvæ, *Verticem*; & concursum duarum diametrorum, *Centrum* nominare licet. Diameter autem ad ordinatas rectangula, si modò aliqua sit, etiam *Axis* dici potest; & ubi omnes diametri in eodem puncto occurrunt, istud erit *Centrum Generale*.

2. *De Asymptotis & earum proprietatibus.*

Hyperbola primi generis duas *Asymptotos*, ea secundi tres, ea tertii quatuor & non plures habere potest, & sic in reliquis. Et quemadmodum partes lineæ cujusvis rectæ, inter Hyperbolam Conicam & duas ejus Asymptotos, sunt hinc inde æquales: sic in Hyperbolis secundi generis, si ducatur recta quævis secans tam Curvam quàm tres ejus Asymptotos in tribus punctis, summa duarum partium istius rectæ, quæ à duobus quibusvis Asymptotis in eandem plagam ad duo puncta Curvæ extenduntur, æqualis erit parti tertiæ, quæ à tertiâ Asymptoto in plagam contrariam ad tertium Curvæ punctum extenditur.

3. De

3. *De Lateribus Rectis & Transversis.*

Et quemadmodum in Conicis Sectionibus non Parabolicis, quadratum ordinatim applicatæ, hoc est, rectangulum Ordinatarum, quæ ad contrarias partes diametri ducuntur, est ad rectangulum partium diametri, quæ ad vertices Ellipseos vel Hyperbolæ terminantur, ut data quædam linea, quæ dicitur *Latus Rectum*, ad partem diametri, quæ inter Vertices jacet & dicitur *Latus Transversum*: sic in Curvis non Parabolicis secundi generis, parallelepipedum sub tribus ordinatim applicatis est ad parallelepipedum sub partibus diametri, ad ordinatas & tres vertices figuræ abscissis, in ratione quâdam datâ: in quâ ratione si sumantur tres rectæ ad tres partes diametri, inter vertices figuræ sitas, singulæ ad singulas, tunc illæ tres rectæ dici possunt *Latera Recta* figuræ; & illæ partes diametri inter vertices, *Latera Transversa*. Et sicut in Parabolâ Conicâ, quæ ad unam & eandem diametrum unicum tantùm habet verticem, rectangulum sub ordinatis æquatur rectangulo sub parte diametri, quæ ad ordinatas & verticem abscinditur, & rectâ quâdam datâ, quæ *Latus Rectum* dicitur: sic in Curvis secundi generis, quæ non nisi duos habent vertices ad eandem diametrum, parallelopipedum sub ordinatis tribus æquatur parallelopipedo sub duabus partibus diametri, ad ordinatas & vertices illos duos abscissis, & rectâ quâdam datâ, quæ proinde *Latus Rectum* dici potest.

4. *De Ratione contentorum sub parallelarum segmentis.*

Denique sicut in Conicis Sectionibus, ubi duæ parallelæ ad Curvam utrinque terminatæ secantur à duabus parallelis ad Curvam utrinque terminatis, prima à tertiâ, & secunda à quartâ, rectangulum partium primæ est ad rectangulum partium tertiæ ut rectangulum partium secundæ ad rectangulum partium quartæ: sic ubi quatuor tales rectæ occurrunt Curvæ secundi generis, singulæ in tribus punctis, parallelopipedum partium primæ rectæ erit ad parallelopipedum partium tertiæ, ut parallelopipedum partium secundæ ad parallelopipedum partium quartæ.

5. De

CAPUT III.

5. *De Cruribus Hyperbolicis & Parabolicis & eorum plagis.*

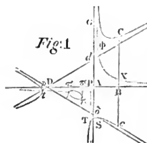
Curvarum ſecundi & ſuperiorum generum, æquè atque primi, crura omnia, in infinitum progredientia, vel *Hyperbolici* ſunt generis vel *Parabolici*. Crus *Hyperbolicum* voco, quod ad Aſymptoton aliquam in infinitum appropinquat; *Parabolicum*, quod Aſymptoto deſtituitur. Hæc crura ex tangentibus optimè dignoſcuntur. Nam ſi punctum contactûs in infinitum abeat, tangens cruris Hyperbolici cum Aſymptoto coincidet, & tangens cruris Parabolici in infinitum recedet, evaneſcet, & nullibi reperietur. Invenitur igitur Aſymptotos cruris cujuſvis, quærendo tangentem cruris illius ad punctum infinitè diſtans. Plaga autem cruris infiniti invenitur, quærendo poſitionem rectæ cujuſvis, quæ tangenti parallela eſt, ubi punctum contactûs in infinitum abit. Nam hæc recta in eandem plagam cum crure infinito dirigitur.

CAPUT TERTIUM.

Reductio curvarum omnium generis ſecundi ad æquationum caſus quatuor.

1. LINEÆ omnes Ordinis primi, tertii, quinti, ſeptimi & imparis cujuſque, duo habent ad minimum crura in infinitum verſus plagas oppoſitas progredientia. Et lineæ omnes Tertii ordinis duo habent ejuſmodi crura in plagas oppoſitas progredientia, in quas nulla alia earum crura infinita (præterquam in Parabolâ *Carteſianâ)* tendunt.

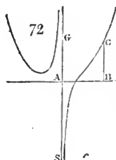
CAS. I.



Si crura illa ſint Hyperbolici generis, ſit GAS eorum Aſymptotos; & huic parallela agatur recta quævis, CBc, ad Curvam utrinque (ſi fieri poteſt) terminata, eademque biſecetur in puncto X; & locus puncti illius X erit Hyperbola Conica, puta XΦ, cujus una Aſymptotos eſt AG. Sit ejus altera Aſymptotos AB; & æquatio, quâ relatio inter Ordinatam BC & Abſciſſam AB definitur,

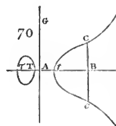
finitur, ſi AB dicatur x, & BC y, ſemper induet hanc formam, $xyy+ey=ax^3+bxx+cx+d$. Ubi termini, e, a, b, c, d, deſignant quantitates datas, ſignis ſuis + & − affectas; quarum quælibet deeſſe poſſunt, modò ex earum defectu figura in ſectionem conicam non vertatur. Poteſt autem Hyperbola illa Conica cum aſymptotis ſuis coincidere, id eſt punctum X in rectâ AB locari: & tunc terminus $+ey$ deeſt. Genera Curvarum Tertii Ordinis.

CAS. II.



At ſi recta illa CBc non poteſt utrinque ad Curvam terminari, ſed Curvæ in unico tantùm puncto occurrit: age quamvis poſitione datam rectam, AB, Aſymptoto AS occurrentem in A; ut & aliam quamvis, BC, Aſymptoto illi parallelam, Curvæque occurrentem in puncto C: & æquatio, quâ relatio inter Ordinatam BC & Abſciſſam AB definitur, ſemper induet hanc formam, $xy=ax^3+bx^2+cx+d$.

CAS. III.

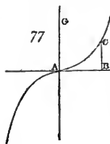


Quòd ſi crura illa oppoſita Parabolici ſint generis, recta CBc ad Curvam utrinque, ſi fieri poteſt, terminata in plagam crurum ducatur, & biſecetur in B: & locus puncti B erit linea recta. Sit iſta AB, terminata ad datum quodvis punctum A; & æquatio, quâ relatio inter Ordinatam BC & Abſciſſam AB definitur, ſemper induet hanc formam, $yy=ax^3+bx^2+cx+d$.

CAS. IV.

At verò ſi recta illa CBc in unico tantùm puncto occurrat Curvæ,

CAPUT III.



væ, ideoque ad Curvam utrinque terminari non possit: sit punctum illud C, & incidat recta illa, ad punctum B, in rectam quamvis aliam positione datam, & ad datum quodvis punctum A terminatam, AB: & æquatio, quâ relatio inter Ordinatam BC & Abscissam AB definitur, semper induet hanc formam, $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

Nomina formarum.

2. Enumerando Curvas horum casuum, Hyperbolam vocabimus *Inscriptam*, quæ tota jacet in Asymptoton angulo, ad instar Hyperbolæ Conicæ; *Circumscriptam*, quæ Asymptotos secat, & partes abscissas in sinu suo amplectitur; *Ambigenam*, quæ uno crure infinito inscribitur, & altero circumscribitur; *Convergentem*, cujus crura concavitate suâ se invicem respiciunt, & in plagam eandem diriguntur; *Divergentem*, cujus crura convexitate suâ se invicem respiciunt, et in plagas contrarias diriguntur; *Cruribus Contrariis præditam*, cujus crura in partes contrarias convexa sunt, & in plagas contrarias infinita; *Conchoidalem*, quæ vertice concavo & cruribus divergentibus ad Asymptoton applicatur; *Anguineam*, quæ flexibus contrariis Asymptoton secat, & utrinque in crura contraria producitur; *Cruciformem*, quæ conjugatam decussat; *Nodatam*, quæ seipsam decussat, in orbem redeundo; *Cuspidatam*, cujus partes duæ in angulo contactûs concurrunt, & ibi terminantur; *Punctatam*, quæ conjugatam habet Ovalem infinitè parvam, id est punctum; & *Puram*, quæ per impossibilitatem duarum radicum, Ovali, Nodo, Cuspide & Puncto Conjugato privatur. Eodem sensu Parabolam quoque *Convergentem*, *Divergentem*, *Cruribus Contrariis præditam*, *Cruciformem*, *Nodatam*, *Cuspidatam*, *Punctatam* & *Puram* nominabimus.

3. In casu primo si terminus ax^3 affirmativus est, figura erit Hyperbola triplex cum sex cruribus Hyperbolicis, quæ juxta tres Asymptotos, quarum nullæ sunt parallelæ, in infinitum progrediuntur, binæ juxta unamquamque in plagas contrarias. Et hæ Asymptoti si terminus bx^2 non deest, se mutuò secabunt in tribus

Genera Linearum Tertii Ordinis.

punctis, triangulum D$d\delta$ inter se continentes; sin terminus bx^2 deest, convergent omnes ad idem punctum. In priori casu, cape AD$=\frac{-b}{2a}$, & AD$=$A$\delta=\frac{b}{2\sqrt{a}}$, ac junge D$d$, D$\delta$; & erunt A$d$, D$d$, D$\delta$ tres Asymptoti. In posteriori, duc ordinatam quamvis BC, ordinatæ principali AG parallelam, & in eâ utrinque productâ cape hinc inde BF & Bf sibi mutuò æquales, & in eâ ratione ad AB quam habet $\sqrt{a}$ ad 1; jungeque AF, Af: & erunt AG, AF, Af tres Asymptoti. Hanc Hyperbolam vocamus *Redundantem*, quia numero crurum hyperbolicorum sectiones conicas superat.

4. In Hyperbolâ omni Redundante, si neque terminus ey desit, neque sit $bb-4ac$ æquale $\pm ae\sqrt{a}$, Curva nullam habebit diametrum; sin eorum alterutrum accidit, Curva habebit unicam diametrum, & tres si utrumque. Diameter autem semper transit per intersectionem duarum Asymptoton, & bisecat rectas omnes, quæ ad Asymptotos illas utrinque terminantur, & parallelæ sunt Asymptoto tertiæ. Estque abscissa AB diameter figuræ, quoties terminus ey deest. *Diametrum* vero absolutè dictam, hîc & in sequentibus, in vulgari significatu usurpo; nempe pro Abscissâ, quæ passim habet Ordinatas binas æquales ad idem punctum hinc inde insistentes.

CAPUT QUARTUM.

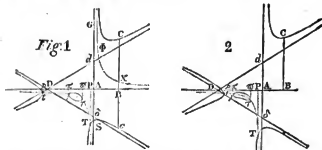
Enumeratio Curvarum.

I. *De Hyperbolis novem Redundantibus, quæ diametro destituuntur, & tres habent Asymptotos triangulum capientes.*

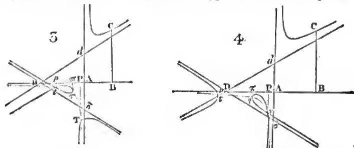
1. SI Hyperbola Redundans nullam habet diametrum, quærantur æquationis hujus $ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=y$ radices quatuor, seu valores ipsius x. Eæ sunto AP, Aϖ, Aπ, Ap. Erigantur Ordinatæ PT, $\varpi\tau$, $\pi\mathfrak{t}$, pt, & hæ tangent Curvam in punctis totidem T, τ, $\mathfrak{t}$, t, & tangendo dabunt limites Curvæ, per quos Species ejus innotescet.

2. Nam si radices omnes AP, Aϖ, Ap, (fig. 1, 2) sunt reales, ejusdem signi, et inæquales, Curva constat ex tribus Hyperbolis, (Inscriptâ, Circumscriptâ & Ambigenâ) cum *Ovali*. Hyperbolarum una jacet versus D; altera versus d; tertia versus δ; & Ovalis semper jacet intra triangulum D$d\delta$, atque etiam inter medios limites $\mathfrak{t}$ & τ, in quibus utique tangitur ab Ordinatis $\pi\mathfrak{t}$ & $\varpi\tau$. Et hæc est *species prima*.

 3. Si

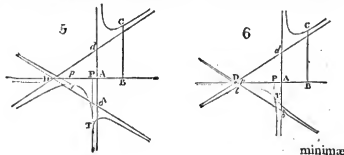


3. Si è radicibus duæ maximæ Aπ, Ap, (fig. 3) vel duæ minimæ AP, Aϖ, (fig. 4) æquantur inter ſe, & ejuſdem ſunt ſigni cum alteris duobus, Ovalis & Hyperbola Circumſcripta ſibi



invicem junguntur, coeuntibus earum punctis contactûs, 7 & t, vel T & τ; & crura Hyperbolæ, ſeſe decuſſando, in Ovalem continuantur, figuram *Nodatam* efficientia. Quæ *ſpecies* eſt *ſecunda*.

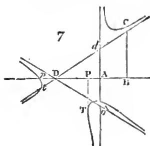
4. Si è radicibus tres maximæ Ap, Aπ, Aϖ, (fig. 5) vel tres

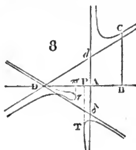


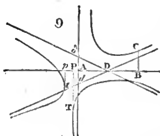
minimæ

minimæ $A\tau$, $A\varpi$, AP (fig. 6) æquentur inter se, Nodus in *Cuspidem* acutissimum convertetur. Nam crura duo Hyperbolæ Circumscriptæ ibi in angulo contactûs concurrent, & non ultrà producentur. Et hæc est *species tertia*. SPECIES LINEARUM TERTII ORDINIS.

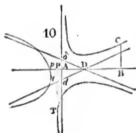
5. Si è radicibus duæ mediæ $A\varpi$ & $A\tau$ (fig. 7) æquentur inter





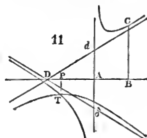


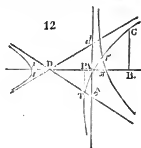
se, puncta contactûs τ & γ coincidunt, & propterea Ovalis interjecta in punctum evanuit; & constat figura ex tribus Hyperbolis, Inscriptâ, Circumscriptâ, & Ambigenâ, cum *puncto* conjugato. Quæ est *species quarta*.

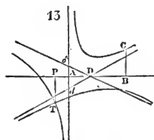


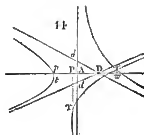
6. Si duæ ex radicibus sunt impossibiles, & reliquæ duæ inæquales, & ejusdem signi (nam signa contraria habere nequeunt), *Puræ* habebuntur Hyperbolæ tres, sine Ovali vel Nodo vel Cuspide vel puncto conjugato: & hæ Hyperbolæ vel ad latera trianguli ab Asymptotis comprehensi, vel ad angulos ejus jacebunt; & perinde *speciem* vel *quintam* (fig. 7, 8) vel *sextam* (fig. 9, 10) constituent.

7. Si è radicibus duæ sint æquales, & alteræ duæ vel impossibiles sunt (fig. 11. 13) vel reales (fig. 12. 14) cum signis quæ à signis æqualium radicum diversa sunt, figura *Cruciformis* habebitur:



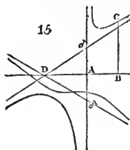


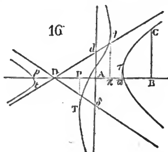




bebitur : nempe duæ ex Hyperbolis ſe invicem decuſſabunt, idque vel ad verticem trianguli ab Aſymptotis comprehenſi (fig. 13, 14) vel ad ejus baſem (fig. 11, 12). Quæ duæ *ſpecies* ſunt *ſeptima* & *octava*.

8. Si denique radices omnes ſunt impoſſibiles (fig. 15) vel ſi





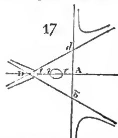
omnes

omnes sunt reales & inæquales (fig. 16) & earum duæ sunt affirmativæ, & alteræ duæ negativæ; tunc duæ habebuntur Hyperbolæ, ad angulos oppositos duarum Asymptoton, cum Hyperbolâ *Anguineâ* circa Asymptoton tertiam. Quæ *species* est *nona*. Species Linearum Tertii Ordinis.

9. Et hi sunt omnes radicum casus possibiles. Nam si duæ radices sunt æquales inter se, & aliæ duæ sunt etiam inter se æquales, figura evadet Sectio Conica cum lineâ rectâ.

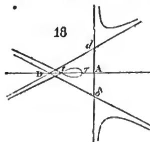
II. *De Hyperbolis duodecim Redundantibus unicam tantùm diametrum habentibus.*

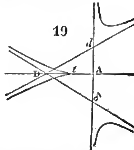
1. Si Hyperbola Redundans habet unicam tantùm diametrum, sit ejus diameter Abscissa AB, & æquationis hujus $ax^3+bx^2+cx+d=0$ quære tres radices, seu valores x.



2. Si radices illæ sunt omnes reales & ejusdem signi, figura constabit ex *Ovali* intra triangulum $Dd\delta$ (fig. 17) jacente, & tribus Hyperbolis ad angulos ejus; nempe Circumscriptâ ad angulum D, & Inscriptis duabus ad angulos d & δ. Et hæc est *species decima*.

3. Si radices duæ majores sunt æquales, & tertia ejusdem signi, crura Hyperbolæ jacentis versus D (fig. 18) sese decussabunt in formâ *Nodi*, propter contactum Ovalis. Quæ *species* est *undecima*.

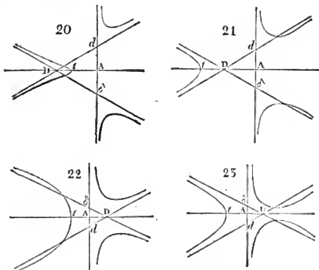




4. Si tres radices sunt æquales, Hyperbola ista fit *Cuspidata* sine Ovali (fig. 19). Quæ *species* est *duodecima*.

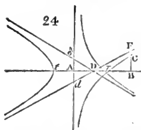
Caput IV. 5. Si radices duæ minores sunt æquales, & tertia ejusdem signi, Ovalis in *punctum* evanuit (fig. 20). Quæ *species* est *decima tertia*.

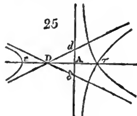
6. In speciebus quatuor novissimis, Hyperbola, quæ jacet versus D, Asymptotos in sinu suo amplectitur; reliquæ duæ in sinu Asymptoton jacent.



7. Si duæ ex radicibus sunt impossibiles, habebuntur tres Hyperbolæ *Puræ* sine Ovali, Decussatione, vel Cuspide. Et hujus casûs *species* sunt quatuor: nempe *decima quarta* si Hyperbola Circumscripta jacet versus D (fig. 20), & *decima quinta* si Hyperbola Inscripta jacet versus D (fig. 21), *decima sexta* si Hyperbola Circumscripta jacet sub basi *dδ* trianguli D*dδ* (fig. 22), & *decima septima* (fig. 23) si Hyperbola Inscripta jacet sub eâdem basi.

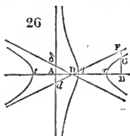
8. Si

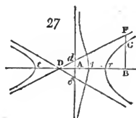




SPECIES LINEARUM TERTII ORDINIS.

8. Si duæ radices ſunt æquales, & tertia ſigni diverſi, figura erit *Cruciformis*. Nempe duæ ex tribus Hyperbolis ſe invicem decuſſabunt, idque vel ad verticem trianguli ab Aſymptotis comprehenſi (fig. 24) vel ad ejus baſem (fig. 25). Quæ duæ *ſpecies* ſunt *decima octava*, & *decima nona*.

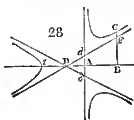


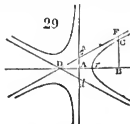


9. Si duæ radices ſunt inæquales, & ejuſdem ſigni, & tertia eſt ſigni diverſi, duæ habebuntur Hyperbolæ in oppoſitis angulis duarum Aſymptoton, cum *Concboidali* intermediâ. *Concboidalis* autem vel jacebit ad eaſdem partes Aſymptoti ſuæ cum triangulo ab Aſymptotis conſtituto (fig. 26) vel ad partes contrarias (fig. 27). Et hi duo caſus conſtituunt *ſpeciem vigeſimam* & *vigeſimam primam*.

III. *De*

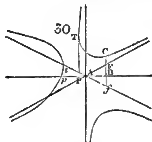
III. *De Hyperbolis duabus Redundantibus cum tribus diametris.*

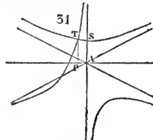


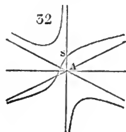


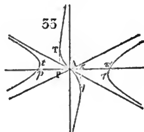
1. Hyperbola Redundans quæ habet tres diametros, conſtat ex tribus Hyperbolis in ſinubus Aſymptoton jacentibus; idque vel ad angulos trianguli ab Aſymptotis comprehenſi (fig. 28) vel ad ejus latera (fig. 29). Caſus prior dat *ſpeciem vigeſimam ſecundam*, & poſterior *ſpeciem vigeſimam tertiam*.

IV. *De Hyperbolis novem Redundantibus cum Aſymptotis tribus ad commune punctum convergentibus.*





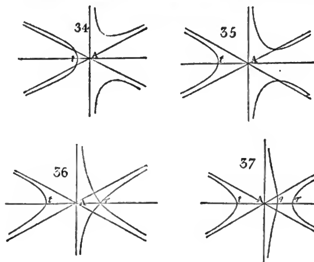




1. Si

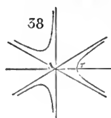
1. Si tres Asymptoti in puncto communi se mutuò decussant, vertuntur species quinta & sexta in *vigesimam quartam* (fig. 30), septima & octava in *vigesimam quintam* (fig. 31), & nona in *vigesimam sextam* (fig. 32), ubi Anguinea non transit per concursum Asymptoton; & in *vigesimam septimam* ubi transit per concursum illum (fig. 33), quo casu termini *b* ac *d* desunt, & concursus Asymptoton est Centrum figuræ ab omnibus ejus partibus oppositis æqualiter distans. Et hæ quatuor species diametrum non habent. Species Linearum Tertii Ordinis.

2. Vertuntur etiam *species* decima quarta ac decima sexta in



vigesimam octavam (fig. 34); decima quinta ac decima septima in *vigesimam nonam* (fig. 35); decima octava & decima nona in *tricesimam* (fig. 36), & vigesima cum vigesimâ primâ in *tricesimam primam* (fig. 37). Et hæ species unicam habent diametrum.

3. Ac denique species vigesima secunda & vigesima tertia vertuntur

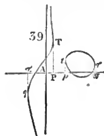


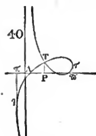
tuntur in *speciem tricesimam secundam*, cujus tres sunt diametri per concursum Asymptoton transeuntes (fig. 38).

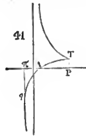
4. Quæ omnes conversiones facillimè intelliguntur, faciendo ut triangulum ab Asymptotis comprehensum diminuatur donec in punctum evanescat.

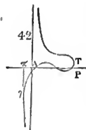
V. *De Hyperbolis sex Defectivis diametrum non habentibus.*

1. Si in primo æquationum casu terminus ax^3 negativus est, figura erit Hyperbola Defectiva unicam habens Asymptoton & duo tantùm crura hyperbolica, juxta Asymptoton illam, in plagas contrarias infinitè progredientia. Et Asymptotos illa est ordinata









prima & principalis AG. Si terminus ey non deest, figura nullam habebit diametrum; si deest, habebit unicam. In priori casu species sic enumerantur.

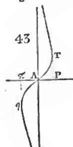
2. Si æquationis hujus $ax^4 = bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee$ radices omnes $A\pi$, AP, Ap, $A\varpi$, (fig. 39) sunt reales & inæquales, figura erit Hyperbola Anguinea, Asymptoton flexu contrario amplexa, cum *Ovali* conjugatâ. Quæ *species* est *tricesima tertia*.

3. Si radices duæ mediæ AP & Ap (fig. 40) æquentur inter se, Ovalis & Anguinea junguntur, sese decussantes in formâ *Nodi*. Quæ est *species tricesima quarta*.

I 4. Si

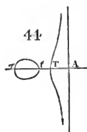
4. Si tres radices sunt æquales, Nodus vertetur in *Cuspidem* acutissimum in vertice Anguineæ (fig. 41). Et hæc est *species tricesima quinta*. SPECIES LINEARUM TERTII ORDINIS.

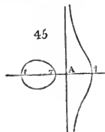
5. Si è tribus radicibus ejusdem signi duæ maximæ Ap & Aπ (fig. 43) sibi mutuò æquantur, Ovalis in *punctum* evanuit. Quæ *species* est *tricesima sexta*.

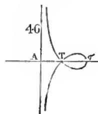


6. Si radices duæ quævis imaginariæ sunt, sola manebit Anguinea *Pura* sine Ovali, Decussatione, Cuspide vel puncto conjugato. Si Anguinea illa non transit per punctum A (fig. 42), *species* est *tricesima septima*; sin transit per punctum illud A (id quod contingit ubi termini b ac d desunt), punctum illud A erit Centrum figuræ, rectas omnes per ipsum ductas & ad Curvam utrinque terminatas bisecans (fig. 43). Et hæc est *species tricesima octava*.

VI. *De Hyperbolis septem Defectivis diametrum habentibus.*





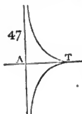


1. In altero casu ubi terminus ey deest, & propterea figura diametrum habet, si æquationis hujus $ax^3=bx^2+cx+d$ radices omnes AT, At, Aτ, (fig. 44) sunt reales, inæquales & ejusdem signi, figura erit Hyperbola Conchoidalis cum *Ovali* ad convexitatem. Quæ est *species tricesima nona*.

2. Si duæ radices sunt inæquales & ejusdem signi, & tertia est signi contrarii, *Ovalis* jacebit ad Concavitatem conchoidalis (fig. 45). Estque *species quadragesima*.

3. Si radices duæ minores AT, At, (fig. 46) sunt æquales, & tertia

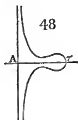
CAPUT IV.

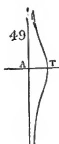


tertia AT est ejusdem signi, Ovalis & Conchoidalis jungentur, sese decussando in modum *Nodi*. Quæ *species* est *quadragesima prima*.

4. Si tres radices sunt æquales, Nodus mutabitur in *Cuspidem*, & figura erit *Cissois Veterum* (fig. 47). Et hæc est *species quadragesima secunda*.

5. Si radices duæ majores sunt æquales, & tertia est ejusdem signi, Conchoidalis habebit *punctum* conjugatum ad convexitatem suam (fig. 49). Estque *species quadragesima tertia*.

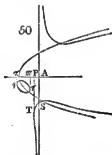


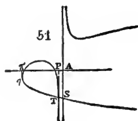


6. Si radices duæ sunt æquales, & tertia est signi contrarii, Conchoidalis habebit *punctum* conjugatum ad concavitatem suam (fig. 49). Estque *species quadragesima quarta*.

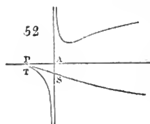
7. Si radices duæ sunt impossibiles, habebitur Conchoidalis *Pura* sine Ovali, Nodo, Cuspide vel puncto conjugato (fig. 48, 49). Quæ *species* est *quadragesima quinta*.

VII. *De Hyperbolis septem Parabolicis diametrum non habentibus.*





1. Siquando in primo æquationum casu terminus ax^3 deest, & terminus



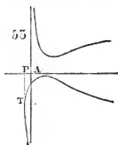
terminus bx^4 non deest, figura erit Hyperbola Parabolica, duo habens crura Hyperbolica ad unam Asymptoton SAG, & duo Parabolica in plagam unam & eandem convergentia. Si terminus ey non deest, figura nullam habebit diametrum; sin deest, habebit unicam. In priori casu species sunt hæ. Species Linearum Tertii Ordinis.

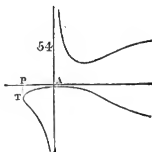
2. Si tres radices AP, Aϖ, Aπ (fig. 50) æquationis hujus $bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=0$ sunt inæquales & ejusdem signi, figura constabit ex *Ovali* & aliis duabus Curvis, quæ partim Hyperbolicæ sunt & partim Parabolicæ. Nempe crura Parabolica continuo ductu junguntur cruribus Hyperbolicis sibi proximis. Et hæc est *species quadragesima sexta.*

3. Si radices duæ minores sunt æquales, & tertia est ejusdem signi, Ovalis & una Curvarum illarum hyperbolo-parabolicarum junguntur, & se decussant in formam *Nodi* (fig. 51). Quæ *species* est *quadragesima septima.*

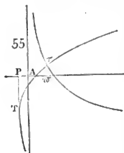
4. Si tres radices sunt æquales, Nodus ille in Cuspidem vertitur (fig. 52). Estque *species quadragesima octava.*

5. Si radices duæ majores sunt æquales, & tertia est ejusdem signi, Ovalis in *punctum* conjugatum evanuit (fig. 53). Quæ *species* est *quadragesima nona.*



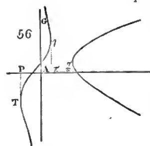


6. Si



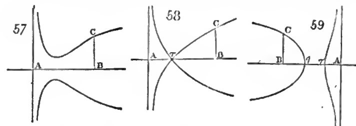
6. Si duæ radices funt impoffibiles, manebunt *Puræ* illæ duæ Curvæ hyperbolo-parabolicæ fine Ovali, Decuffatione, Cufpide vel puncto conjugato; & *fpeciem quinquagefimam* conftituent (fig. 53, 54.)

7. Si radices duæ funt æquales, & tertia eft figni contrarii, Curvæ illæ hyperbolo-parabolicæ junguntur, fefe decuffando in morem crucis (fig. 55). Eftque *fpecies quinquagefima prima.*



8. Si radices duæ funt inæquales & ejufdem figni, & tertia eft figni contrarii, figura evadet Hyperbola Anguinea circa Afymptoton AG (fig. 56), cum Parabolâ conjugatâ. Et hæc eft *fpecies quinquagefima fecunda.*

VIII. *De Hyperbolis quatuor Parabolicis diametrum habentibus.*



1. In altero cafu ubi terminus ey deeft, & figura diametrum habet, fi duæ radices æquationis hujus $bx^2+cx+d=0$ funt impoffibiles, duæ habentur figuræ hyperbolo-parabolicæ à diametro AB (fig. 57) hinc inde æqualiter diftantes. Quæ *fpecies* eft *quinquagefima tertia.*

2. Si

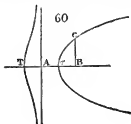
2. Si æquationis illius radices duæ sunt impossibiles, figuræ hyperbolo-parabolicæ junguntur, sese decussantes in morem crucis; & *speciem quinquagesimam quartam* constituunt (fig. 58). Species Linearum Tertii Ordinis.

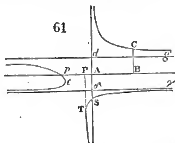
3. Si radices illæ sunt inæquales & ejusdem signi, habetur Hyperbola Conchoidalis cum Parabolâ ex eodem latere Asymptoti (fig. 59). Estque *species quinquagesima quinta*.

4. Si radices illæ sunt signi contrarii, habetur Conchoidalis cum Parabolâ ad alteras partes Asymptoti (fig. 60). Quæ *species* est *quinquagesima sexta*.

IX. *De quatuor Hyperbolismis Hyperbolæ*.

1. Siquando in primo æquationum casu terminus uterque ax^3 & bx^2 deest, figura erit Hyperbolismus sectionis alicujus conicæ. Hyperbolismum figuræ voco, cujus Ordinata prodit applicando contentum sub Ordinatâ figuræ illius & rectâ datâ ad Abscissam communem. Hâc ratione linea recta vertitur in Hyperbolam Conicam, & Sectio omnis Conica vertitur in aliquam figurarum, quas hîc Hyperbolismos sectionum conicarum voco. Nam æquatio ad figuras de quibus agimus, nempe $xy^2+ey=cx+d$, dat



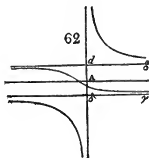


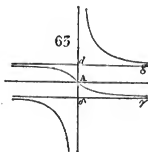
$y=\frac{e\pm\sqrt{ee+4dx+4cxx}}{2x}$, quæ generatur applicando contentum sub Ordinatâ sectionis conicæ $\frac{e\pm\sqrt{ee+4dx+4cxx}}{2m}$ & rectâ datâ m, ad Curvarum Abscissam communem x. Unde liquet, quòd figura genita Hyperbolismus erit Hyperbolæ, Ellipseos vel Parabolæ, perinde ut terminus cx affirmativus est, vel negativus, vel nullus.

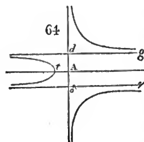
2. Hyper-

Caput IV. 2. Hyperbolismus Hyperbolæ tres habet Asymptotos; quarum una est Ordinata prima & principalis A*d*, alteræ duæ sunt parallelæ Abscissæ AB, ab eâdem hinc inde æqualiter distantes. In Ordinatâ principali A*d*, cape A*d*, Aδ hinc inde æquales quantitati $\sqrt{c}$; & per puncta *d* ac δ age *dg*, δγ Asymptotos abscissæ AB parallelas.

3. Ubi terminus *ey* non deest, figura nullam habet diametrum. In hoc casu, si æquationis hujus $cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=0$ radices duæ AP, Aπ (fig. 61) sunt reales & inæquales (nam æquales esse nequeunt nisi figura sit Conica Sectio) figura constabit ex tribus Hyperbolis sibi oppositis, quarum una jacet inter Asymptotos parallelas, & alteræ duæ jacent extrà. Et hæc est *species quinquagesima septima*.





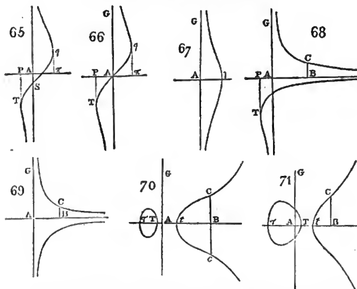


4. Si radices illæ duæ sunt impossibiles, habentur Hyperbolæ duæ oppositæ, extra Asymptotos parallelas, & Anguinea Hyperbolica intra easdem. Hæc figura duarum est specierum. Nam centrum non habet ubi terminus *d* non deest (fig. 62); sed si terminus ille deest, punctum A est ejus centrum (fig. 63). Prior *species* est *quinquagesima octava*, posterior *quinquagesima nona*.

5. Quòd si terminus *ey* deest, figura constabit ex tribus Hyperbolis oppositis; quarum una jacet inter Asymptotos parallelas, & alteræ

alteræ duæ jacent extrà, ut in ſpecie quinquageſimâ quartâ; & præterea diametrum habet, quæ eſt abſciſſa AB (fig. 64). Et hæc eſt *ſpecies ſexageſima*. SPECIES LINEARUM TERTII ORDINIS.

X. *De tribus Hyperboliſmis Ellipſeos.*



1. Hyperboliſmus Ellipſeos per hanc æquationem definitur; $xy^2+ey=ex+d$: & unicam habet Aſymptoton, quæ eſt Ordinata principalis A*d* (fig. 65). Si terminus *ey* non deeſt, figura eſt Hyperbola Anguinea ſine diametro; atque etiam ſine centro, ſi terminus *d* non deeſt. Quæ *ſpecies* eſt *ſexageſima prima*.

2. At ſi terminus *d* deeſt, figura habet centrum ſine diametro, & centrum ejus eſt punctum A (fig. 66). *Species* verò eſt *ſexageſima ſecunda*.

3. Et ſi terminus *ey* deeſt, & terminus *d* non deeſt, figura eſt Conchoidalis ad Aſymptoton AG (fig. 67) habetque diametrum ſine centro, & diameter ejus eſt abſciſſa AB. Quæ *ſpecies* eſt *ſexageſima tertia*.

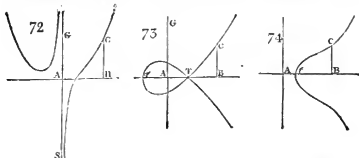
XI. *De duobus Hyperboliſmis Parabolæ.*

Hyperboliſmus Parabolæ per hanc æquationem definitur $xy^2+ey=d$;

CAPUT IV. $ey=d$; & duas habet Asymptotos, Abscissam AB & Ordinatam primam & principalem AG. Hyperbolæ vero in hâc figurâ sunt duæ, non in asymptoton angulis oppositis, sed in angulis qui sunt deinceps, jacentes; idque ad utrumque latus abscissæ AB, & vel sine diametro, si terminus ey habetur (fig. 68), vel cum diametro si terminus ille deest (fig. 69). Quæ duæ *species* sunt *sexagesima quarta* & *sexagesima quinta*.

XII. *De Tridente.*

In Secundo æquationum casu habebatur æquatio $xy=ax^3+bx^2+cx+d$. Et figura in hoc casu habet quatuor crura infinita; quorum duo sunt Hyperbolica, circa Asymptoton AG (fig. 72) in contrarias partes tendentia, & duo Parabolica, convergentia, & cum



prioribus speciem Tridentis ferè efformantia. Estque hæc figura Parabola illa, per quam *Cartesius* æquationes sex dimensionum construxit. Hæc est igitur *species sexagesima sexta*.

XIII. *De Parabolis quinque Divergentibus.*

1. In Tertio casu æquatio erat $y^2=ax^3+bx^2+cx+d$, & Parabolam designat, cujus crura divergunt ab invicem, & in contrarias partes infinitè progrediuntur. Abscissa AB est ejus diameter, & Species ejus sunt quinque sequentes.

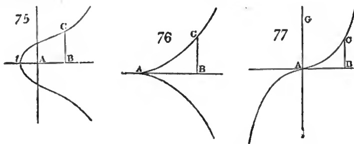
2. Si æquationis $ax^3+bx^2+cx+d=0$, radices omnes AT, AT, At sunt reales & inæquales, figura est Parabola Divergens Campaniformis, cum *Ovali* ad verticem (fig. 70, 71). Et *species* est *sexagesima septima*.

3. Si

3. Si radices duæ sunt æquales, Parabola prodit vel *Nodata* contingendo Ovalem (fig. 73), vel *Punctata* ob Ovalem infinitè parvam (fig. 74). Quæ duæ *species* sunt *sexagesima octava* & *sexagesima nona*. SPECIES LINEARUM TERTII ORDINIS.

4. Si tres radices sunt æquales Parabola erit *Cuspidata* in vertice (fig. 76). Et hæc est Parabola *Neiliana*, quæ vulgo *Semicubica* dicitur. Et est *species septuagesima*.

5. Si radices duæ sunt impossibiles, habetur Parabola *Pura* Campaniformis (fig. 74, 75) *speciem septuagesimam primam* constituens.



XIV. *De Parabolâ Cubicâ.*

In Quarto casu æquatio erat $y=ax^3+bx^2+cx+d$: & hæc æquatio Parabolam designat, quæ crura habet contraria, & *Cubica* dici solet (fig. 77). Et sic *Species* omnino sunt *septuaginta duæ*.

CAPUT QUINTUM.

Genesis Curvarum per Umbras.

1. SI in planum infinitum, à puncto lucido illuminatum, umbræ figurarum projiciantur, umbræ Sectionum Conicarum semper erunt Sectiones Conicæ; eæ Curvarum secundi generis semper erunt Curvæ secundi generis; eæ Curvarum tertii generis semper erunt Curvæ tertii generis, & sic deinceps in infinitum.

2. Et quemadmodum Circulus, umbram projiciendo, generat Sectiones omnes Conicas; sic Parabolæ quinque divergentes umbris suis generant & exhibent alias omnes secundi generis Curvas:

& sic Curvæ quædam simpliciores aliorum generum inveniri possunt, quæ alias omnes eorundem generum Curvas, umbris suis à puncto lucido in planum projectis, formabunt.

CAPUT SEXTUM.

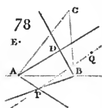
De Curvarum Punctis duplicibus.

DIXIMUS Curvas secundi generis à lineâ rectâ in punctis tribus secari posse. Horum duo nonnunquam coincidunt. Ut cùm recta per Ovalem infinitè parvam transit; vel per concursum duarum partium Curvæ, se mutuò secantium vel in Cuspidem coeuntium, ducitur. Et siquando rectæ omnes in plagam cruris alicujus infiniti tendentes Curvam in unico tantùm puncto secant, (ut fit in Ordinatis Parabolæ *Cartesianæ* & Parabolæ Cubicæ, nec non in rectis Abscissæ Hyperbolismorum Hyperbolæ & Parabolæ parallelis) concipiendum est, quòd rectæ illæ per alia duo Curvæ puncta ad infinitam distantiam sita (ut ita dicam) transeunt. Hujusmodi intersectiones duas coincidentes, sive ad finitam sint distantiam sive ad infinitam, vocabimus *Punctum Duplex*. Curvæ autem, quæ habent punctum duplex, describi possunt per sequentia Theoremata.

CAPUT VII.

De Curvarum descriptione Organicâ.

THEOR. I.



SI anguli duo magnitudine dati, PAD, PBD, circa polos positione datos, A, B, rotentur; & eorum crura, AP, BP, concursu suo, P, percurrant lineam rectam; crura duo reliqua, AD, BD, concursu suo, D, describent Sectionem Conicam per polos A, B transeuntem: præterquam ubi linea illa recta transit per polorum alterutrum, A vel B, vel anguli BAD, ABD simul evanescunt; quibus in casibus punctum D describet lineam rectam.

THEOR. II.

Si crura prima, AP, BP, concursu suo, P, percurrant Sectionem Conicam

Conicam per polum alterutrum A transeuntem, crura duo reliqua, AD, BD concursu suo, D, describent Curvam secundi generis per polum alterum B transeuntem, & punctum duplex habentem in polo primo A, per quem sectio conica transit: præterquam ubi anguli BAD, ABD simul evanescunt; quo casu punctum D describet aliam Sectionem Conicam per polum A transeuntem. DESCRIPTIONES ORGANICÆ.

THEOR. III.

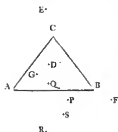
At si Sectio Conica, quam punctum P percurrit, transeat per neutrum polorum A, B; punctum D describet Curvam secundi vel tertii generis, punctum duplex habentem. Et punctum illud duplex in concursu crurum describentium, AD, BD, invenietur, ubi anguli BAP, ABP simul evanescunt. Curva autem descripta secundi erit generis, si anguli BAD, ABD simul evanescunt; aliâs erit tertii generis, & alia duo habebit puncta duplicia in polis A & B.

2. *Sectionum Conicarum descriptio per data quinque puncta.*

Jam Sectio Conica determinatur ex datis ejus punctis quinque, & per eadem sic describi potest. Dentur ejus puncta quinque, A, B, C, D, E. Jungantur eorum tria quævis A, B, C, & trianguli ABC rotentur anguli duo quivis, CAB, CBA, circa vertices suos A & B; & ubi crurum AC, BC intersectio C successivè applicatur ad puncta duo reliqua D, E, incidat intersectio crurum reliquorum, AB & BA, in puncta P & Q. Agatur, & infinitè producatur recta PQ, & anguli mobiles ita rotentur, ut intersectio crurum, AB, BA, percurrat rectam PQ, & crurum reliquorum intersectio, C, describet propositam Sectionem Conicam per Theorema primum.

3. *Curvarum secundi generis Punctum Duplex habentium descriptio per data septem puncta.*

Curvæ omnes secundi generis Punctum Duplex habentes determinantur ex datis earum punctis septem, quorum unum est Punctum illud Duplex, & per eadem puncta sic describi possunt. Dentur Curvæ describendæ puncta quælibet septem A, B, C, D, E, F, G, quorum A est punctum duplex. Jungantur punctum A, & alia duo quævis è punctis, puta B & C; & trianguli ABC rotetur



tetur tum angulus CAB circa verticem ſuum A, tum angulorum reliquorum alteruter, ABC, circa verticem ſuum B. Et ubi crurum AC, BC concurſus, C, ſucceſſivè applicatur ad puncta quatuor reliqua D, E, F, G incidat concurſus crurum reliquorum, AB & BA, in puncta quatuor P, Q, R, S. Per puncta illa quatuor & quintum A deſcribatur ſectio conica, & anguli præfati CAB, CBA ita rotentur ut crurum, AB, BA, concurſus percurrat ſectionem illam conicam, & concurſus reliquorum crurum, AC, BC, deſcribet Curvam propoſitam per Theorema ſecundum.

Si vice puncti C datur poſitione recta BC, quæ Curvam deſcribendam tangit in B, lineæ AD, AP coincident; & vice anguli DAP habebitur linea recta circa polum A rotanda.

Si Punctum Duplex A infinitè diſtat, debebit recta ad plagam puncti illius perpetuò dirigi, & motu parallelo ferri, interea dum angulus ABC circa polum B rotatur.

Deſcribi etiam poſſunt hæ Curvæ paulo aliter per Theorema tertium, ſed deſcriptionem ſimpliciorem poſuiſſe ſufficit.

Eâdem methodo Curvas tertii, quarti & ſuperiorum generum deſcribere licet; non omnes quidem, ſed quotquot ratione aliquâ commodâ per motum localem deſcribi poſſunt. Nam Curvam aliquam ſecundi vel ſuperioris generis, punctum duplex non habentem, commodè deſcribere, Problema eſt inter difficiliora numerandum.

CAPUT OCTAVUM.

Conſtructio æquationum per deſcriptionem Curvarum.

CURVARUM uſus in Geometriâ eſt, ut per earum interſectiones Problemata ſolvantur. Proponatur æquatio conſtruenda dimenſionum novem, $x^9 * + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + k = 0.$ $+ m$

Ubi

Ubi b, c, d, &c. significant quantitates quasvis datas, signis suis $+$ & $-$ affectas. Assumatur æquatio ad Parabolam Cubicam $x^3=y$; & æquatio prior, scribendo y pro x^3, evadet $y^3+bxy^2+cy^2+dx^2y+exy+my+fx^3+gx^2+bx+k=0$, æquatio ad Curvam aliam secundi generis. Ubi m vel f deesse potest, vel pro lubitu assumi. Et per harum Curvarum descriptiones & interfectiones dabuntur radices æquationis construendæ. Parabolam Cubicam semel describere sufficit. CONSTRUCTIO ÆQUATIONUM.

Si æquatio construenda per defectum duorum terminorum ultimorum, bx & k, reducatur ad septem dimensiones; Curva altera, delendo m, habebit punctum duplex in principio Abscissæ, & inde facilè describi potest, ut suprà.

Si æquatio construenda per defectum terminorum trium ultimorum, gx^2+bx+k, reducatur ad sex dimensiones, Curva altera, delendo f, evadet Sectio Conica.

Et si per defectum sex ultimorum terminorum æquatio construenda reducatur ad tres dimensiones, incidetur in constructionem *Wallisianam* per Parabolam Cubicam & lineam rectam.

Construi etiam possunt æquationes per Hyperbolismum Parabolæ cum diametro. Ut si construenda sit hæc æquatio dimensionum novem termino penultimo carens, $a+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+gx^6+bx^7+kx^8+lx^9=0$; assumatur æquatio ad Hyperbolismum
$+m$
illum $x^2y=1$: & scribendo y pro $\frac{1}{xx}$, æquatio construenda vertetur in hanc, $ay^3+cy^2+dxy^2+ey+fxy+mx^2y+g+bx+kx^2+lx^3=0$: quæ Curvam secundi generis designat, cujus descriptione Problema solvetur. Et quantitatum m ac g alterutra hic deesse potest, vel pro lubitu assumi.

Per Parabolam Cubicam & Curvas tertii generis construuntur etiam æquationes omnes dimensionum non plusquam duodecim, & per eandem Parabolam & Curvas quarti generis construuntur omnes dimensionum non plusquam quindecim; et sic deinceps in infinitum. Et Curvæ illæ tertii, quarti & superiorum generum describi semper possunt, inveniendo eorum puncta per Geometriam planam. Ut si construenda sit æquatio, $x^{12} * +ax^{10}+bx^9+cx^8+dx^7+ex^6+fx^5+gx^4+bx^3+ix^2+kx+l=0$, & descripta habeat Parabola

2

Caput VIII. rabola Cubica; ſit æquatio ad Parabolam illam Cubicam $x^3=y$, & ſcribendo y pro x^3, æquatio conſtruenda vertetur in hanc,

$$\begin{array}{lllll} y^4 + a\,xy^3 & + c\,x^2y^2 & + f\,x^2y & + i\,x^2 & = 0, \\ \quad\; + b & + dx & + gx & + kx & \\ & + e & + h & + l & \end{array}$$

quæ eſt æquatio ad Curvam tertii generis, cujus deſcriptione Problema ſolvetur. Deſcribi autem poteſt hæc Curva, inveniendo ejus puncta per Geometriam planam, propterea quòd indeterminata quantitas, x, non niſi ad duas dimenſiones aſcendit.

LOGISTICA INFINITORUM.

AUCTORE S. HORSLEY, LL.D. ET R.S.S.

4 C 2

LOGISTICA INFINITORUM.

In exsequendo per series infinitas Problematum analysin, haud rarò usuvenit ut in seriebus ipsas instituendæ sint operationes arithmeticæ; non modò faciles illæ Additionis et Subductionis, verum etiam molestissimæ Multiplicationis et Divisionis, utriusque quidem cum simplicis tum climacticæ: quæ sanè computationes experti nôrunt quanti sunt laboris: hujus minuendi gratiâ formulas sequentes trado.

PROBLEMA I. MULTIPLICATIO.

Seriem infinitam $ax^{\mu} + bx^{\mu+n} + cx^{\mu+2n} + dx^{\mu+3n} + ex^{\mu+4n}$ &c.
Series infinita $ax^{\nu} + bx^{\nu+n} + cx^{\nu+2n} + dx^{\nu+3n} + ex^{\nu+4n}$ &c. Multiplicet.

Fiet $$aax^{\mu+\nu} \begin{matrix}+ba\\+ab\end{matrix}\, x^{\mu+\nu+n} \begin{matrix}+ca\\+bb\\+ac\end{matrix}\, x^{\mu+\nu+2n} \begin{matrix}+da\\+cb\\+bc\\+ad\end{matrix}\, x^{\mu+\nu+3n} \begin{matrix}+ea\\+db\\+cc\\+bd\\+ae\end{matrix}\, x^{\mu+\nu+4n} \text{ \&c.}$$

Positis igitur $\mu+\nu=\pi$, series multiplicatione facta hanc formam induet

$$Ax^{\pi} + Bx^{\pi+n} + Cx^{\pi+2n} + Dx^{\pi+3n} + Ex^{\pi+4n} \text{ \&c.}$$

Cujus coefficientium constitutio hujusce modi erit.

$A = aa$. $B = ab + ba$. $C = ac + bb + ca$. $D = ad + bc + cb + da$. $E = ae + bd + cc + db + ea$.

PROBLEMA II. DIVISIONIS 1.

Seriem infinitam serie infinitâ dividere

Sit series dividenda $Ax^{\pi} + Bx^{\pi+n} + Cx^{\pi+2n} + Dx^{\pi+3n} + Ex^{\pi+4n}$ &c.
Series dividens sit $ax^{\nu} + bx^{\nu+n} + cx^{\nu+2n} + dx^{\nu+3n} + ex^{\nu+4n}$ &c.

Tum

$\beta = c\,x^{2\mu} + \gamma$
$\beta^2 = c^2 x^{4\mu} + 2c\,x^{2\mu}\gamma + \gamma^2$
$\beta^3 = c^3 x^{6\mu} + 3c^2 x^{4\mu}\gamma + 3c\,x^{2\mu}\gamma^2 + \gamma^3$
$\beta^4 = c^4 x^{8\mu} + 4c^3 x^{6\mu}\gamma + 6c^2 x^{4\mu}\gamma^2 + 4c x^{2\mu}\gamma^3 + \gamma^4$
$\beta^5 = c^5 x^{10\mu}$ &c.

$\gamma = d\,x^{3\mu} + \delta$
$\gamma^2 = d^2 x^{6\mu} + 2d\,x^{3\mu}\delta + \delta^2$
$\gamma^3 = d^3 x^{9\mu} + 3d^2 x^{6\mu}\delta$ &c.

$\delta = e\,x^{4\mu} + \epsilon$
$\delta^2 = e^2 x^{8\mu} + 2e x^{4\mu}\epsilon + \epsilon^2$

$\epsilon = f x^{5\mu} + \zeta$
$\epsilon^2 = f^2 x^{10\mu} +$

$\zeta = g x^{6\mu} + \eta$
$\eta = h x^{7\mu} + \theta$
$= k x^{8\mu} + \iota$
$\iota = l x^{9\mu} + \kappa$

Et denotante λ quantitatem quamvis, feriei propofitæ poteftas illa cujus index λ,

five $\overline{a + bx^{\mu} + cx^{2\mu} + dx^{3\mu}\text{ &c.}}|^{\lambda} = \overline{a+\alpha}|^{\lambda}$.

Sed ex formulâ generali Newtonianâ poteftatum binomii, $\overline{a+\alpha}|^{\lambda} = a^{\lambda} + \lambda a^{\lambda-1}\alpha + \lambda \times \frac{\lambda-1}{2}$

$a^{\lambda-2}\alpha^2 + \lambda \times \frac{\lambda-1}{2} \times \frac{\lambda-2}{3} a^{\lambda-3}\alpha^3$ &c.

Hoc eft, fi pro $\lambda a^{\lambda-1}$ fcribatur **A**

pro $\lambda \times \frac{\lambda-1}{2} a^{\lambda-2}$, **A**

pro $\lambda \times \frac{\lambda-1}{2} \times \frac{\lambda-2}{3} a^{\lambda-3}$, **A**

pro $\lambda.\ \frac{\lambda-1}{2}.\ \frac{\lambda-2}{3}.\ \frac{\lambda-3}{4} a^{\lambda-4}$, **A**

atque idem femper fiat, $\overline{a+\alpha}|^{\lambda} = a^{\lambda} + \mathbf{A}\cdot\alpha + \mathbf{A}\cdot\alpha^2 + \mathbf{A}\cdot\alpha^3 + \mathbf{A}\cdot\alpha^4 + \mathbf{A}\cdot\alpha^5 + \mathbf{A}\cdot\alpha^6 + \mathbf{A}\cdot\alpha^7 + \mathbf{A}\cdot\alpha^8 + \mathbf{A}\cdot\alpha^9$. &c.

Ex fingulis membris hujus progreffionis, ope æquationum $\alpha = bx^{\mu} + \beta$, $\alpha^2 = b^2x^{2\mu} +$ &c. $\alpha^3 =$ &c. exterminetur primò α. Tum ex membris fingulis feriei transformatæ, ope æquationum $\beta = cx^{2\mu} + \gamma$, $\beta^2 = c^2x^{4\mu} +$ &c. $\beta^3 =$ &c. exterminetur β. Et ex membris fingulis feriei denuò transformatæ, ope æquationum $\gamma = dx^{3\mu} + \delta$, $\gamma^2 = d^2x^{6\mu} +$ &c. $\gamma^3 =$ &c. exterminetur γ. Si hoc continuò fiat, colligentur tandem $\mathbf{A}\cdot\alpha = \mathbf{A}\cdot \times \overline{bx^{\mu} + cx^{2\mu} + dx^{3\mu} + ex^{4\mu}}$ &c.

$$\mathbf{A}\alpha^2 = \mathbf{A} \times \begin{cases} b^2.\,x^{2\mu} + 2b.\,cx^{3\mu} + 2bd\,x^{4\mu} + 2bex^{5\mu} + 2bfx^{6\mu} + 2bgx^{7\mu} + 2bhx^{8\mu} + 2bkx^{9\mu} \\ \qquad + c^2x^{4\mu} + 2cdx^{5\mu} + 2cex^{6\mu} + 2cfx^{7\mu} + 2cgx^{8\mu} + 2chx^{9\mu} \\ \qquad\qquad + d^2x^{6\mu} + 2dex^{7\mu} + 2dfx^{8\mu} + 2dgx^{9\mu} \\ \qquad\qquad\qquad + e^2x^{8\mu} + 2efx^{9\mu} \text{ &c.} \end{cases}$$

$\mathbf{A}\alpha^3 =$

$$Ax^3 = A \times \left\{ \begin{array}{l} b^3 x^{3\mu} + 3b^2 c\, x^{4\mu} + 3b^2 d\, x^{5\mu} + 3b^2 e\, x^{6\mu} + 3b^2 f\, x^{7\mu} + 3b^2 g\, x^{8\mu} + 3b^2 h\, x^{9\mu} \text{ \&c.} \\ \quad + 3b c^2 x^{5\mu} + 3b \cdot 2cd\, x^{6\mu} + 3b \cdot 2ce\, x^{7\mu} + 3b \cdot 2cf\, x^{8\mu} + 3b \cdot 2cg\, x^{9\mu} \\ \quad\quad + 3b\, d^2 x^{7\mu} + 3b \cdot 2de\, x^{8\mu} + 3b \cdot 2df\, x^{9\mu} \\ \quad\quad\quad + 3b\, e^2 x^{9\mu} \\ \quad\quad + c^3 x^{6\mu} + 3c^2 d\, x^{7\mu} + 3c^2 e\, x^{8\mu} + 3c^2 f x^{9\mu} \\ \quad\quad\quad + 3c\, d^2 x^{8\mu} + 3c \cdot 2de\, x^{9\mu} \\ \quad\quad\quad + d^3 x^{9\mu} \text{ \&c.} \end{array} \right.$$

&c.

$$Ax^4 = A \times \left\{ \begin{array}{l} b^4 x^{4\mu} + 4b^3 c\, x^{5\mu} + 4b^3 d\, x^{6\mu} + 4b^3 e\, x^{7\mu} + 4b^3 f x^{8\mu} + 4b^3 g\, x^{9\mu} \\ \quad + 6b^2 c^2 x^{6\mu} + 6b^2 \cdot 2cd\, x^{7\mu} + 6b^2 \cdot 2ce\, x^{8\mu} + 6b^2 \cdot 2cf x^{9\mu} \\ \quad\quad + 6b^2 d^2 x^{8\mu} + 6b^2 \cdot 2de\, x^{9\mu} \\ \quad + 4b\, c^3 x^{7\mu} + 4b \cdot 3c^2 d\, x^{8\mu} + 4b \cdot 3c^2 e\, x^{9\mu} \\ \quad\quad + 4b \cdot 3cd^2 x^{9\mu} \\ \quad\quad + c^4 x^{8\mu} + 4c^3 d\, x^{9\mu} \end{array} \right.$$

$$Ax^5 = A \times \left\{ \begin{array}{l} b^5 x^{5\mu} + 5b^4 c\, x^{6\mu} + 5b^4 d\, x^{7\mu} + 5b^4 e\, x^{8\mu} + 5b^4 f x^{9\mu} \text{ \&c.} \\ \quad + 10b^3 c^2 x^{7\mu} + 10b^3 \cdot 2cd\, x^{8\mu} + 10b^3 \cdot 2ce\, x^{9\mu} \text{ \&c.} \\ \quad\quad + 10b^3 d^2 x^{9\mu} \text{ \&c.} \\ \quad + 10b^2 c^3 x^{8\mu} + 10b^2 \cdot 3c^2 d\, x^{9\mu} \text{ \&c.} \\ \quad\quad + 5b\, c^4 x^{9\mu} \text{ \&c.} \end{array} \right.$$

$$Ax^6 = A \times \left\{ \begin{array}{l} b^6 x^{6\mu} + 6b^5 c\, x^{7\mu} + 6b^5 d\, x^{8\mu} + 6b^5 e\, x^{9\mu} \text{ \&c.} \\ \quad + 15b^4 c^2 x^{8\mu} + 15b^4 \, 2cd\, x^{9\mu} \text{ \&c.} \\ \quad\quad + 20b^3 c^3 x^{9\mu} \text{ \&c.} \end{array} \right.$$

$$Ax^7 = A \times \left\{ \begin{array}{l} b^7 x^{7\mu} + 7b^6 c\, x^{8\mu} + 7b^6 d\, x^{9\mu} \text{ \&c.} \\ \quad + 21 b^5 c^2 x^{9\mu} \end{array} \right.$$

$$Ax^8 = A \times b^8 x^{8\mu} + 8b^7 c\, x^{9\mu} \text{ \&c.}$$

$$Ax^9 = A \times b^9 x^{9\mu} \text{ \&c.}$$

Jam hisce omnibus secundum indices potestatum literæ x dispositis, consit hæc formula generalis:

FORMULA.

MULTIPLICATIONIS ET DIVISIONIS CLIMACTICÆ.

$$x^\lambda + A\, b x^\mu + \begin{array}{l} A\, c \\ + A\, b^2 \end{array} x^{2\mu} \begin{array}{l} + A\, d \\ + A\, 2bc \\ + A\, b^3 \end{array} x^{3\mu} \begin{array}{l} + A\, e \\ + A\, \overline{2bd + c^2} \\ + A\, 3b^2 c \\ + A\, b^4 \end{array} x^{4\mu} \begin{array}{l} + A\, f \\ + A\, \overline{2be + 2cd} \\ + A\, \overline{3b^2 d + 3b c^2} \\ + A\, 4b^3 c \\ + A\, b^5 \end{array} x^{5\mu}$$

+ A z

$$\left.\begin{array}{l}
+\mathrm{A}.g\\
+\mathrm{A}.\overline{2bf+2ce+d^2}\\
+\mathrm{A}.\overline{3b^2e+3b.2cd+c^3}\\
+\mathrm{A}.\overline{4b^3d+6b^2c^2}\\
+\mathrm{A}.5b^4c\\
+\mathrm{A}.b^6
\end{array}\right\} x^{6\mu}$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\mathrm{A}.h\\
+\mathrm{A}.\overline{2bg+2cf+2de}\\
+\mathrm{A}.\overline{3b^2f+3b.2ce+3b.d^2+3c^2d}\\
+\mathrm{A}.\overline{4b^3e+6b^2.2cd+4bc^3}\\
+\mathrm{A}.\overline{5b^4d+10b^3c^2}\\
+\mathrm{A}.6b^5c\\
+\mathrm{A}.b^7
\end{array}\right\} x^{7\mu}$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\mathrm{A}.k\\
+\mathrm{A}.\overline{2bh+2cg+2df+e^2}\\
+\mathrm{A}.\overline{3b^2g+3b.2cf+3b.2de+3c^2e+3cd^2}\\
+\mathrm{A}.\overline{4b^3f+6b^2.2ce+6b^2d^2+4b.3c^2d+c^4}\\
+\mathrm{A}.\overline{5b^4e+10b^3.2cd+10.b^2c^3}\\
+\mathrm{A}.\overline{6b^5d+15.b^4.c^2}\\
+\mathrm{A}.7.b^6.c\\
+\mathrm{A}.b^8
\end{array}\right\} x^{8\mu}$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\mathrm{A}.l+\mathrm{A}.\overline{2bk+2ch+2dg+2ef}+\mathrm{A}.\overline{3b^2h+3b.2cg+3b.2df+3be^2+3c^2f+3c.2de+d^3}\\
+\mathrm{A}.\overline{4b^3g+6b^2.2cf+6b^2.2de+4b.3c^2e+4b.3cd^2+4c^3.d}\\
+\mathrm{A}.\overline{5b^4f+10b^3.2ce+10.b^3.d^2+10.b^2.3c^2.d+5bc^4}+\mathrm{A}.\overline{6.b^5e+15.b^4.2cd+20b^3.c^3}\\
+\mathrm{A}.\overline{7b^6.d+21.b^5.c^2}+\mathrm{A}.8b^7.c+\mathrm{A}.b^9
\end{array}\right\} x^{9\mu}+\&c.$$

$$=\overline{a+bx^{\mu}+cx^{2\mu}+dx^{3\mu}+ex^{4\mu}+fx^{5\mu}\ \&c}\,\Big|^{\lambda}.$$

Si formulæ hujusce membra singula cum quantitate x^{λ} multiplices, hoc est si indices potestatum literæ x quantitate λ augeas, efficietur formula generalis potestatum seriei $ax^{\lambda}+bx^{\lambda+\mu}+cx^{\lambda+2\mu}+dx^{\lambda+3\mu}+ex^{\lambda+4\mu}$ &c. sive formula generalis harum quantitatum $\overline{ax^{\lambda}+bx^{\lambda+\mu}+cx^{\lambda+2\mu}+dx^{\lambda+3\mu}+ex^{\lambda+4\mu}\ \&c}\,\Big|^{\lambda}$. Quæ denique pro symbolis A, A, A, A, &c. hisce ordine restituti, $\lambda a^{\lambda-1}$, $\lambda.\frac{\lambda-1}{2}a^{\lambda-2}$, $\lambda.\frac{\lambda-1}{2}.\frac{\lambda-2}{3}a^{\lambda-3}$, $\lambda.\frac{\lambda-1}{2}.\frac{\lambda-2}{3}.\frac{\lambda-3}{4}a^{\lambda-4}$, in formulam generalem Moivræanam migraveris.

SAMUELIS HORSLEII

DE

GEOMETRIA FLUXIONUM

LIBER SINGULARIS.

SIVE ADDITAMENTUM TRACTATUS NEWTONIANI

DE METHODO RATIONUM PRIMARUM ET ULTIMARUM.

4 D 2

GEOMETRIA FLUXIONUM.

DEFINITIONES.

I.

NASCI dicuntur magnitudines motu genitæ, dum ſenſim creſcunt.

II.

Evaneſcere, dum ſenſim minuuntur.

III.

Communi verbo *fluere* dicuntur, quæ vel naſcuntur, vel evaneſcunt.

IV.

Magnitudinum fluentium velocitates creſcendi vel decreſcendi vocantur *fluxiones*.

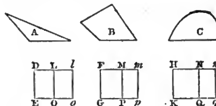
Cæterùm hoc ipſum, velocitas creſcendi decreſcendive, quo ſenſu dicitur, exemplis declarandum eſt.

Fig. 1.

Puta rectam AB motu puncti B verſus b, β generari, ac perpetim augeri; velocitas creſcendi rectæ AB, cùm aſſignatam quamvis longitudinem, puta Ab, adepta ſit, ea ipſa eſt quâ punctum mobile B è loco b egreditur. Et ſi regreſſu puncti B à locis β, b verſus A, recta AB perpetim decreſcat, velocitates receſſûs puncti B à locis β, b velocitates erunt decreſcendi rectæ AB, cùm è majore aliquâ longitudine in illas Aβ, Ab decreverit. Fluxio igitur rectæ AB eſt velocitas, quâ punctum B, ſive progrediendo, ſive recedendo è loco B diſcedit. Et fluxio ejuſdem rectæ jam factæ Ab, ea eſt, quâ punctum mobile B, progrediendo ſive recedendo, è loco b diſcedit. Et velocitas puncti B ex alio quovis loco β diſceſſuri, fluxio eſt rectæ AB longitudinem Aβ adeptæ.

Superficierum fluentium velocitates creſcendi vel decreſcendi ita æſtimantur, ſi ad longitudinem aliquam datam, hoc eſt, pro arbitrio ſumendam, ſed quæ ſemel ſumpta non debet mutari, ſuperficies quæ fluant ſemper applicentur. Cujuſque enim velocitas creſcendi vel decreſcendi eadem eſt,

DEFINITIONES. est, ac lateris ex perpetuâ applicatione oriundi. Puta superficies A, B, C laterum incrementis vel decrementis perpetim augeri, vel minui. Exponatur recta DE datæ alicujus magnitudinis, et rectæ DE æquales exponantur aliæ FG, HK. Sint A, B, C, superficierum fluentium, A, B, C, magnitudines, quæ vel initio fluxûs fuere, vel fluendo simul extiterunt. Et ad rectam DE applicetur rectangulum EL spatio A æquale. Ad rectam verò FG applicetur rectangulum GM spatio B æquale. Ad rectam denique HK, applicatum puta rectangulum KN spatio C æquale. Ad easdem rectas DE, FG, HK, applicata puta rectangula El, Gm, Kn, aliis superficierum fluentium A, B, C magnitudinibus, fluendo simul factis, æqualia. Atque hoc semper fieri intelligatur, ut superficiebus A, B, C crescentibus vel decrescentibus, rectangula El, Gm, Kn simul ac pariter cum illis fluant. Fluunt igitur latera ex applicationibus orta. Rectæ inquam DL, FM, HN fluunt. Harum verò rectarum atque superficierum fluentium crescendi decrescendive velocitates eædem censendæ sunt; nimirum superficiei A, rectæque DL; superficiei B, rectæque FM; superficiei C, rectæque HN.



Solidorum fluentium crescendi decrescendive velocitates ad similem modum æstimare licet. Nimirum, si ad superficiem aliquam datam, hoc est, pro arbitrio sumendam, sed quæ semel sumpta mutari non debet, Solidorum, quotquot fluant, applicatio fiat. Cujusque enim crescendi decrescendive eadem est velocitas, ac lateris ex perpetuâ applicatione oriundi.

Quantitatum Algebraicarum, quæ trinam dimensionem, uti loquuntur Algebraistæ, excedunt, velocitates crescendi decrescendive æstimantur, adhibendo interpretationem symbolorum Geometricam. Verbi causâ, si quantitatem Algebraicam *xyzus*, è fluentibus *x*, *y*, *z*, *u*, *s* factam, hoc modo scribas, $\frac{xyzus}{1}$; tum pro unitate eam rectæ alicujus datæ potestatem substituas, quæ quantitatem $\frac{xyzus}{1}$ ad Solidi, Superficiei, vel Rectæ ordinem deprimat; cujus velocitatem crescendi decrescendive eo, quo tradidimus modo, æstimare liceat.

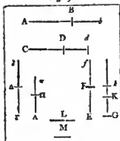
V.

Fluxionum nomine veniunt non modò velocitates illæ crescendi decrescendive, quarum illud maximè proprium est; verùm etiam, ex translatione, magnitudines Geometricæ cujuscunque generis, quæ velocitatum illarum inter se rationes servant.

Fluant

Fluant rectæ duæ AB, CD. Sint aliæ rectæ EF, GK, quarum EF sit ad GK, ut velocitas quâ punctum B, quod motu suo rectam AB generat, è loco A egreditur, ad velocitatem quâ punctum D, cujus motu recta altera CD generatur, egreditur è loco C. Tum crescere vel decrescere intelligantur rectæ EF, GK, eâ quidem lege, ut fluentibus AB, CD, EF, GK, si capiantur punctorum mobilium B, F loca quælibet, *b*, *f*, quæ simul ea appulerint, item mobilium D, K, loca quæ simul ea appulerint *d*, *k*; EF sit ad E*f*, ut velocitas motûs puncti B è loco primo A, ad velocitatem motûs ejusdem puncti B è loco *b*; similiter sit GK ad G*k*, ut velocitas motûs puncti D è loco suo primo C ad velocitatem motûs ejusdem puncti è loco *d*. Ita verò necessario fiet, ut E*f* sit etiam ad G*k*, ut velocitas motûs puncti B è loco *b* ad velocitatem motûs puncti D è loco *d*. DEFINITIONES.

Fig. 5.



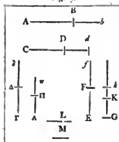
Rectæ E*f*, G*k*, ad hunc modum mutabiles, fluxiones dicuntur rectarum A*b*, C*d*, atque omnium adeo quantitatum, quarum velocitates crescendi decrescendive earum inter se rationes induant. Sunt enim illæ rectæ fluxionum, quarum inter se proportiones servant, symbola quasi Geometrica. Ac pari jure aliæ quævis magnitudines Geometricæ, quæ ita crescunt vel diminuuntur, ut rectarum E*f*, G*k* proportiones inter se semper servent, illis utique fluentium magnitudinibus inter se collatis, quæ simul fluendo exsistunt, rectarum A*b*, C*d*, aliarumque omnium magnitudinum, quæ pariter cum hisce A*b*, C*d* fluunt, fluxiones sunt dicendæ. Hujuscemodi verò magnitudines notis $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ Newtonus designavit, literis x, y, z fluentes designantibus.

Ex his autem liquet, magnitudinum fluentium fluxiones, quæ sensu definitionis quintæ eo nomine vocantur, magnitudines esse Geometricas, quæ vel quantitate sint fixâ et permanente, vel ipsæ fluant. Fixâ quidem quantitate manent, quarum fluentes æquabili velocitate fluunt. Sin fluenti velocitas crescendi vel decrescendi utcunque sit mutabilis, in hoc casu fluxio ipsa fluet; et crescendo quidem, si velocitas fluentis crescat, decrescendo, si illa sensim minuatur. Sic enim si puncti B, rectam AB generantis, velocitates motûs è locis A, *b* æquales sint, æquales erunt rectæ EF, F*f*, quæ velocitatum illarum inter se proportiones servant. Ac si velocitas motûs puncti B ex alio quovis loco rectæ AB eadem maneat, rectæ etiam EF magnitudo fixa manet. Sin velocitas motûs puncti B è loco *b* quàm è loco A major sit, recta E*f* rectâ EF major erit. Et si velocitas motûs puncti B, longiùs à loco A progredientis, sensim augeatur, recta quoque EF sensim crescet. E contrario decrescet recta EF, si velocitas motûs puncti B, progrediente puncto illo, sensim minuatur.

Puta igitur rectas AB, CD motu inæquabili punctorum B, D hanc et illam generari. Fluent igitur rectæ EF, GK; atque harum velocitates crescendi decrescendive aliis rectis, L, M, exponi poterunt. Rectæ autem

L, M,

DEFINITIONES. L, M, atque aliæ omnes magnitudines Geometricæ, quæ ita crefcant vel diminuantur, ut harum rectarum inter fe proportiones fervent, rectarum EF, GK, fenfu definitionis quintæ, fluxiones erunt. Hujufmodi verò quantitates, ad fluentes primas referendo, fluxiones fecundas Newtonus nominavit, et fymbolis $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ defignari juffit. Rurfum magnitudines illæ $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ vel quantitate fint fixâ quæque et permanente, vel ipfæ fluant; prout quantitates $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ velocitate unaquæque æquabili fluat, vel utcunque mutabili. Si fluant magnitudines $\ddot{x}$, $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, erunt et harum fluxiones, fenfu definitionis quintæ; magnitudines nimirum Geometricæ, quæ velocitatum, quibufcum magnitudines $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ crefcunt vel decrefcunt, proportiones inter fe, fluendo vel permanendo, fervent. Tales autem magnitudines fluentium x, y, z fluxiones tertias Newtonus nominavit, atque fymbolis $\dddot{x}$, $\dddot{y}$, $\dddot{z}$ defignari voluit. Fluxionum quarti, quinti, cujufvis demum ordinis, fimilis eft interpretatio.



Jam verò fint ΓΔ, ΑΠ magnitudines Geometricæ, quæ eâ lege fluant, ut velocitates quibufcum illæ crefcunt vel decrefcunt, magnitudinum fluentium AB, CD inter fe proportiones fervent, eis utique fluentium quantitatibus inter fe collatis, quæ fluendo fimul exfiftunt. Sunt igitur magnitudines AB, CD magnitudinum ΓΔ, ΑΠ, fenfu definitionis quintæ, fluxiones. E diverfo funt hæ illarum fluentes, quas fymbolis $\acute{x}$, $\acute{y}$ Newtonus defignavit, literis x, y, magnitudines AB, CD defignantibus.

Rurfum magnitudines Geometricæ quarum velocitates crefcendi decrefcendive magnitudinum ΓΔ, ΑΠ proportiones inter fe fervant, iis utique fluentium quantitatibus, quæ fluendo fimul exfiftunt inter fe collatis, rectarum ΓΔ, ΑΠ fluentes funt, rectarum verò AB, CD fluentes fecundæ vocandæ, et more Newtoniano fymbolis $\overset{\prime\prime}{x}$, $\overset{\prime\prime}{y}$ defignantur.

In fummâ, ex quâvis magnitudine fluente (puta x) tanquam radice, fluentium et fluxionum in utramque partem infinita eft progreffio, $\overset{\prime\prime}{x}$—$x$, $\overset{\prime\prime\prime}{x}$, $\overset{\prime\prime}{x}$, $\overset{\prime}{x}$, x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddddot{x}$—x, quæ tamen omnes vi definitionis quintæ ad magnitudines Geometricas revocantur.

VI.

Similiter, vel *eodem modo* fluere dicuntur quantitates, quæ fingulæ fimul nafcuntur, vel fimul evanefcunt.

VII.

Contrariè fluere dicuntur, quarum nafcente alterâ, altera evanefcit.

THE-

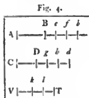
THEOREMA PRIMUM.

THEOR. I.

Magnitudinum, quæ fluunt, Fluxiones inter se proportiones habent, quæ incrementorum nascentium sunt primæ, vel evanescentium ultimæ.

Sint lineæ primò magnitudines quæ fluunt. Fluant igitur lineæ AB, CD, et fluendo longitudines illas AB, CD sint adeptæ. Fluendo autem perseverantes, dato quovis tempore longitudines novas A*b*, C*d* adipiscantur, ut sint B*b*, D*d* incrementa linearum fluentium, fluendo simul facta. Dico fluxionem rectæ AB ad fluxionem rectæ CD proportionem habere, quæ prima est nascentis incrementi B*b* ad incrementum nascens D*d*; vel, si regressu punctorum B, D versus A, C lineæ illæ decrescant, quæ ultima est evanescentis incrementi B*b* ad D*d* simul evanescens.

Fig. 4.

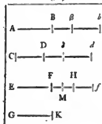


Rectæ AB, CD vel utraque fluunt velocitate æquabili, vel altera quidem æquabili, mutabili altera; vel utraque denique mutabili. Fluant primò velocitate utraque æquabili. Spatia igitur B*b*, D*d* velocitatibus æquabilibus eodem tempore confecta, erunt inter se ut velocitates. Et si dividatur B*b* in partes quot volueris æquales B*e*, *ef*, *fb*, tum si D*d* in partes totidem æquales dividatur D*g*, *gh*, *hd*; erunt B*e*, D*g* rectarum AB, CD incrementa, incrementis B*b*, D*d* minora, fluendo simul facta. Nam si dividatur tempus totum VT, quo spatia B*b*, D*d* sunt confecta, in particulas V*k*, *kl*, *l*T inter se æquales, numero autem totidem quot sunt partes in quas linearum B*b*, D*d* utraque divisa est, erit B*b* ad B*e*, ut tempus VT ad tempus V*k*. Erit etiam D*d* ad D*g*, ut tempus VT ad tempus V*k*. Spatia verò, velocitatibus æquabilibus descripta, sunt inter se ut tempora, quibus confecta sunt. Est igitur B*b* ad B*e* ut spatium puncto mobili B, datâ velocitate lato, tempore VT confectum, ad spatium eodem puncto eâdem velocitate tempore V*k* confectum. Est autem B*b* illud ipsum spatium, quod punctum B tempore VT confecit. Erit igitur B*e* illud ipsum spatium, quod punctum B tempore V*k* confecerit. Simili ratione concludetur esse D*g* spatium, quod punctum D, datâ velocitate suâ latum, eodem tempore V*k* confecerit. Sunt igitur B*e*, D*g* rectarum AB, CD incrementa fluendo simul facta, sive spatia punctis B, D simul confecta. Erunt igitur inter se ut punctorum velocitates. Neque huic rationi officiet temporis V*k* magnitudo, magna illa parvave fuerit. Numero igitur particularum V*k*, *kl*, *l*T in infinitum crescente, magnitudinibus singularum infinitè decrescentibus, si rectarum B*b*, D*d*, ac temporis VT divisiones similes semper fiant (ex quo scilicet numerus partium B*e*, *ef*, *fb*, necnon D*g*, *gh*, *hd* infinitè augebitur, magnitudinibus singularum infinitè decrescentibus) manebit rectarum B*b*, D*d* partibus simul genitis, B*e*, D*g* data velocitatum ratio, quibuscum punc-

THEOR. I. ta B, D æquabiliter feruntur. Quare data illa velocitatum ratio nascentium Be, Dg prima erit, vel evanescentium ultima. In hoc casu igitur velocitates motuum punctorum B, D, hoc est, fluxiones rectarum AB, CD inter se proportionem habent incrementorum nascentium primam, vel evanescentium ultimam. Q. E. D.

CAS. 2. Sed fluat AB velocitate mutabili, fluente CD æquabiliter. Velocitas puncti B progredientis vel sensim augetur, vel sensim languescit. Primò augeatur. Exponatur recta EF datæ cujusvis longitudinis. Sit alia E*f* ad quam EF proportionem habeat, quam velocitas motûs puncti B è loco B egredientis ad velocitatem motûs ejusdem puncti B è loco aliquo *b* ulteriori. Sit etiam GK recta, ad quam EF proportionem habeat velocitatis motûs puncti B, è loco B, ad velocitatem æquabilem puncti D rectam CD generantis. Jam B*b* major erit, quàm ut habeat ad D*d* proportionem quam EF ad GK; minor verò, quàm ut habeat ad eandem D*d* proportionem quam E*f* ad GK. Nam si punctum B, id omne temporis quo rectam B*b* generavit, cum velocitate illâ, quâ è loco B primùm egressum est, æquabiliter latum esset, rectam utique generâsset illâ B*b* minorem; quæ quidem ad D*d* rationem habuisset quam EF ad GK. Sin punctum B cum majore illâ velocitate, quâ è loco *b* egreditur, è loco B exiisset, tempus, quo B*b* reverâ generavit, motu æquabili perseverans, majorem generâsset; quæ ad D*d* rationem habuisset quam E*f* ad GK. Major igitur est B*b* quàm ut habeat ad D*d* rationem rectæ EF ad GK, sed minor eadem, quàm quæ rationem ad eandem habeat quam E*f* ad GK. Regredientibus autem punctis B, D à locis *b*, *d* versus B, D, ratio evanescentis B*b* ad evanescentem D*d* sensim minuet; et rationem rectæ EF ad GK, quam semper superat, propiùs tamen accessura est, quàm pro datâ quâvis differentiâ. Non enim. Erit igitur ratio aliqua minoris quidem quàm rectæ E*f* ad GK, majoris verò quàm EF ad GK, quâ ratio evanescentis B*b* ad evanescentem D*d* non minor fiet. Ejusmodi sit ratio rectæ EH ad GK. Recta igitur EH minor est quàm E*f*, major autem eadem quàm EF. Jam cùm puncti B velocitas, è loco B progredientis, sensim crescat; si detur velocitas major quidem quàm illa, quæ est motûs puncti B è loco B, minor verò quàm illa, quæ est motûs puncti B è loco *b*; erit locus aliquis locorum B, *b* intermedius, ex quo motûs puncti B velocitas datâ illâ minor erit. Detur igitur velocitas, quæ habeat ad velocitatem puncti D rectam CD generantis, proportionem quam EH ad GK. Hæc major erit velocitate quæ est motûs puncti B è loco B, minor verò illâ quæ est motûs puncti B è loco *b*. Sit β locus locorum B, *b* intermedius, ex quo velocitas motûs puncti B datâ minor sit. Sit Dδ spatium puncto D confectum, dum punctum B spatium Bβ absolvat. Sit EM recta, quæ habeat ad GK rationem, quam velocitas motûs puncti B è loco β ad velocitatem motûs puncti D æquabilem. Erit illa EM minor quàm ut habeat ad GK rationem quam EH ad GK. Omnino igitur minor quàm ut habeat ad GK rationem quam Bβ ad Dδ; cùm ratio illius Bβ ad Dδ ratione EH ad GK minor esse nequeat (id enim posuimus).

Fig. 5.



Quare

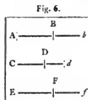
Quare $B\beta$ major est, quàm ut habeat ad $D\delta$ rationem quam EM ad GK. Sunt autem $B\beta$, $D\delta$ rectarum AB, CD incrementa, fluendo simul facta, quorum illud velocitate generatum est crescente, hoc æquabili. Sunt etiam rectæ EF, EM ad rectam GK, sicut velocitates motûs puncti B è locis B, β ad velocitatem æquabilem puncti D. Ergo recta $E\beta$ major quidem erit, quàm ut sit ad $D\delta$ ut EF ad GK, sed minor eadem quàm ut sit ad $D\delta$ ut EM ad GK. Sed major jam ostensa est $B\beta$ quàm pro hâc ratione. Simul utique major et minor. Quod est absurdum. THEOR. I.

Non igitur est ratio ulla minoris quidem quàm Ef ad GK, majoris verò quàm EF ad eandem GK, quâ ratio evanescentis Bb ad evanescentem Dd non sit minor; quæ tamen rationem EF ad GK semper exsuperat. Quare ratio EF ad GK, quæ est fluxionis rectæ AB ad fluxionem rectæ CD, evanescentis Bb ad evanescentem Dd erit ultima, eademque nascentium prima.

Quòd si velocitas motûs puncti B progredientis sensim langueseat, similis erit et in hoc casu Theorematis demonstratio.

CAS. 3. Sed fluant AB, CD velocitate utraque mutabili. Sic etiam dico fluxionem rectæ AB ad fluxionem rectæ CD proportionem habere, quæ prima est nascentis incrementi Bb ad nascens Dd, vel ultima evanescentis Bb ad Dd simul evanescens. Fluat enim tertia aliqua recta EF æquabiliter. Et sit Ff incrementum quod recta EF acceperit, quo tempore rectis AB, CD accesserint Bb, Dd. Tum (per Cas. præc.) erit Bb ad Ff ultimò, ut fluxio rectæ AB ad fluxionem rectæ EF, et Ff ad Dd ultimò, ut fluxio rectæ EF ad fluxionem rectæ CD. Quare ex æquo erit Bb ad Dd ultimò, ut fluxio rectæ AB ad fluxionem rectæ CD. Q. E. D.

Fig. 6.



CASUS GENERALIS SECUNDUS.

Sint jam Superficies magnitudines quæ fluant. Fluant igitur superficies A, B (vid. fig. Def. 4.) Exponantur rectæ æquales DF, FG; ad quas superficierum fluentium fiat applicatio, ut sint rectangula EL, GM, magnitudinibus quibusvis fluentium, fluendo simul factis, æqualia, item rectangula Fl, Gm aliis quibusvis earundem fluentium magnitudinibus, fluendo simul factis. Jam fluxiones superficierum fluxionibus laterum ex applicatione oriundorum, linearum inquam DL, FM fluxionibus sunt æquales. (Vid. Def. 4 & 5.) Rectarum verò DL, FM fluxiones inter se proportiones habent, quæ primæ sunt incrementorum nascentium Ll, Mm (per Cas. Gen. 1.) Hoc est, quæ sunt primæ rectangulorum nascentium ol, Pm, vel eorundem evanescentium ultimæ. Hisce verò rectangulis superficierum fluentium incrementa, fluendo simul facta, semper sunt æqualia. Eædem igitur erunt nascentium rationes primæ, vel evanescentium ultimæ. Fluentibus igitur superficiebus A, B, fluxiones inter se rationes habent, quæ primæ sunt incrementorum nascentium, vel evanescentium ultimæ. Q. E D.

 CASUS

CASUS GENERALIS TERTIUS.

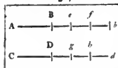
Si Solida sint magnitudines, quæ fluunt, similis erit et in hoc casu propositionis probatio, Solidorum fluxionibus ad Rectarum fluxiones revocatis.

Cor. Hæc ita se habent, si magnitudines similiter fluant. Sed et contrariè fluentium fluxiones inter se rationem habent, quæ prima est nascentis incrementi magnitudinis crescentis ad decrementum nascens magnitudinis decrescentis. Quod iisdem planè argumentis effici potest.

THEOREMA II.

Magnitudides inter se æquales si fluant, et fluendo æqualitatem, quam initio fluxûs habuere, inter se semper servent, harum fluxiones semper erunt inter se æquales. Vicissim, quarum magnitudinum fluxiones semper sunt æquales, hæ, dummodo homogeneæ sint, et similiter fluant, vel semper inter se æquales erunt, vel altera alterâ major erit datâ; utique si conferantur fluentium quantitates, quæ fluendo simul exsistunt.

Fig. 7.

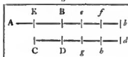


Sint magnitudines æquales AB, CD, quæ fluant, et fluendo æqualitatem inter se semper servent. Dico harum fluxiones semper esse inter se æquales. Sint Bb, Dd magnitudinum fluentium incrementa quæ simul fluendo exsistunt, tempore quovis finito genita. Erunt igitur Ab, cd inter se æquales. Et propter æquales AB, CD, erunt etiam Bb, Dd inter se æquales. Nec huic rationi officient incrementorum Bb, Dd magnitudines, magna ea parvave fuerint, dummodo fluendo simul exsistant. Quare et nascentium inter ipsa prima, vel evanescentium ultima ratio æqualitas erit. Sed incrementorum nascentium ratio inter ipsa prima, vel evanescentium ultima est fluxionum ratio. Fluxiones igitur sunt inter se æquales. Q. E. D.

Jam verò magnitudinum fluentium AB, CD fluxiones semper sint æquales, et sint fluentes magnitudines homogeneæ, et similiter fluant. Dico fluentes vel semper inter se æquales esse, vel alterâ alteram datâ majorem, si quantitates, quæ fluendo simul exsistunt, conferantur. Sint AB, CD magnitudines quas initio fluxûs fluentes habuerunt, sive priusquam fluere inceperint. Sint Bb, Dd incrementa simul genita. Horum utrumque in partes quotvis dividas, numero æquales, temporibus iisdem ordine genitas; nempe Bb in partes Be, ef, fb; Dd in partes totidem Dg, gh, hd. Jam si partium utriusque numerus infinitè augeatur, magnitudinibus singularum infinitè decrescentibus, erunt partium simul genitarum rationes nascentium primæ, sive evanescentium ultimæ, eædem quæ fluxionum rationes (per Theor. I. hujus). Hoc est, erit Be ad Dg ultimò ut fluxio magnitudinis AB ad fluxionem magnitudinis CD. Et ef ad gh ultimò ut fluxio magnitudinis Ae ad fluxionem magnitudinis cg. Et fb ad hd ultimò ut fluxio magnitudinis Af ad fluxionem magnitudinis ch. Est autem æqualitas fluxionum fixa ratio (id enim posuimus) Quare partium Be, ef, fb ad partes Dg, gh, hd

nascentium ad nascentes, vel evanescentium ad evanescentes, est æqualitas ratio prima, vel ultima, communis. Ergo magnitudines totæ B*b*, D*d* sunt inter se æquales (per Cor. Lem. IV. Newton. de Rat. Prim. et Ult.) Datæ autem AB, CD (datas enim semper intelligo fluentium initio fluxûs magnitudines, quod semel monuisse satis esto) datæ inquam AB, CD vel æquales sunt inter se, vel inæquales. Si æquales sint, erunt A*b*, C*d* inter se æquales.

Fig. 8.

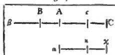


Si inæquales sint AB, CD, altera ex illis major erit. Sit AB major, et auferatur BE minori CD æqualis. Ergo data erit AE, et E*b*, C*d* inter se æquales erunt. Ergo A*b* datâ major est quàm C*d*. Sunt igitur A*b*, C*d* vel æquales inter se, vel altera alterâ est datâ major. Q. E. D.

THEOREMA III.

Si duæ magnitudines eâ lege fluant, ut simul sumptæ, jungendo utique quæ simul fluendo exsistunt, datæ cuidam æquales sint, fluxiones earum æquales quidem, sed contrariæ erunt. Et si duarum fluentium fluxiones inter se semper æquales sed contrariæ sint, fluentium summa, jungendo utique quæ simul fluendo exsistunt, datæ cuidam æqualis erit.

Fig. 9.



Duæ magnitudines, quæ initio fluxûs sint AB, AC, junctæque summam efficiant BC, eâ lege fluant, ut datæ BC earum summa semper sit æqualis. Dico earum fluxiones inter se æquales, sed contrarias esse. Et contrarias quidem esse fluentium AB, AC fluxiones, hoc est, magnitudines illas contrariè fluere, manifestum est; siquidem earum summæ sua constet magnitudo. Nam si earum altera, puta AB, crescat, opus est decrescat altera, ne crescente utrâque summa crescat. Vicissim, si altera, puta AB, decrescat, opus erit crescat altera, ne utrâque decrescente summa decrescat. Fluunt igitur AB, AC modis inter se contrariis. Dico earum fluxiones inter se æquales esse. Nam quo tempore AB fluendo facta est Aβ, contrariè fluendo altera AC fiat A*c*. Duarum igitur Aβ, A*c* summa βc datæ BC æqualis erit. Ablatâque communi B*c*, erunt βB, C*c* inter se æquales. Hoc est, illud quo aucta est AB æquale erit ei quo imminuta est AC, vel vicissim. Neque huic rationi officiet illarum Bβ, C*c* magnitudines, magnæ parvæve fuerint, dummodo fluendo simul genitæ. Quare et nascentium Bβ, C*c* prima inter ipsas ratio æqualitas erit. Quæ verò nascentibus Bβ, C*c* inter ipsas est prima, eadem magnitudinum AB, AC fluxionibus inter ipsas ratio erit. (Th. I. Cor.) Quare et fluxiones illæ inter se æquales erunt. Q. E. D.

Rursum magnitudinum duarum AB, AC contrariè fluentium, ut crescente alterâ, altera decrescat, intelligantur fluxiones semper inter se æquales. Dico fluentium summam, jungendo utique quæ simul fluendo exsistunt, datæ cuidam æqualem esse; ei nimirum, quam magnitudines initio fluxûs

THEOR. III & IV. fluxûs compositæ conficiebant. Sint enim $A\beta$, Ac fluentium quantitates quævis, quæ simul fluendo exsistunt. Dico harum summam βc magnitudini BC æqualem esse. Sit enim $\alpha\kappa$ magnitudo quædam, quæ eâ lege fluat, ut fluenti $A\beta$ addita, jungendo utique quæ simul fluendo exsistunt, summam reddat datæ BC æqualem. Fluentium igitur $A\beta$, $\alpha\kappa$ fluxiones contrariæ quidem, sed inter se æquales erunt; per ea quæ modò ostendimus. Fluentium autem $A\beta$, Ac fluxiones sunt inter se æquales; sic enim posuimus. Quare fluentium Ac, $A\kappa$ fluxiones inter se æquales erunt. Et fluentes illæ, cùm utraque earum contrario modo fluat atque $A\beta$, similiter utique fluunt. Quum verò $\alpha\kappa$ eâ semper lege fluat, ut fluenti $A\beta$ addita summam reddat datæ BC æqualem, si $A\beta$ refluendo fiat AB, illa autem $\alpha\kappa$ refluendo simul fiat $\alpha\chi$, erunt $\alpha\chi$, AC inter se æquales. Magnitudines igitur AC, $\alpha\chi$, quarum similiter fluentium fluxiones semper sunt inter se æquales; hæ, cùm initio fluxûs inter se æquales sint, manebunt semper quidem inter se æquales, si conferantur utique earum quantitates quæ fluendo simul exsistunt (Th II) At simul fluendo exsistunt Ac, $\alpha\kappa$, nempe cùm earum utraque simul cum $A\beta$ fluendo exsistat. Sunt igitur Ac, $\alpha\kappa$ inter se æquales. Additâque communiter $A\beta$, duæ $A\beta$, Ac simul sumptæ duabus $A\beta$, $\alpha\kappa$ simul sumptis æquales erunt. Sed duæ $A\beta$, Ac simul sumptæ summam efficiunt βc. Et duæ $A\beta$, $A\kappa$ simul sumptæ datæ BC æquales sunt. Id enim posuimus. Quare βc datæ BC est æqualis. Q. E. D.

SCHOLIUM.

Quantitatum contrariè fluentium fluxiones algebraicè hoc modo designari solent: $\dot{x} = -\dot{y}$. Et quoties calculis artificiosè subductis, istiusmodi tandem æquatio evaserit, indicio est, quantitatem $x + y$ permanenti cuidam æqualem esse.

THEOREMA IV.

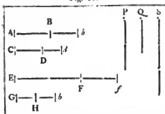
Magnitudines, quæ datam inter se rationem habent, si fluant, et fluendo rationem datam, quam initio fluxûs habuere, inter se semper servent, harum fluxiones datam fluentium suarum rationem inter se semper habent. Vicissim, quarum magnitudinum fluxiones datam inter se rationem semper servant, hæ dummodo homogeneæ sint, et similiter fluant, vel datam fluxionum suarum rationem inter se semper habent, vel altera alterâ major erit datâ quàm pro fluxionum ratione; utique si conferantur fluentium quantitates illæ, quæ fluendo simul exsistunt.

Demonstratur hæc Propositio ad modum secundæ, imò iisdem planè verbis, si in illius demonstratione pro *ratione æqualitatis ratio data* ubique supponatur.

THEOREMA V.

Fluentibus magnitudinibus homogeneis, fluxionum summa summæ erit fluxio, differentia differentiæ.

Fluant magnitudines homogeneæ AB, CD. Fluat tertia EF cum prioribus homo-

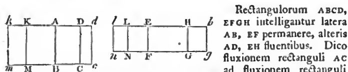


homogenea, eâ lege ut EF duarum AB, CD summæ semper sit æqualis, nimirum si conferantur fluentium magnitudines fluendo simul factæ. Rursum fluat alia GH cum prioribus etiam homogenea, eâ lege ut GH duarum AB, CD differentiæ semper sit æqualis, si magnitudines fluendo simul factæ conferantur. Dico fluxionum AB, CD summam magnitudinis EF fluxionem esse, earundem verò fluxionum differentiam magnitudinis GH esse fluxionem. Sint enim P, Q magnitudinum AB, CD fluxiones, et S fluxio magnitudinis EF. Sint AB, CD, EF magnitudines fluendo simul factæ; et sint B*b*, D*d*, F*f* magnitudinum fluentium AB, CD, EF incrementa fluendo simul facta. Habet igitur S ad P rationem nascentis F*f* ad nascens B*b* primam (per Prop. I. hujus). Habet quoque S ad Q rationem nascentis F*f* ad nascens D*d* primam. Habet igitur S ad duas P, Q simul sumptas rationem eam, quæ prima est nascentis F*f* ad nascentia B*b*, D*d* simul sumpta. Quoniam verò AB, CD simul sumptæ magnitudini EF æquales sunt, et A*b*, C*d* simul sumptæ magnitudini E*f*, erunt incrementa B*b*, D*d* simul sumpta incremento F*f* æqualia. Neque huic rationi officient incrementorum magnitudines, magna illa parvave fuerint. Quare et nascentis F*f* ad nascentia B*b*, D*d* simul sumpta æqualitas prima ratio erit. Sed prima illa ratio magnitudinis est S ad duas P, Q simul sumptas; ex priùs ostensis. Magnitudo igitur S duabus P, Q simul sumptis est æqualis. Hoc est, fluxio magnitudinis EF summæ fluxionum AB, CD. THEOR. V & VI.

Et simili prorsus argumento concludetur fluxionem magnitudinis GH duarum P, Q differentiæ esse æqualem. Q. E. D.

THEOREMA VI.

Si rectangulis fluentibus unum tantummodò latus unicuique fluat, arearum fluxiones inter se rationem habent compositam è ratione datâ laterum permanentium, et è ratione fluxionum laterum quæ fluunt, vel datâ vel mutabili.

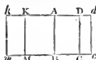


Rectangulorum ABCD, EFGH intelligantur latera AB, EF permanere, alteris AD, EH fluentibus. Dico fluxionem rectanguli AC ad fluxionem rectanguli EG rationem habere compositam è ratione datâ datæ AB ad datam EF, et ratione fluxionis rectæ AD ad fluxionem rectæ EH; quæ vel data erit vel mutabilis, prout rectarum AD, EH vel utriusque vel alterius tantùm fluxus sit æquabilis. Rectarum AD, EH longitudines, dato quovis tempore, ex illis

AD,

Theor. VI & VII.

AD, EH in alias Ad, Eb mutentur; ut sint Dd, Hb incrementa rectarum fluentium fluendo simul facta. Erunt igitur rectangula Dc, Hg incrementa arearum fluentium fluendo simul facta. Arearum igitur fluxiones eam inter se rationem habebunt, quæ rectangulorum Dc, Hg vel nascentium prima est, vel evanescentium ultima. Hoc est, quæ composita est è ratione datâ rectæ AB ad rectam EF, cum illâ quæ rectæ Dd ad rectam Hb, nascentis ad nascentem, vel evanescentis ad evanescentem, prima ultimave erit. Sed ratio quæ rectis Dd, Hb vel nascentibus inter ipsas prima, vel evanescentibus erit ultima, ea rectarum AD, EH fluxionum ratio est. Arearum igitur fluentium AC, EG fluxiones inter se rationem habent compositam è ratione datâ rectæ AB ad rectam EF, et ratione fluxionum laterum quæ fluunt, AD, EH, vel datâ vel mutabili.



Cor. In rectis DA, HE capiantur AK, EL, quæ sint inter se sicut velocitates, quibus puncta A, E, quorum motu rectæ AD, EH generantur, è locis suis primis A, E egrediuntur. Et fluentibus rectis AD, EH, rectæ AK, EL vel permaneant, vel fluant; eâ quidem lege, ut velocitatum fluendi rectarum AD, EH rationes inter se, vel permanendo vel fluendo, servent. Si punctorum A, E, K, L, capiantur loca quæ simul ea appulerint, d, b, k, l, erunt Ak, El fluxiones rectarum Ad, Eb, sensu definitionis quintæ; et si rectangula Am, En compleantur, erunt rectangula illa rectangulorum Ac, Eg eodem sensu fluxiones; ut ex hoc Theoremate satis patet. Jam si rectas datas AB, EF literæ a, b designent, mutabiles autem Ad, Eb literæ x, y; rectangulorum ax, by, erunt rectangula $a\dot{x}$, $b\dot{y}$ fluxiones: notis utique $\dot{x}$, $\dot{y}$ rectas Ak, El designantibus, vel datas quidem illas vel mutabiles, prout ratio fluendi rectarum AD, EH postulaverit.

THEOREMA VII.

Parallelopipedis rectangulis, si, fluentibus altitudinibus, bases permaneant, Solidorum fluxiones inter se rationem habent è ratione datâ basium permanentium, et ratione fluxionum altitudinum, sive datâ, sive mutabili, componendam. Sin altitudinibus permanentibus bases fluant, Solidorum fluxiones rationem inter se habebunt è ratione altitudinum datâ, et ratione fluxionum basium, sive datâ, sive mutabili, componendam.

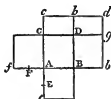
Demonstratur casus uterque ad exemplum præcedentis, colligendo rationes primas incrementorum solidorum nascentium, sive evanescentium eorundem ultimas.

Cor. Parallelopipedorum rectangulorum abx, cdy sunt parallelopipeda $ab\dot{x}$, $cd\dot{y}$ fluxiones, adhibitâ simili atque in præcedentibus notarum interpretatione.

THEOREMA

THEOREMA VIII.

Si rectanguli latus utrumque fluat, et sumantur rectæ, quæ, sensu definitionis quintæ, laterum sint fluxiones; rectangulorum sub latere utroque et alterius lateris fluxione summa, siquidem latus utrumque eodem modo fluat, sin latera contrariè fluant, horum rectangulorum differentia, rectanguli fluxio erit.

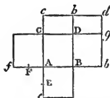


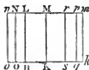
Rectanguli AD latera AB, AC fluant, ac primùm quidem eodem modo, hoc est, ut vel crescat utrumque, vel utrumque decrescat. Capiantur rectæ AF, AE, quarum AF sit ad AE, ut velocitas, quâ punctum generans rectam AB è loco A egreditur, ad velocitatem quâ punctum generans rectam AC ex eodem loco A decedit. Progredientibus autem punctis B, C, rectæ AF, AE vel permaneant, vel eâ lege fluant, ut velocitatum fluendi rectarum AB, AC, rationes inter se, vel permanendo, vel fluendo, servent. Si capiantur punctorum B, C, F, E loca quævis B, C, *f*, *e*, quæ simul ea appulerint, erunt A*f*, A*e* rectarum AB, AC, sensu definitionis quintæ, fluxiones. Completisque rectangulis AD, C*f*, B*e*, dico rectangula C*f*, B*e*, simul sumpta, rectanguli AD esse fluxionem.

Exponatur recta LH datæ cujusvis magnitudinis, cui recta LM ad perpendiculum insistens eâ lege fluat, ut rectangula AD, LHKM semper sint inter se æqualia, si sumantur punctorum B, C, M loca illa quæ simul ea appulerint. In rectâ ML capiatur LN, quæ habeat ad AF, AE rationes eas quas velocitas, quâ punctum L, rectam LM generans, è loco L egreditur, ad velocitates, quibus puncta rectas AB, AC generantia è loco A discedunt. Et LN aut permaneat, aut eâ lege semper fluat, ut rectæ LN longitudines sint inter se ut puncti M velocitates, si capiantur punctorum M, N loca, quæ simul ea appulerint, M, *n*. Erit igitur L*n*, sensu definitionis quintæ, fluxio rectæ LM. Completoque rectangulo H*n*, erit rectangulum H*n* fluxio rectanguli LK (per Th. VI. Cor.) Rectangulorum autem LK, AD fluxiones semper sunt inter se æquales, si capiantur punctorum B, C, M loca quæ simul ea appulerint (per Th. II. hujus). Rectangulum igitur H*n* rectanguli AD fluxioni æquale erit.

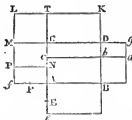
Sint *b*, *c*, *m* punctorum B, C, M loca quævis, quæ simul ea appulerint, prioribus B, C, M ulteriora, et compleantur rectangula A*d*, L*k*. Rectanguli verò A*d* lateribus *bd*, *cd*, occurrant CD, BD productæ in *g*, *h* punctis. Rectangulum H*n* ad rectangulum C*f* rationem habet è rationibus HL ad AC et L*n* ad A*f* compositam. Sed cùm L*n*, A*f* fluxiones sint rectarum LM, AB, quarum M*m*, B*b* sunt incrementa fluendo simul facta; ratio L*n* ad A*f*, nascentis M*m* ad nascentem B*b* prima erit (per Th. I. huj.) Rectangulum igitur H*n* ad rectangulum C*f* rationem habet è ratione datæ HL ad AC,

Theor. VIII.





five MK ad BD, nafcentifque *Mm* ad nafcentem B*b* primâ compofitam. Sed ratio ex hifce compofita prima eft rectanguli nafcentis M*k* ad rectangulum nafcens B*g*. Rectangulum igitur H*n* ad rectangulum *cf* rationem habet, quæ prima eft nafcentis M*k* ad nafcens B*g*. Simili argumento concludetur, rectangulum H*n* ad rectangulum B*e* rationem habere, quæ nafcentis M*k* ad nafcens D*c* prima eft. Rectangulum igitur H*n* ad rectangula duo *cf*, B*e* fimul fumpta rationem habet, quæ prima eft nafcentis M*k* ad duo nafcentia B*g*, D*c* fimul fumpta (Elem. V. 24.) hoc eft, fi ad rectam MK applicetur MK*qp* duobus B*g*, D*c* fimul fumptis æquale, quæ prima eft nafcentis M*k* ad nafcens M*q*. A rectangulo M*q* auferatur MK*sr* rectangulo D*c* æquale. Jam cùm rectangula L*k*, A*d* fint inter fe æqualia, necnon LK, AD (id enim pofuimus) rectangulum M*k* gnomoni B*bdc*C æquale erit. Ablatifque æqualibus M*s*, D*c*, rectangula *rk*, B*d* erunt inter fe æqualia. Rurfum cùm rectangulum M*q* duobus B*g*, D*c* fimul fumptis fit æquale, ablatis æqualibus M*s*, D*c*, erunt *rq*, B*g* inter fe æqualia. Quare *rk* erit ad *rq* ut B*d* ad B*g*. (El. V. 7.) Atque inter omnes rectangulorum *rk*, *rq*, B*d*, B*g* magnitudines, quæ fimul fluendo exfiftunt, hæc analogia obtinebit. Quare et nafcentium *rk*, *rq* prima inter ipfa ratio eadem erit, quæ nafcentium B*d*, B*g* prima. Sed nafcentibus B*d*, B*g* prima inter ipfa ratio eft æqualitas. Nafcentibus igitur *rk*, *rq* eft ipfa æqualitas prima inter ipfa ratio. Additoque communiter M*s*, nafcentium M*k*, M*q* ratio inter ipfa prima æqualium erit. Sed nafcentis M*k* ad nafcens M*q* prima ratio, rectanguli eft H*n* ad duo rectangula *cf*, B*e* fimul fumpta (ex priùs oftenfis). Rectangulum igitur H*n* æquale eft duobus rectangulis *cf*, B*e* fimul fumptis. Idem verò rectangulum H*n* fluxioni rectanguli AD jam olim oftenfum fuit æquale. Quare eidem fluxioni rectangula duo *cf*, B*e* fimul fumpta funt æqualia. Q. E. D.



Cas. 2. Si crefcente latere uno, puta AB, latus alterum AC decrefcat, fit T punctum in rectâ AC datum, ex quo punctum C rectâ verfus A movere incipiat, quo tempore punctum A rectam AB generans è loco fuo primo A difcedit. Sumantur rectæ AF, AE, quarum AF fit ad AE, ut velocitas, quâ punctum A è loco A difcedit, ad velocitatem quâ punctum C, verfus A movendo, egreditur è loco T. Progredientibus autem punctis B, C, rectæ AF, AE vel quibus fint longitudinibus permaneant, vel eâ quidem lege fluant, ut velocitatum fluendi rectarum AB, AC rationes, permanendo vel fluendo, inter fe femper fervent. Si capiantur punctorum B, C, F, E loca quævis *b*, *c*, *f*, *e*, quæ fimul ea appulerint, erunt

Af, *Ae* rectarum AB, AC fluxiones. Completisque rectangulis AD, *cf*, *Be*, Theor. VIII. dico rectangulorum *cf*, *Be* in hoc casu differentiam, rectanguli AD fluxionem esse. Compleantur enim rectangula TB, AL. Rectangulum AD duorum TB, TD differentia est. Fluxio igitur rectanguli AD differentia est fluxionum duorum TB, TD. (Th. V.) Sed cùm AT data sit, et *Af* rectæ AB fluxio, rectangulum T*f* fluxio erit rectanguli TB (Th. VI. Cor.) Rursum eùm rectæ TK, AB, opposita utique parallelogrammi latera, semper sint inter se æquales; crescente hâc, illa quoque paribus incrementis crescet. Et cùm motus puncti C versus A quicquid rectæ AC detraxerit, id omue rectæ TC apponet, decrescente AC recta TC crescet, atque ita quidem, ut inter se semper sint æquales hujus et illius fluxiones. Rectis igitur AB, AC contrariè fluentibus, rectæ TK, TC eodem modo fluunt. Et fluentis TK est *Af* vel illi æqualis TL fluxio, fluentis autem TC fluxio *Ae*. Rectangulorum igitur CL, *Be* summa est rectanguli TD fluxio; hoc est, si ad CM applicetur rectangulum CP rectangulo *Be* æquale, ut sit TP duorum CL, *Be* summa, hoc ipsum TP fluxio erit rectanguli TD (per Cas. 1. huj.) Quare duorum TP, T*f* differentia, hoc est AP, rectanguli AD fluxio erit. Sed cùm CP, *Be* sint inter se æqualia (id enim factum) erit AP duorum *cf*, *Be* differentia. Duorum igitur *cf*, *Be* differentia fluxio est rectanguli AD. Q. E. D.

Cor. 1. Rectanguli xy, si latera, x, y, eodem modo fluant, fluxio erit $x\dot{y}+y\dot{x}$. Sin latera contrariè fluant, ut crescente x, y decrescat, erit $y\dot{x}-x\dot{y}$ rectanguli fluxio; negatâ nimirum illâ fluxionis parte, quæ ex fluxione lateris decrescentis provenerit.

Cor. 2. Si laterum x, y magnitudines quæ fluendo simul exsistunt, semper sint æquales, rectangulum xy fit quadratum ex x, et fluxio fit $2x\dot{x}$, quadrati fluxio.

Cor. 3. Si rectanguli, lateribus fluentibus, magnitudo manet, latera contrariè fluunt, et eorum fluxiones ipsorum laterum inter se rationem gerunt. Vel si rectanguli latera contrariè fluant, et tali lege ut eorum fluxiones ipsorum laterum inter se rationem gerant, hujus rectanguli magnitudo manebit.

Rectangulum xy, lateribus x, y fluentibus, dato spatio æquale maneat. Dico latera x, y, modis contrariis fluere, et $\dot{x}$ esse ad $\dot{y}$ sicut x ad y. Ac primùm latera x, y modis contrariis fluere manifestum est, ne similiter illis fluentibus rectangulum ipsum, quod manere posuimus, fluat. At verò lateribus rectanguli xy contrariè fluentibus, fluxio rectanguli rectangulorum $x\dot{y}$, $y\dot{x}$ differentiæ æqualis erit (Th. VIII. Cas. 2). Sed rectanguli, cujus magnitudo manet, fluxio nulla est. Nulla igitur rectangulorum $x\dot{y}$, $y\dot{x}$ differentia. Rectangula igitur illa inter se æqualia. Unde $\dot{x}$ erit ad $\dot{y}$ ut x ad y. (El. vi.) Q. E. D.

E contrario, si rectarum x, y contrariè fluentium fluxiones rationem inter se rectarum ipsarum servent, dico rectanguli xy magnitudinem manere. Cùm enim sit $\dot{x}$ ad $\dot{y}$ ut x ad y rectangula $y\dot{x}$, $x\dot{y}$ erunt inter se æqualia. Quare nulla erit horum differentia. Rectanguli igitur xy fluxio nulla. Cujus autem magnitudinis fluxio nulla, ea utique manet. Q. E. D.

CoROLLARIA.

Cor. 4. Parallelopipedi rectanguli axy, ſi latera x, y eodem modo fluant, tertio a permanente, ſolidorum duorum $ax\dot{y}$, $ay\dot{x}$ ſumma fluxio erit. Sit enim z recta eâ lege mutabilis, ut rectangula az, yx ſemper ſint inter ſe æqualia, ſi conferantur illorum magnitudines quæ fluendo ſimul exſiſtunt. Solida igitur a^2z, ayx ſemper erunt inter ſe æqualia. Ergo et horum fluxiones ſemper inter ſe æquales (Th. II.) Solidi autem a^2z ſolidum $a^2\dot{z}$ fluxio erit (Th. VII. Cor.) Idem igitur ſolidi ayx fluxio. Eſt autem rectangulum $a\dot{z}$ fluxio rectanguli az (Th. VI. Cor.) et rectangulorum az, yx fluxiones ſunt ſemper inter ſe æquales (Th. II.) Et rectanguli yx eſt $y\dot{x}+x\dot{y}$ fluxio (Th. VIII.) Quare $a\dot{z}=y\dot{x}+x\dot{y}$. Solidum igitur $aa\dot{z}$ duobus ſolidis $ay\dot{x}$, $ax\dot{y}$ ſimul ſumptis æquale eſt. Ergo $ay\dot{x}+ax\dot{y}$ ſolidi axy fluxio erit.

Sin creſcente x, y decreſcat, erit $ay\dot{x}-ax\dot{y}$ ſolidi axy fluxio. Quod ſimili argumento ex caſu ſecundo propoſitionis noviſſimæ licet concludere. Q. E. D.

Cor. 5. Parallelopipedi rectanguli xyz, cujus latera x, y, z eodem modo fluunt, ſolidorum trium $xy\dot{z}$, $xz\dot{y}$, $yz\dot{x}$ ſumma fluxio erit.

Deſignet litera a rectam quamvis datam; u aliam, eâ lege mutabilem, ut rectangula xy, au ſemper ſint inter ſe æqualia, ſi conferantur magnitudines eorum, quæ fluendo ſimul exſiſtunt. Solida igitur auz, xyz erunt ſemper inter ſe æqualia: unde horum fluxiones inter ſe æquales (Th. II.) Solidi autem auz fluxio eſt duorum $au\dot{z}$, $az\dot{u}$ ſumma (per Cor. præc.) hoc eſt, duorum $xy\dot{z}$, $az\dot{u}$ ſumma. Et rectangulum $a\dot{u}$ fluxio eſt rectanguli au (Th. VI. Cor.) fluxioni igitur rectanguli xy æquale; hoc eſt, $a\dot{u}=x\dot{y}+y\dot{x}$. Ergo $az\dot{u}=xz\dot{y}+yz\dot{x}$; additoque utrinque ſolido $xy\dot{z}$, $xy\dot{z}+az\dot{u}$, hoc eſt fluxio ſolidi auz, ſive ſolidi xyz, $=xy\dot{z}+xz\dot{y}+yz\dot{x}$. Q. E. D.

Sin latera x, y, z, modis diverſis fluant, ſolidi fluxio ex iiſdem partibus conſtabit; ſed negatis iis, quæ ex fluxionibus laterum decreſcentium factæ fuerint. Nempe, ſi creſcentibus x, y, tertium z decreſcat, erit $xz\dot{y}+yz\dot{x}-xy\dot{z}$ ſolidi xyz fluxio. Si creſcente x, duo y, z decreſcant, erit $yz\dot{x}-xy\dot{z}-xz\dot{y}$ ſolidi xyz fluxio.

Cor. 6. Si laterum x, y, z magnitudines ſemper ſint inter ſe æquales parallelopipedon xyz ſit cubus ex x, et fluxio ſit $3x^2\dot{x}$, quæ proinde cubi fluxio erit.

Cor. 7. Solidi $\frac{xyzu}{a}$, ſi quatuor x, y, z, u eodem modo fluant, fluxio erit $\frac{xyz\dot{u}+xyu\dot{z}+xzu\dot{y}+yzu\dot{x}}{a}$.

Sit s recta aliqua eâ lege mutabilis, ut rectæ $\frac{xy}{a}$ ſemper ſit æqualis. Tum $xy=as$, et $\frac{xyzu}{a}=szu$. Horum igitur fluxiones ſunt inter ſe æquales. Solidi verò szu fluxio eſt $sz\dot{u}+su\dot{z}+zu\dot{s}$ (per Cor. 4.) hoc eſt $\frac{xyz\dot{u}+xyu\dot{z}+azu\dot{s}}{a}$. Sed propter rectangula as, xy inter ſe æqualia erit $a\dot{s}=x\dot{y}+y\dot{x}$, & $\dot{s}=\frac{x\dot{y}+y\dot{x}}{a}$; unde $zu\dot{s}=\frac{xzu\dot{y}+yzu\dot{x}}{a}$; additiſque utrinque $\frac{xyz\dot{u}+xyu\dot{z}}{a}$, fit $\frac{xyz\dot{u}+xyu\dot{z}}{a}+zu\dot{s}=\frac{xyz\dot{u}+xyu\dot{z}+xzu\dot{y}+yzu\dot{x}}{a}$. Sed horum prius ſolidi szu, ſive $\frac{xyzu}{a}$, fluxioni jam ſuprà oſtenſum eſt æquale. Ergo et poſterius. Q. E. D.

Jam

Jam si horum æstimatio Arithmetica ineunda sit, posito $a = 1$, fluxio quantitatis $xyzu$ erit $xyz\dot{u} + xyu\dot{z} + xzu\dot{y} + yzu\dot{x}$; notis nimirum $x, y, z, u, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{u}$ non jam lineas rectas, aliasve magnitudines Geometricas, designantibus, sed Geometricarum per numeros æstimationes ex datâ mensurâ lineari a. COROLLARIA.

Si illarum quatuor x, y, z, u magnitudines fluendo simul factæ semper sint inter se æquales, quantitas $xyzu$ potestas sit biquadratica à radice x, et fluxio sit $4x^3\dot{x}$, quæ proinde potestatis biquadraticæ fluxio erit.

COR. 8. Simili modo concludetur esse $5x^4\dot{x}$ fluxionem quantitatis x^5. Et cùm similium Theorematum infinita sit progressio, fluxio quantitatis x^n erit $nx^{n-1}\dot{x}$.

COR. 9. Fluxio quantitatis $x^{\frac{m}{n}}$ est $\frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} \dot{x}$. Ponatur enim $x^{\frac{m}{n}} = s$. Harum igitur fluxiones sunt inter se æquales, hoc est $\dot{\overline{x^{\frac{m}{n}}}} = \dot{s}$. (Th. II.) Sed quantitatum æqualium, $x^{\frac{m}{n}}$, s, potestates homologæ erunt inter se æquales. Ergo $x^m = s^n$, et $\frac{x^m}{s}$, sive $x^{m-\frac{m}{n}} = s^{n-1}$. Duarum autem x^m, s^n, quæ semper inter se æquales sunt, fluxiones erunt inter se æquales (Th. II.) hoc est $mx^{m-1}\dot{x} = ns^{n-1}\dot{s}$ (per Cor. præc.) vel pro s^{n-1} subrogato $x^{m-\frac{m}{n}}$, $mx^{m-1}\dot{x} = nx^{m-\frac{m}{n}}\dot{s}$. Æquationis autem novissimæ parte utrâque cum quantitate $x^{\frac{m}{n}-m}$ multiplicatâ, proveniet $mx^{\frac{m-n}{n}}\dot{x} = n\dot{s}$. Ergo $\frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} \dot{x} = \dot{s} = \dot{\overline{x^{\frac{m}{n}}}}$. Q. E. D.

COR. 10. Quantitatibus x^n, y^m eodem modo fluentibus, quantitatis $x^n y^m$ fluxio erit $ny^m x^{n-1}\dot{x} + mx^n y^{m-1}\dot{y}$. Sin contrariè fluant quantitates x^n, y^m, ut crescente x^n, y^m decrescat, quantitatis $x^n y^m$ quantitas $ny^m x^{n-1}\dot{x} - mx^n y^{m-1}\dot{y}$ fluxio erit. Primùm eodem modo fluant. Ponatur $x^n = z$, et $y^m = u$. Erit $nx^{n-1}\dot{x} = \dot{z}$, et $my^{m-1}\dot{y} = \dot{u}$ (Th. II.) Erit etiam $x^n y = zu$, et $\dot{\overline{x^n y^m}} = u\dot{z} + z\dot{u} = ny^m x^{n-1}\dot{x} + mx^n y^{m-1}\dot{y}$. Q. E. D. Et alterius casus similis erit demonstratio, ex eo scilicet, quod $\dot{\overline{x^n y^m}}$ æquabitur $u\dot{z} - z\dot{u}$.

COR. 11. Quantitatis fractæ $\frac{x^n}{a}$, cujus, denominatore permanente, numerator fluit, quantitas fracta $\frac{nx^{n-1}\dot{x}}{a}$ fluxio erit. Quantitas enim x^n ad quantitatem $\frac{x^n}{a}$ rationem datam habet quantitatis a ad unitatem. Ergo fluxio quantitatis x^n ad fluxionem quantitatis $\frac{x^n}{a}$ eandem datam rationem habet

COROLLARIA.

habet quantitatis a ad unitatem (Th. IV.) hoc eſt $nx^{n-1}\dot{x} : \dot{\overline{\frac{x^n}{a}}} = a : 1$.

Ergo $\dot{\overline{\frac{x^n}{a}}} = \frac{nx^{n-1}\dot{x}}{a}$. Q. E. D.

Cor. 12. Quantitatis fractæ $\frac{a}{y^m}$, cujus, numeratore permanente, denominator fluit, quantitas fracta $\frac{-ma\dot{y}}{y^{m+1}}$ fluxio erit; ſigno — id nimirum ſignificante, contrariis ſemper modis fluere quantitatem fractam et denominatorem ejus; nempe decreſcere $\frac{a}{y^m}$ ſi y^m creſcat, ſi hæc decreſcat, illam creſcere.

Ponatur $\frac{a}{y^m} = s$. Tum $a = y^m s$. Quantitas igitur $y^m s$, ex fluentibus y^m, s, mutuâ multiplicatione facta, datæ ſemper æqualis eſt, vel quod perinde eſt, eadem ſemper manet. Hoc autem fieri nequit, niſi contrariè fluentibus illis y^m, s, quantitates $msy^{m-1}\dot{y}$, $y^m\dot{s}$ inter ſe æquales ſint. Sint enim inæquales, et inæqualium ſit z differentia. Erit igitur z fluxio quantitatis $y^m s$, è duabus y^m, s, contrariè fluentibus, mutuâ multiplicatione factæ (per Cor. 10). Fluet igitur quantitas $y^m s$, ſiquidem fluxionem habeat. Non igitur eadem manet. Quod eſt abſurdum, cùm manere oſtenſa ſit. Duæ igitur $msy^{m-1}\dot{y}$, $y^m\dot{s}$ non ſunt inæquales. Æquales igitur. Duæ igitur, $\frac{ms}{y}\dot{y}$, $\dot{s}$, inter ſe æquales. Hoc eſt, ſi pro s ſcribatur $\frac{a}{y^m}$, $\frac{ma}{y^{m+1}}\dot{y} = \dot{s}$. Q. E. D.

Cor. 13. Quantitatis fractæ $\frac{x^n}{y^m}$, cui fluunt numerator et denominator, quantitas fracta $\frac{nx^{n-1}\dot{x}}{y^m} - \frac{mx^n\dot{y}}{y^{m+1}}$ fluxio erit; modò quantitas ipſa fracta $\frac{x^n}{y^m}$ eodem modo quo denominator ejus fluat.

Ponatur $\frac{x^n}{y^m} = z$. Quantitatum igitur, $\frac{x^n}{y^m}$, z, fluxiones erunt inter ſe æquales, hoc eſt $\dot{\overline{\frac{x}{y}}} = \dot{z}$.

Propter æquales autem $\frac{x}{y^m}$, z, erunt x^n, zy^m inter ſe æquales. Et æqualium x^n, zy^m fluxiones erunt inter ſe æquales. Ergo $nx^{n-1}\dot{x} = mzy^{m-1}\dot{y} + y^m\dot{z}$; modò y^m & z eodem modo fluant.

Ergo $nx^{n-1}\dot{x} - mzy^{m-1}\dot{y} = y^m\dot{z}$.

Ergo $\frac{nx^{n-1}\dot{x}}{y^m} - \frac{mz\dot{y}}{y} = \dot{z}$.

Hoc eſt, ſi pro z reſtituatur $\frac{x^n}{y^m}$, $\frac{nx^{n-1}\dot{x}}{y^m} - \frac{mx^n\dot{y}}{y^{m+1}} = \dot{z} = \dot{\overline{\frac{x^n}{y^m}}}$.

Sin contrariè fluant quantitas ipſa fracta $\frac{x^n}{y^m}$ et denominator ejus, erit $\frac{nx^{n-1}\dot{x}}{y^m} + \frac{mx^n\dot{y}}{y^{m+1}}$ quantitatis fractæ fluxio.

Cor.

COR. 14. Si quantitas P ex quantitatibus quotvis fluentibus A, B, C, D, &c. mutuâ multiplicatione facta sit, quantitas fracta $\frac{\dot{P}}{P}$ quantitatum fractarum $\frac{\dot{A}}{A}$, $\frac{\dot{B}}{B}$, $\frac{\dot{C}}{C}$, $\frac{\dot{D}}{D}$ summæ æqualis erit. COROLLARIA.

Cùm enim P quantitati $A \times B \times C \times D$ æqualis sit, erit $\dot{P} = BCD \times \dot{A} + ACD \times \dot{B} + ABD \times \dot{C} + ABC \times \dot{D}$ (per Cor. 7.)

Sed $BCD = \frac{P}{A}$, et $ACD = \frac{P}{B}$, et $ABD = \frac{P}{C}$, et $ABC = \frac{P}{D}$.

Ergo $\dot{P} = \frac{P\dot{A}}{A} + \frac{P\dot{B}}{B} + \frac{P\dot{C}}{C} + \frac{P\dot{D}}{D}$.

Ergo $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{D}}{D}$. Q. E. D.

Cor. 15. Si P quantitati fractæ æqualis sit, cujus numerator ex quantitatibus quotcunque fluentibus A, B, C, D mutuâ multiplicatione factus est, denominator ex quantitatibus quotcunque fluentibus, G, H, K, L; erit $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{D}}{D} - \frac{\dot{G}}{G} - \frac{\dot{H}}{H} - \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$.

Sit $Q = P \times G \times H \times K \times L$.

Ergo $\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{P}}{P} + \frac{\dot{G}}{G} + \frac{\dot{H}}{H} + \frac{\dot{K}}{K} + \frac{\dot{L}}{L}$ (per Cor. præc.)

Sed cùm $P = \frac{A \times B \times C \times D}{G \times H \times K \times L}$, erit $P \times G \times H \times K \times L$, hoc est $Q, = A \times B \times C \times D$.

Ergo $\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{D}}{D}$ (per Cor. præc.)

Quare $\frac{\dot{P}}{P} + \frac{\dot{G}}{G} + \frac{\dot{H}}{H} + \frac{\dot{K}}{K} + \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{D}}{D}$; et eadem utrinque auferendo, $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{D}}{D} - \frac{\dot{G}}{G} - \frac{\dot{H}}{H} - \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$. Q. E. D.

Corollariis duobus novissimis exposita sunt Maclaurini Theoremata duo, quorum usus in computationibus fluentium Algebraicis latè patet. (*Maclaurin, Treatise of Fluxions, Book* II. C. I. *Prop.* IV & V.)

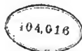
ITA demum formulas, quarum ope, quantitatum omnium quæ sub generali *Genitarum* (*) nomine Newtono sunt comprehensæ, Algebraicè æstimari fluxiones solent, ex paucis illis doctrinæ fluxionalis deduximus principiis, quæ octo utique Theoremaris conclusa, demonstrationibus confirmavimus Newtonianis; hoc est, è Newtonianâ Rationum Primarum et Ultimarum Geometriâ arcessitis. Ex quo genere rationum conclusiones, modò peritè sint deductæ, nec ipsis Archimedeis, meo equidem judicio, aut evidentiâ aut venustate cedunt. Nec dubito tamen fore multos, qui nostram in hisce condendis diligentiam, ut nimiam, reprehendent. Sed ii

(*) Vide Princip. Lib. II. Lemma 2.

potissimùm

COROLLARIA. potissimùm erunt, qui cùm ea quæ tradimus ipsi sint consecuti, aliorum conditionis immemores, supervacanea putant quibus ipsi non egent; vel quorum judicia parùm reformido, homines haud indocti quidem illi sed incuriosi et inelegantes, qui cùm omnia festinanter ipsi arripuerint, utpote minùs scilicet ingenii perpolitionem, qui potissimus est doctrinæ fructus, quàm inanem quandam scientiæ famam ex studiis captantes, concisum scribendi genus ipsi summoperè affectant, alios explicatiùs differentes ægrè ferunt. Qui proprias scriptiones non tam verborum brevitate, quàm rerum prætermissione et transcursu contrahunt. Ac veluti sapiente nihil magis indignum existimarent, quàm clarè et apertè loqui, Theoremata Geometrica sub involucris symbolorum proferunt, dicam, an occultant. Horum demonstrationes plerumque studiosè celant. Aut si forte benigniùs agere velint, argumentorum vice, computationes edunt; ex quibus nulla certè probatio efficitur, nisi ei qui ad calculos ratiocinia revocaverit. Quem sane nimium laborem, nisi in rebus maximis, nemo cordatior subierit. Vel siquando, in re aliquâ difficiliore, Geometricè edisserendi facultatem atque artem ostentare libeat, tum verò, cùm infensam sibi noverint Graiorum Geometriam, quam votis nunquam placavere, ad præstigiatricem *Indivisibilium*, quam vocant, disciplinam confugere coacti, sanioris Geometriæ cultoribus miserè se irridendos præbent; pro veris demonstrationibus demonstrationum simulacra quædam venditantes, qualia ferè insaniens illa sapientia suppeditare solet. Cujus quidem individua, quæ semper illis sunt in ore, quid sint, quæ, cùm ipsa magnitudinis sint expertia, juncta tamen magnitudines absolvant, nondum natus est Oedipus, qui mortalibus expediat.

FINIS TOMI PRIMI.



CORRIGENDA

IN TEXTU.

P. 60, lin. 2, pro *unum*, lege *unam*.
P. 65, lin. 9, pro IV, lege V.
P. 73, lin. penult. pro x, lege z.
P. 246, lin. 11 & 12, delendæ ſunt voces *datam aliquam inter ipſas proportionem ſervantibus*.
P. 249, lin. 12, pro *duplicatâ*, lege *triplicatâ*

IN NOTIS

P. 237, not. (a) lin. 2, pro *fit*, lege *ſit*.
——— lin. 6, pro *abiit*, lege *abſit*.
P. 379, not. (oo), lin. 2, pro *Not*. a, lege *Not*. 1.
P. 383, lin. 21, pro *Philoſophicæ*, lege *Philoſophica*.

To the Book-binder.

Put the two Half-ſheets of Copper-plate between Page 378 and 379.